

第四章 張力及び壓力

第一節 抗張強度

錐狀の物體に於いてその軸の方向に張力が働く時はその断面に張應力を生じ、又その軸の方向に伸張を生ずる事はすでに前章に述べた通りである。

〔1〕一定断面を有する錐

今一つの角錐を考へて

P = 張力

F = 錐の原断面積

l = 錐の原長

Δl = 張力 P の作用せし結果受けた錐の伸張

$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} =$ 單位變形 (Strain)

$\alpha =$ 變形率

$\sigma =$ 張力 P に依つて生ずる其の原断面積に關する應力

$\sigma_a =$ 許容抗張應力

とすれば次の關係式を得る。

$$(1) \quad P = \sigma \cdot F$$

$$(2) \quad P \leq \sigma_a \cdot F$$

尙鑄鐵、熱處理を受けた鋼の如きは初めから製作上の應力を受けてゐるのであるのであつて、かくの如く當初應力の存在する場合には上の $\sigma = \frac{P}{F}$ にその當初應力を附加して考へなければならぬ。

尙變形率を用ひると

$$(3) \quad \Delta l = \alpha l \sigma = \alpha l \frac{P}{F}$$

又自重を考へる必要ある場合には、例へば垂直に掛つてゐる錐の重量を G とすれば根元の断面に於いて、

$$(4) \quad P + G = \sigma \cdot F$$

$$(5) \quad P + G \leq \sigma_a \cdot F$$

となる。今單位重量を γ とすれば

$$(6) \quad P + \gamma F l \leq \sigma_a \cdot F$$

$P = 0$ とし單に自重のみが働けば

$$(7) \quad \sigma_a \geq \gamma l \quad \text{或は} \quad l \leq \frac{\sigma_a}{\gamma}$$

となる。公式 (7) に於いて σ_a の代りに破壊強度 K_t を用ひると自重のみに依つて破壊する極限の長さ、所謂破壊長を得る事になる。之れが自重のみに依つて作用せられる物體の長さを定めるに役立つものであつて、今その値を示せば次の如くなる。

材	料	比	重	抗張強度 (kg/cm ²)	破 壊 長 (cm)
アルミニウム	(灼熱)	2.7		900	3,300
"	(冷展)	2.7		4,000	14,800
鋼	線 (灼熱)	7.8		9,000	11,500
"	(引延)	7.8		25,000	32,000

次に一定断面の錐に自重と力 P とが作用した時にはその變形は次の如くして求められる。

$$(8) \quad \Delta l = \int_0^l \epsilon dx = \int_0^l \left[\alpha \frac{P}{F} + \alpha \gamma x \right] dx = \alpha l \left[\frac{P}{F} + \gamma \frac{l}{2} \right] = \alpha \frac{l}{F} \left(P + \frac{G}{2} \right)$$

〔2〕變化断面を有する錐

Fig. 89 に於いて、

P = 張力

F = 下端から x の距離にある断面積

F_0 = 最小断面積

l = 伸張以前の長さ

Δl = 力 P の作用に依つて生ずる伸張

ϵ = 断面 F に於ける單位變形

$\sigma = \frac{P}{F} =$ 断面 F に於ける應力

$\alpha =$ 變形率

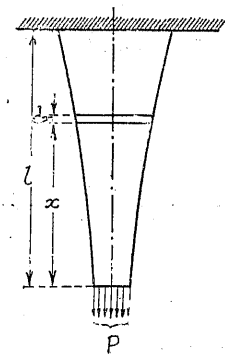


Fig. 89

$\sigma_a =$ 許容抗張應力

とする。この場合に ε は各断面に於いて異なるものとする。今下端から x の距離に於ける長さ dx の伸張を Δdx とすれば

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx}$$

公式(1)及び(3)より

$$(9) \quad P \leq \sigma_a \cdot F_0$$

$$(10) \quad \Delta l = \int_0^l \alpha \cdot dx \cdot \sigma = P \int_0^l \alpha \frac{dx}{F}$$

弾性限度内に於いては α を一定と看做せば

$$(10)' \quad \Delta l = \alpha P \int_0^l \frac{dx}{F}$$

次に自重 G を考へる場合には断面積 F_1 なる最上断面に於いては、

$$\sigma = \frac{P+G}{F_1}, \quad \sigma_a \geq \frac{P+G}{F_1}$$

下端から x の距離にある断面 F に於ける總應力變化に就いて次の關係がある。

$$d(F\sigma) = \gamma F \cdot dx$$

鋼の何れの断面にても同一の應力 σ_a を有する爲には、上式から

$$\sigma_a dF = \gamma F \cdot dx$$

$$\therefore \log F = \frac{\gamma x}{\sigma_a} + C_1$$

$x = 0$ に對し $F = \frac{P}{\sigma_a}$ とすれば $C_1 = \log \frac{P}{\sigma_a}$ となるを以つて、

$$(11) \quad F = \frac{P}{\sigma_a} \cdot e^{\frac{\gamma x}{\sigma_a}}$$

[3] 温度の影響

今 Fig. 90 に示す如き送電用針金を考へて A, B を高さの同一なる緊固點としその支間を $2l$ とする。冬期温度 t_0 に於いて應力 σ_0 を超過せざる爲、それより高き温度 t に於

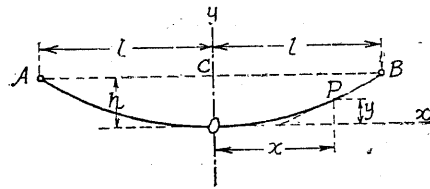


Fig. 90

いて必要なる垂矢 h を計算しよう。

Fig. 91 に示す様に

$H =$ 頂點 O に於ける針金の張力

$S =$ 座標 xy なる任意の點 P に於ける張力

$h =$ 垂矢

$q = F\gamma =$ 針金の單位長の重さ。

とし、針金は完全なる撓度性を有し、又曲線 \widehat{OP} の長さは垂矢が支間に比し小なる爲針金の水平投影長 x と等しいものと假定する。然らば Fig. 91 に従つて、

$$S \sin \varphi = q \cdot \widehat{OP} \cong q \cdot x \quad \text{及び} \quad S \cos \varphi = H$$

$$\text{従つて} \quad \tan \varphi = \frac{qx}{H} = \frac{dy}{dx}$$

これを積分して

$$(12) \quad y = \frac{1}{2} \frac{qx^2}{H}$$

となる。茲に $x = 0$ に對し、 $y = 0$ となるべきを以つて、積分定数は零となる。従つて上の如き近似法を以つてすれば針金の曲線は拋物線となる。(12) に於いて $x = l$ に對し $y = h$ となる故に $h = \frac{1}{2} \frac{ql^2}{H}$ となる。

従つて $H = \frac{ql^2}{2h}$ となり、之れを(12)に代入すれば

$$(13) \quad y = \frac{qx^2}{2 \frac{ql^2}{2h}} = h \left(\frac{x}{l} \right)^2$$

となる。次に曲線 \widehat{OB} の長さ s を求めると次の如し。

$$(14) \quad s = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_0^l \sqrt{1 + \left(2 \frac{hx}{l^2} \right)^2} dx \cong \int_0^l \left[1 + 2 \left(\frac{hx}{l^2} \right)^2 \right] dx \\ = \int_0^l \left(1 + 2 \frac{h^2}{l^4} x^2 \right) dx = l \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right]$$

所が空氣の温度と共に針金の長さ s も變化するのであつて、 s が變化し、従つて $H = \frac{ql^2}{2h}$ も變化し、 $\sigma = \frac{H}{F}$ も變化するに至る。今温度 t に於ける値

H, h, s 及び σ がそれより低き温度 t_0 に於いては H_0, h_0, s_0 及び σ_0 となるものとする。是等の値の關係を見出すには先づ始めに應力變化による長さの變化、次に温度變化による長さの變化の兩方を考へねばならぬのであつて、今變形率を α 、温度變化に依る膨脹係數を α_w とすれば、 s と s_0 の間に次の關係が成立する。

$$s = s_0[1 + \alpha(\sigma - \sigma_0)](1 + \alpha_w(t - t_0)) \\ \cong s_0[1 + \alpha(\sigma - \sigma_0) + \alpha_w(t - t_0)]$$

上式に公式 (14) の關係を入れると

$$s = l \left[1 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{l^2} \right] [1 + \alpha(\sigma - \sigma_0) + \alpha_w(t - t_0)] \\ \cong l \left[1 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{l^2} + \alpha(\sigma - \sigma_0) + \alpha_w(t - t_0) \right]$$

又公式 (13) の關係を用ひて

$$h_0 = \frac{ql^2}{2H_0} = \frac{Frl^2}{2F\sigma_0} = \frac{rl^2}{2\sigma_0}$$

$$\text{及び } h = \frac{rl^2}{2\sigma}, \quad \text{又は } \sigma = \frac{rl^2}{2h}$$

を得るを以つて

$$s \cong l \left[1 + \frac{1}{6} \frac{r^2 l^2}{\sigma_0^2} + \alpha \left(\frac{rl^2}{2h} - \sigma_0 \right) + \alpha_w(t - t_0) \right] = l \left[1 + \frac{2}{3} \frac{h_0^2}{l^2} \right]$$

$$\text{故に (15) } h^3 - \frac{3}{2} l^2 \left[\frac{1}{6} \frac{r^2 l^2}{\sigma_0^2} + \alpha_w(t - t_0) - \alpha \sigma_0 \right] h = \frac{3}{4} \alpha r l^4$$

この (15) 式を用ひて求むる垂矢を計算する事が出来る。尙冬期電線に雪が附着し又それが凍ることを考へる必要のある場合には r 或は $q = F \cdot r$ をそれに應じて高めるとよい。次にその値は非常に小さいが針金が彎曲を受けることに依つて彎曲應力を受ける。今拋物線形をなす電線の中央に於ける曲率半径 ρ を式 (12) より求めるに、

$$(16) \quad \rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{H}{q}$$

となるを以つて、針金の直徑を $2a$ とすると彎曲應力は後に説明する所に依り

$$\sigma_b = \frac{qe}{\alpha H} = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{eF}{H} = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{e}{\sigma}$$

となる。例へば針金の單位長の重さ $\gamma = 0.008 \text{ kg}$, $\alpha = \frac{1}{2,200,000} = 0.455 \cdot 10^{-6}$
 $\sigma = 1,000 \text{ kg/cm}^2$, $e = 0.2 \text{ cm}$ とすると

$$\sigma_b = \frac{0.008}{0.455 \cdot 10^{-6}} \frac{0.2}{1,000} = 3.5 \text{ kg/cm}^2$$

となる。

第二節 力に直角なる方向の短縮

前章に於いて述べた様に軸の方向に引かれた錐はその方向の伸張の他に、それと直角の方向に長さの短縮を生ずる。原長 l が軸の方向に Δl の伸張をすればその單位變形は $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ である。次に軸と直角の方向に於いて直徑 d が Δd だけ小となればその方向の單位變形は

$$(1) \quad \varepsilon_q = -\frac{\Delta d}{d} = -\frac{\varepsilon}{m}$$

となる。此の m の値は普通 3 又は 4 (平均 $\frac{10}{3}$) であつて、その逆數 $\frac{1}{m}$ を稱してポアソン比 (Poisson's ratio) と云ふ。

今 Fig. 92 に示す正方體は比例限度を有する等質材料からなるものとする。而して比例限度内に於いてまづ x 軸の方向に張力 P_x, P_x を働かすならば、その方向に於ける應力 σ_x と單位變形 ε_x の間に次の關係が成立する。

$$\sigma_x = \frac{\varepsilon_x}{\alpha}$$

尙この時、 y, z 軸の方向に於ける單位變形は共に $-\frac{\varepsilon_x}{m}$ であつて、應力は共

に零である。若しこの正方體に y 軸の方向にのみ張力 P_y, P_y が働くならば、その方向に於ける單位變形及び應力は ε_y 及び $\sigma_y = \frac{\varepsilon_y}{\alpha}$ である。この時矢張 x, z 軸の方向の單位變形は共に $-\frac{\varepsilon_y}{m}$ にして、應力は共に零である。同様にし

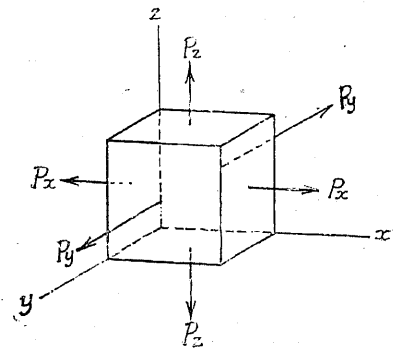


Fig. 92

て Z 軸の方向にのみ張力 P_z , P_z が働くならばその方向に夫々 ε_z , $\sigma_z = \frac{\varepsilon_z}{\alpha}$ の単位變形及び應力を生じ、x 軸及び y 軸の方向には共に夫々 $-\frac{\varepsilon_z}{m}$, 0 の単位變形及び應力を生ずる。今若し $P_x, P_x, P_y, P_y, P_z, P_z$ が同時に働くならばその合成単位變形は

$$(2) \quad \begin{cases} x \text{ 軸の方向に} & \varepsilon_1 = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{m} \\ y \text{ 軸の方向に} & \varepsilon_2 = \varepsilon_y - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{m} \\ z \text{ 軸の方向に} & \varepsilon_3 = \varepsilon_z - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m} \end{cases}$$

を得る。これに

$$(3) \quad \varepsilon_x = \alpha \sigma_x, \quad \varepsilon_y = \alpha \sigma_y, \quad \varepsilon_z = \alpha \sigma_z$$

なる関係を利用すれば

$$(4) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \alpha \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) & \text{或は} & \frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \\ \varepsilon_2 = \alpha \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \right) & \text{"} & \frac{\varepsilon_2}{\alpha} = \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m} \\ \varepsilon_3 = \alpha \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right) & \text{"} & \frac{\varepsilon_3}{\alpha} = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \end{cases}$$

となる。かくの如く一つの軸張力の他にそれと直角の方向に張力が作用すればその伸張を減じ、反対に壓力が働けばその伸張を増すものである。

第三節 抗 壓 強 度

(1) 概 説

前章に於いて述べた様に壓力を受けた錐はその軸の方向に壓縮し、それと直角の方向に伸張する。そして此の場合は總べて張力を受けた場合と反対の符號をとる事になる。普通抗壓強度は供試體が破壊する迄の最大荷重を原斷面積で割つたものであつて次の式にて與へられる。

$$(1) \quad K_c = \frac{P_{max}}{F}$$

しかし乍らこの強度は抗壓材の高さに關係し、高さの増加と共にその値を減少するものである。抗壓強度の試験に屢々立方體供試體が用ひられるが、この時の

強度を特に立方體強度 (Cube strength) と云ふ。之れに對し供試體が柱形をなす時、角嚮強度若しくは柱強度と云ふ。單に枕壓強度と云へば立方體か或は高さが直徑に等しい圓嚮に就いての強度を示すのである。混凝土供試體に於いては普通直徑の二倍の高さを有する圓嚮を選ぶ。

尚鉛の如き軟き物體は壓力が加ると共に横に擴つて愈々負荷力を増すに至る。かゝる物體に對しては其の壓縮點を以つて抗壓強度とする。

嚮狀錐に對しては張力の場合と同一の記號を用ひて

$$(2) \quad P = -\sigma_c F$$

$$(3) \quad P \leq \sigma_{c,a} F$$

$$(4) \quad \Delta l = -\alpha l \sigma = \alpha l \frac{P}{F}$$

又可變斷面を有する錐に對しては Fig. 89 に示す様に任意の斷面 x に於ける斷面積を F とすると

$$(5) \quad P \leq \sigma_{c,a} F_0$$

$$(6) \quad \Delta l = P \int_0^l \alpha \frac{dx}{F}, \quad \text{茲に自重を無視する。}$$

(2) 供試體の全面に力が作用する場合の強度

この時の抗壓強度は前述の如く斷面寸法と高さとの比に依つて異なるのであつて Bauschinger 氏 (München 市) は次の實驗式を與へてゐる。

$$(7) \quad K_c = \left(\alpha + \beta \frac{\sqrt{F}}{h} \right) \sqrt{\frac{\sqrt{F}}{u}} \frac{u}{4}$$

茲に $h \leq 5a, \quad a^2 = F$

F = 角嚮の斷面積 (cm^2)

u = 斷面の周邊長 (cm)

h = 角嚮の高さ (cm)

K_c = 破壊強度 (kg/cm^2)

α 及び β = 材料の種類に關係する係數

今一例として砂岩の供試體 (1,876 年) に對し其の層に直角に荷重を加へたるに、

$$K_c = \left(310 + 346 \frac{\sqrt{F'}}{h} \right) \sqrt{\frac{\sqrt{F'}}{u}} \frac{1}{4}$$

を得又鑄鐵 (1,910 年) に對し次の式を得た。

$$K_c = \left(5,700 + 920 \frac{\sqrt{F'}}{h} \right) \sqrt{\frac{F'}{u}} \frac{1}{4}$$

又鉛に對しては次の表の如き結果を得た (1,884 年)

高さ (cm)	直径 (cm)	斷面積 (cm ²)	抗壓強度 (kg/cm ²) 横に擴り始めた時
7.05	3.525	9.76	51
3.47	3.53	9.79	69
1.01	3.48	9.51	126

〔3〕 供試體の一部に荷重を受けた場合の強度

(a) Fig. 93 に示す様に角に傾斜
小なる面を有する角鑄體に荷重せら
れた場合。

今砂岩に就き層に直角に荷重が作
用する場合に就き實驗したるに一例
として次の結果を得た。

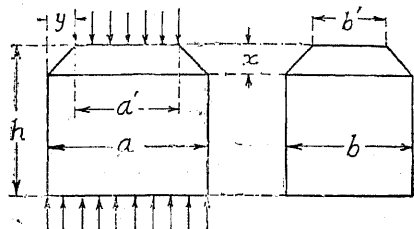


Fig. 93

$$h = 9.7 \text{ cm}, \quad a = 9.95 \text{ cm}, \quad ab = F' = 98.5 \text{ cm}^2$$

$$x:y = 3:1, \quad a' = 8.05 \text{ cm}, \quad b' = 8.05 \text{ cm}$$

$$a'b' = F'' = 64.8 \text{ cm}^2, \quad P = 45,500 \text{ kg}$$

$$\sigma = \frac{P}{F'} = 460 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma' = \frac{P}{F''} = 702 \text{ kg/cm}^2$$

尙この材料に就き立方體強度を求めたるに 685 kg/cm² であつた。従つて a'b' 面に作用する荷重は立方體供試體に就いて許し得るものより大であり、又 ab 斷面を計算の基とすれば許容應力を下げる事が必要となつて来る。而してこの影響は a'b' 斷面が ab 斷面に比し小となればなるほど著しくなるのであつて、例へば同一の材料に就き x:y = 5:3, a'b' = 17.3 cm² なる場合の實驗結果は次の様であつた。

$$\sigma = 200 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma' = 1,132 \text{ kg/cm}^2$$

(b) Fig. 94 に示す如く立方體の面の一部に荷重せられた場合。

今 a×b×h なる立方體の一面に斷面 z×z、高さ 39 mm なる鋼角鑄を當て荷重を加へ、破壊荷重を P とすれば $\frac{P}{ab}$ は立方體強度に比し小となり、 $\frac{P}{z^2}$ は大となる。この現象は兩側から角鑄を當てる時一層著しくなる。

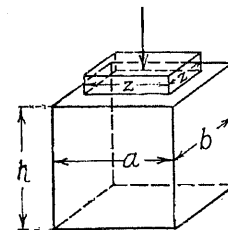


Fig. 94

(c) Bauschinger 氏は砂岩に就き Fig. 95 に示す様に面の一部に荷重を加へたるに次の實驗式を得た。

$$K_c = K_w \sqrt[3]{\frac{a_1 b_1}{a' b'}}$$

茲に $K_c = \frac{P}{4a' b'}$ = 影線を以つて示せる面積に関する抗壓強度。

K_w = 立方體抗壓強度。

尙 O. Graf 氏が混凝土體に就き試驗を行ひたるに同一の結果を得た。

(d) Bach 氏は砂岩に對し Fig. 96 に示す如き供試體に就き試驗を行ひたるに次の如き公式を得、略 (c) の場合と同様な結果に達した。

$$K_c = K_w \sqrt[3]{\frac{a}{z}}$$

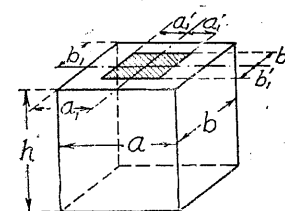


Fig. 95

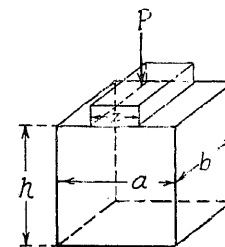


Fig. 96

〔4〕 抗壓強度の理論

抗壓材が破壊する場合に就き二つの見方がある。

(1) Coulomb 説

Fig. 97 に示す如く壓力 P を受けた場合 α なる面に沿ひ剪力に依つて滑動し以つて破壊に至ると云ふ説であつて、 K_c を滑動面の單位面積に就いての抵抗力、即ち抗剪強度とすれ

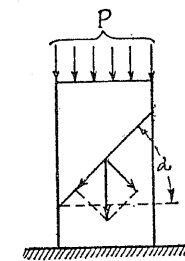


Fig. 97

ば $P \sin \alpha$ は滑動面に沿ふ剪力なるを以て次の式を得る。

$$P \sin \alpha = K_s \frac{F}{\cos \alpha}$$

$$\therefore P = K_s \frac{2F}{\sin 2\alpha}$$

従つて $\sin 2\alpha$ が最大、即ち $\alpha = 45^\circ$ の時 P は最小となる。そしてその時の値は $P = 2K_s F$ となる。即ち P がこの値に達した時 $\alpha = 45^\circ$ なる面に沿ひ滑動すると云ふ事になる。尙抗壓強度 K_c が $2K_s$ より小なる時は $P = K_c F < 2K_s F$ なるを以つて $\alpha = 45^\circ$ なる面に沿ひ滑動する以前に壓應力に依り破壊する事になる。

又この理論に於いて滑動面の摩擦係数 f を考へると

$$P \sin \alpha - f P \cos \alpha = K_s \frac{F}{\cos \alpha}$$

$$P(\sin \alpha - f \cos \alpha) = K_s \frac{F}{\cos \alpha}$$

$$P = K_s F \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha - f \cos^2 \alpha} = K_s F \frac{2}{\sin 2\alpha - 2f \cos^2 \alpha}$$

$\therefore \alpha \cos 2\alpha + f \sin 2\alpha = 0$ から α を計算すれば滑動に依り破壊する場合の角 α を知るを得。

(2) 第二説

この説に於いては横變形 ε_y を考へるのである。即ち壓力に依る變形を ε とすれば $\varepsilon_y = \frac{\varepsilon}{m}$ であつて、この ε_y の値が張應力に對する破壊點に於ける値に達した時この物體は破壊を生ずるに至ると云ふのである。従つて m の値が 3~4 である所の鑄鐵の抗壓強度は抗張強度の 3~4 倍となる。

然し乍ら實驗の結果は上の兩説を全く説明する事は出来ないのであつて、立方體試験の場合は上下兩面から内側に向つて、二つのピラミットを作つて破壊するに至るのである。

(V. D. I. 1,922. S. 566 参照)

第四節 球面及び圓壘面の抗壓強度

互に相接する曲面に生ずる應力及び變形を求める方法は Hertz 氏(1,881年)

に依つて始めて示されたのであつて、その理論は次に示す四つの假定に基いてゐる。

- (1) 兩方の物體の材料は總べての點に於いて總べての方向に等質である。
- (2) 變形と應力の間に比例が成立する。又壓力に對する變形率 α は張力に對するものに等しい。
- (3) 荷重が作用し物體の彈性の爲に生ずる接觸壓力面の大きさは、物體の表面に比し甚だ小である。
- (4) 壓力面に垂直な力のみが働く。

以下順次各々の場合に就いて説明を進めよう。

(1) 二つの球面の間の壓力

今 $\alpha_1, \alpha_2 =$ 材料の變形率

$r_1, r_2 =$ 二つの球面の半径

$m_1, m_2 =$ 縦變形の横變形に對する比

とする時、始め一點に於いて接したるものが荷重 P の結果兩方で接近すべき長さ y は次式で與へられる。

$$(1) \quad y = \sqrt[3]{\frac{3}{4} P \left\{ \left(1 - \frac{1}{m_1^2}\right) \alpha_1 + \left(1 - \frac{1}{m_2^2}\right) \alpha_2 \right\}^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}$$

而してこの壓力面の半径 a は次の如くなる。

$$(2) \quad a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} P \frac{\alpha_1 \left(1 - \frac{1}{m_1^2}\right) + \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{m_2^2}\right)}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}$$

壓力面の中心に於ける最大應力は荷重 P を壓力面で割つた平均應力の 1.5 倍となるのであつて、之れを式にて示せば公式 (3) の様である。

$$(3) \quad \sigma_{max} = 1.5 \frac{P}{\pi a^2}$$

今 $m_1 = m_2 = m, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ならば公式 (3) は

$$(3_a) \quad \sigma_{max} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{P \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2}{\alpha^2 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)^2}}$$

となり、特に $m = \frac{10}{3}$ とすれば σ_{max} , y , a に對し各々次の式を得る。

$$(3_b) \quad \sigma_{max} = 0.388 \sqrt[3]{\frac{P}{\alpha^2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2}$$

$$(1_a) \quad y = 1.23 \sqrt[3]{P^2 \alpha^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}$$

$$(2_a) \quad a = 1.11 \sqrt[3]{\frac{P\alpha}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}$$

〔2〕球面と平面の間の壓力

公式 (3_a) に於いて $r_1 = r$, $r_2 = \infty$ とすると、次の如くなる。

$$\sigma_{max} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{P}{d^2 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)^2 r^2}}$$

従つて
$$P = \frac{2}{3} \pi^3 \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)^2 \sigma_{max}^3 r^2$$

球の直径 $d = 2r$ を用ひると

$$(4) \quad P = kd^3$$

茲に (5)
$$k = \frac{\pi^3}{6} \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)^2 \sigma_{max}^3$$

〔3〕二つの圓錐の間の壓力

二つの圓錐の長さを各々 l とし、荷重なき時一線に於いて切してゐるものとする。これに P なる荷重がかゝれば單位長の壓力は P/l である。

今 r_1 , r_2 = 二つの圓錐の半径

$$\alpha_1, \alpha_2 = \text{變形率}$$

$$m_1, m_2 = \text{縦變形の横變形に對する比}$$

とすれば荷重 P に依つて生ずる接觸面の幅は次の如くなる。

$$(6) \quad b = 4 \sqrt{\frac{P}{\pi l} \frac{\alpha_1 \left(1 - \frac{1}{m_1^2} \right) + \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{m_2^2} \right)}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}$$

尙接觸面の中央に於ける最大壓應力は

$$(7) \quad \sigma_{max} = \frac{4P}{\pi b l}$$

であつて平均壓應力の $\frac{4}{\pi}$ 倍である。

同一材料の場合には $m_1 = m_2 = m$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ なるを以つて

$$(6_a) \quad b = 4 \sqrt{\frac{2P}{\pi l} \frac{\alpha \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}$$

となる。

〔4〕圓錐と平板との壓力

この場合 $r_1 = r$, $r_2 = \infty$ となり公式 (6_a) は次の如くなる。

$$(6_b) \quad b = 4 \sqrt{\frac{2}{\pi} \alpha \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \frac{P}{l} r}$$

更に公式 (7) から

$$\sigma_{max} = \sqrt{\frac{P}{2\pi \alpha \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) l r}}$$

圓錐直径 $d = 2r$ を用ひると

$$(8) \quad P = kld$$

茲に (9)
$$k = \pi \alpha \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \sigma_{max}^2$$

公式 (2), (3); (6), (7) は材料に相當する α , m の値を與へた時、許容應力 σ_{max} に對する負荷壓力 P を求めるに用ひられる。

Stribeck 氏が鋼球に就いて多數實驗した所によると、球と平板（共に硬化せし鋼にて作る）との間に於ける實際上許容し得る荷重は次の式にて與へる事が出来る。

$$P = 50 d^2$$

今公式 (4), (5) に従つて

$$\alpha = \frac{1}{2,120,000} = 0.472 \cdot 10^{-6}, \quad m = \frac{10}{3}$$

とすれば

$$k = 50 = \frac{\pi^3}{6} \frac{0.472^2}{1,000,000^2} (1 - 0.3^2) \sigma_{max}^3$$

$$\therefore \sigma_{max} = 37,450 \text{ kg/cm}^2$$

この値は一般に許容し得る壓應力に比して著しく大である。焼きを入れて硬化した鋼の壓力試験に於ける比例限度は約 $9,000 \text{ kg/cm}^2$ (彈性限度はこれより稍々

小)である。

所が球と平鋳との間の接觸面中心に於ける三つの主應力は σ_{max} , $0.8\sigma_{max}$, $0.8\sigma_{max}$ であるから、拙著橋梁工學特論第一卷 p. 252 公式 (22) に従つて主變形は

$$\alpha(1-2 \cdot 0.8 \cdot 0.3)\sigma_{max} = 0.52\alpha\sigma_{max}$$

となる。即ち應力 σ_{max} に相當する變形の 0.52 倍である。従つて球の場合の比例限度は $\frac{9,000}{0.52} \cong 17,300 \text{ kg/cm}^2$ に高められる。この比例限度までの應力を許す時、耐え得る荷重は次の如くなる。

$$k = \frac{\pi^3}{6} \frac{0.472^2}{1,000,000^2} (1-0.3^2)(17,300)^3 \cong 5$$

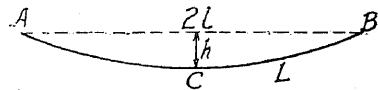
$$P = kd^3 = 5d^3$$

これは實驗から得た値 $50d^3$ より著しく小である。故に球の實驗には比例限度より大なる應力が起り居りたるものと想像し得、従つて許容應力は普通の場合に比し大きく採るのである。

練習問題 5

(1) 針金の弾性係数が其の断面中點にて E_1 にして漸次外皮に於ける E_2 に變化する時許容應力を σ_a としてその耐え得る荷重を求めよ。(答) $P = \frac{F\sigma_a}{3} \left(2 + \frac{E_1}{E_2}\right)$

(2) 長さ $2l$ 、單位長の重さ q なる針金を圖の如く A, B 二點間に吊したるに中央にて h なる撓みを生ぜりと云ふ。針金の變形後の形を拋物線なりと假定して h の値を求めよ。

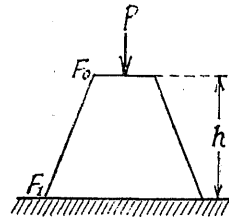


(答) $h^3 = \frac{q^2}{4EF^2} (3l + 4h^2)$

(3) 圖の如く高さ h なる擬磚體に P なる荷重が働いた時自重を無視して h の變化を求めよ。

(答) $\Delta h = \frac{Ph}{E\sqrt{F_0 F_1}}$

(4) (3) に於いて上下面を各々半徑 r 、 R なる圓形とする時最大單位應力の起る 断面の半徑 x を求めよ。但この材質の比重を γ とせよ。(答) $x = \sqrt[3]{\frac{6P(R-r)}{\pi\gamma h}} - 2r$



(5) 長さ $l = 200 \text{ m}$ の鋼線を懸垂しその下端に 6 噸の錘をつけた時其の伸張如何、但し $E = 2.10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、比重 $\gamma = 7.8$ 、鋼線上端の單位張應力 $\sigma = 600 \text{ kg/cm}^2$ とする。

(答) $\Delta l = 5.22 \text{ cm}$

(6) 長さ 4 m 、徑 2 cm の鋼線を大氣溫度以上 30°C に熱しその兩端を攝保したる後大氣中に放置して溫度を低下せしめたるものとする。若し溫度低下に際し此の鋼線の兩端支點が 0.6 mm 引き縮められたりとする時線に作用する張力を求めよ。但膨脹係數は 1°C につき 0.000012 とし且つ $E = 2,100,000 \text{ kg/cm}^2$ とせよ。(答) $1,320 \text{ kg}$

(7) 或る橋梁の可動端に鑄鋼製の單輾承 (Single roller bearing) を用ひんとす。次の値を用ひて輾承 (Roller) の直徑 d を求めよ。

許容抗壓強度 $\sigma_{max} = 7,000 \text{ kg/cm}^2$, ホアソン比 $= \frac{1}{m} = \frac{3}{10}$

弾性係數 $E = 2,200,000 \text{ kg/cm}^2$, 可動端反力 $P = 41,500 \text{ kg}$

輾子の長さ $l = 65 \text{ cm}$

(答) $d = 10.0 \text{ cm}$