

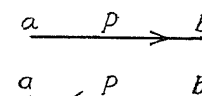
第二章 力及び力率

第一節 平面に於ける力の合成及び分解、力の平衡状態 (Composition and Resolution of Forces in a Plane, Equilibrium of Forces)

〔1〕力の圖示法 (Graphical representation of forces)

本章にては主として幾何學的方法に依る力の合成及び分解に就いて述べようと思ふ。而して此の幾何學的方法を用ひて、物體に働く力の平衡(釣合)に關する條件を見出し、斷面の重心、慣性能率を求め、或は又彈性體の變形を見出すことも出来るのである。

一般に力は其の大きさ、方向、向き、及び位置に依つて決定されるものであるから之を圖示するには直線の長さ、方向、矢、及び位置に依ればよい。Fig. 4 は大きさ、方向等しく、位置、向きを異にする二つの力を示すものであつて、之を記載するにはその兩端文字の順序 ab, ba に依り向きの差異を明かにする事が出来る。

一物體に働く力を圖上に直線の集合を以て表す時、特に之  を力示圖 (Force diagram) と云ふ。

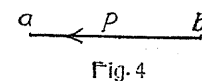


Fig. 4

尙力は kg, ton を以つて示し、力示圖にては之を規約的に定められた縮尺に従ひ、 $mm., cm.$ にて測る。例へば長さ $10 mm.$ が $2000 kg.$ を表すものと規約して置けば $62 mm.$ の長さは $12400 kg.$ を表すことになる。

〔2〕二力の合成 (Composition of two forces)

茲に P_1 及び P_2 の二力が一點 a に働くものとして、その大きさ、方向は直線 ab, ad の長さ及び方向に依つて示されるものとする (Fig. 5 (a))。然る時はこの二力の合力 (Resultant force) R は力の平行四邊形 (Parallelogram of forces) $abcd$ の對角線 ac に依つて與へられる。今 $\angle bad = \theta$ とすれば、

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \theta$$

となる。又二つの力 P_1 及 P_2 をその大きさ及び方向に従つて、 P_2, P_1 (Fig. 5 (b))

或は P_1, P_2 (Fig. 5 (e)) の順序に置く。そしてその力の連鎖の始點 a を終點 c と直線を以つて結ぶ事に

依つて R を求める事が出来る。この三角形 adc 及び abc を力の三角形 (Triangle of forces) と云ふ。この方

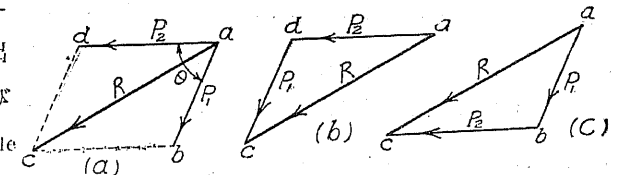


Fig. 5

法を逆に應用すれば、一つの力 R を二つの與へられた方向を有し R と一點 a に於いて交る所の二分力 (Components) P_1 及び P_2 に分解する事が出来る。

〔3〕一點に働く多くの力の合成 (Fig. 6 (a), (b))

(Composition of any number of forces with a common point of application)

一點 a に働く多くの力 P_1, P_2, P_3, P_4 を一つの合力 R に結合しようとするれば、別の圖 (b) に於いて力の三角形 abc に依つて P_1, P_2 の合力 R_{1-2} を求め次に P_3 を R_{1-2} に組み合せて R_{1-3} を得る。かくして最後に P_4 を R_{1-3} に結合して $R_{1-4} = R$ を得る。或は又 P_1, P_2, P_3, P_4 をその大きさ、方向、向きに従つて一つの連鎖 $abcde$ と云ふ様に順次に継ぎ合せ、その始點 a と終點 e とを直線 ae にて結べば同一の結果 R を得る事が出来る。

この際 P を連ねる順序は任意である。何となれば、二つの力 P_1, P_2 の合力を求め

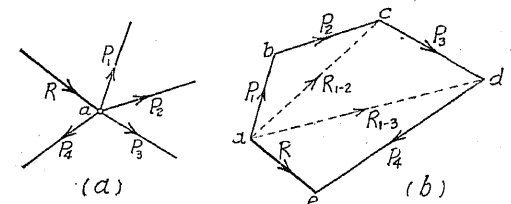


Fig. 6

るに既に述べた様に之を P_2, P_1 の順序に (Fig. 5 (b)), 又は P_1, P_2 の順序に (Fig. 5 (e)) 置くもその結果は同一である。この事を繰返せば力の配列順序は任意である事を知る。

〔4〕一點に働く力の平衡 (Fig. 7)

(Equilibrium of forces with a common point of application)

一點 a に働く力 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 をその大きさ、方向、向きに従つて順次一力を置いてから次の力を置く如く配列する時、一つの閉多角形を得ればその合力

は零である。かゝる場合これらの力はお互に平衡状態にあると云ふ。これを圖式的に見れば Fig. 7 (b) に示す様に力の多角形が閉合し、且つその多角形の邊に沿うて進む時唯一定の方角の矢のみを有し、一つも反對の矢に出會はない時、これらの力は互に平衡をなすと云ふ事が出来る。従つて今力の多角形の何れか一つの力の有する矢の方角を反對にとつて考へるとこれが他の總べての力の合力となるのである。

次にこの力の多角形を任意の方角を有する直線 LL の上に投影し、各々の力 P を LL に平行な方向とそれに直角な方向とに分解して考へて見ると、直線 LL の方向に於ける分力の和は零なる事を知る。此事實は LL に直角な方向に就いても同様であつて、一點に働く多くの力が平衡状態にある爲には任意の方角、及びそれと直角な方向に於ける分力の和が各々零となる事を要すると云ふ事も出来るのである。

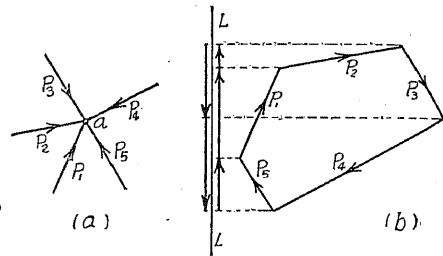


Fig. 7

(5) 異なる點に働く力の合成 (Fig. 8) (Composition of forces with any point of application)

異なる働點を有する力 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_5$ の合力を求むるには、先づその内の任意の二つ例へば P_1 と P_2 の二力の交點 A がその共通の作用點となる様に夫等の力を移動せしめ、その合成力 R_{1-2} を求める。同様に R_{1-2} と P_3 とを合せて R_{1-3} を求める。順次かくの如くして遂に最後の合成力 R を見出す事が出来る。しかし此の場合の作圖に於いて中間の合成力の大きさ、方向を知るには Fig. 8 (b) に示す様に別に力示圖を畫くを便とする。即ち、 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 を順次に連接して $abcdef$ を得れば、

$$\overline{ac} = R_{1-2} ; \quad \overline{ad} = R_{1-3} ; \quad \overline{ae} = R_{1-4} ; \quad \overline{af} = R_{1-5} = R$$

となる。此の (b) 圖に於いて見出された合成力 R_{1-2} 、即ち \overline{ac} の方向に平行に P_1, P_2 の交點 A を通して平行線を描き、其の線が P_3 と B に於いて交

るものとすれば、其の B から R_{1-3} 即ち \overline{ad} に平行線を描き P_4 と C に於いて交らしめる。次に C を通して R_{1-4} 即ち \overline{ae} に平行線をひき P_5 と D に於いて出會ふものとする、この D より \overline{af} に平行にひかれた線 DE は最後の合成力 R の方向を示すものであつてその大きさは (b) 圖の \overline{af} に依つて示される。(a) 圖の多角形 $ABCDE$ を P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 に對する合力多角形 (Resultant force polygon) と云ふ。この際與へられた力を互に結び合はす順序は任意であるから

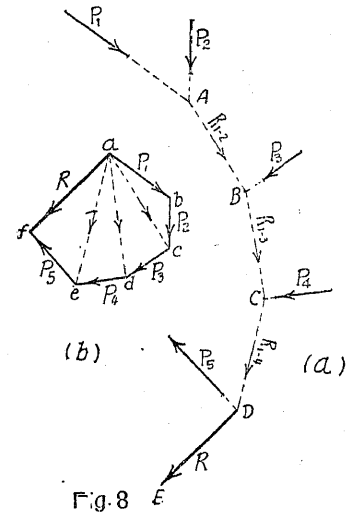


Fig. 8

色々の合力多角形を作る事が出来るがその最後の線 DE 即ち R の位置は同一である。この證明としては二つの力 P_n と P_{n+1} との順序を變へても R の位置に影響がない事を云へばよい。何故ならばこの事を繰り返す事によつて一つの順序より他の任意の順序に變へる事が出来るからである。

今 Fig. 9 に於いて力 P_1 から P_{n-1} までの合力を R' とする時、まづ R' と P_n とを合せて Q' とし、次にそれを P_{n+1} と合せて R'' とするならば合力多角形として ABE を得べく且つ AB は de に平行となる。又初めに R' を P_{n+1}' に合せて Q'' とし、次に之を P_n と合せて R'' を求めようと思ふ時は、まづ R の作用線が P_{n+1} と C に於いて交るまで延長し、 C から Q'' に平行線を引く、そして P_n との交點 D から R'' に平行線を引くとよい。而してこの二つの組合せの順序に對し R'' の位置、即ち B 及び D 點より R'' に平行にひかれた線が重なる事を必要とする。然るに $AB \parallel de, BC \parallel be, CD \parallel ba, DA \parallel da, AC \parallel ac$, 依つて $DB \parallel db$ 故に B 及び D から \overline{db} 即ち R'' に平行に引かれたる線は合致する。故に R'' の位置は力を合成する順序に無關係である事を知る。

次に若し合成すべき力が甚だ鋭角にて交るか、或はその交點が用紙の外に落ちる様な場合には以上述べた方法による事は不適當であつて、特に總べての力が平

行であると上述の方法は全然用ひる事が出来なくなる。かゝる場合には次に説明する一般的解法によらなければならぬ。その説明としてまづ次の問題に就いて述べる。

一點に交る事なく、又互に平行であり得る所の力 P_1, P_2, P_3, P_4 を與へ、それ等と平衡を保つべき力 R の大き及び位置を求める。この問題を解く爲にまづ、Fig. 10 (b) に示す様に力 P_1, P_2, P_3, P_4 を以つて一つの力示圖 $abcde$ を作る。然らばその結合線 \overline{aa} は與へられた力と平衡を保つべき力 R の大き、方向及び向きを與へる。次に R の位置を求める爲に、Fig. 10 (a) に於いて力 P_1 はその作用線上の一點 A に於て交る所の二力

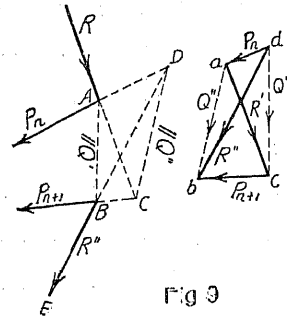
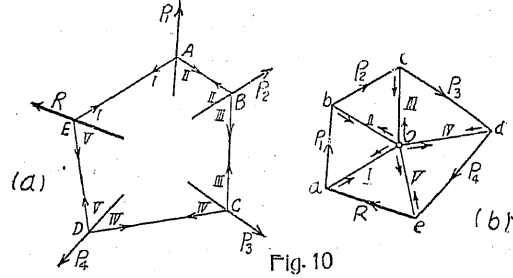


Fig. 9

Fig. 10

I, II と平衡を保つものとする。この際 I, II の方向は任意に選び得るのであつて、その大きさは Fig. 10 (b) に於ける示力圖に於いて假定せられた I 及び II の方向に平行に ao 、及び bo を引く事に依つて定められる。又その向きは力の三角形 abO に於いて P_1 の向きに従つて廻る時採る向きによつて與へられる。従つて要するに $I = \overline{oa}$ 、 $II = \overline{ob}$ となる。次に力 II と P_2 との交點 B に於いては、 II と反對の符號を有し同じ大きの力と、 \overline{ob} に依つて示される力 III と P_2 とが互に平衡状態にある。同様にして C 點、 D 點に於いて各々三力が平衡状態にある。最後に I と V との交點 E に於いてはそれ等の方向を各々反對にすると $R = \overline{ea}$ と平衡を保つ様になる。以上を要するに、點 A, B, C, D, E に於いて夫々三つの力が平衡を保つ様に作用し、その内 I, II, III, IV, V は互に消し合ふが故に結局 R, P_1, P_2, P_3, P_4 の間に平衡が成立する事になる。多角形 $ABCDEA$ は力 P_1, P_2, P_3, P_4 及び R が働く索線の合力線と考へる事が出来るのであつ

て、その邊が應力(張力) I, II, III, IV, V を表す。従つてこの $ABCDEA$ を索多角形(Funicular polygon; Equilibrium polygon) と稱す。若し Fig. 10 (a) に於いて P_1, P_2, P_3, P_4, R がすべて反對の方向をとるならば、索多角形の邊には壓力を生ず。従つてその索線の代りに壓力に耐え得る鏝にて作られた多角形を想像すべきである。Fig. 10 (b) の角示圖に於いて線 Oa, Ob, Oc, \dots を極線(Polar rays) と稱し、點 O を極點(Pole) と云ふ。又極點から任意の一邊への垂直距離を極距(Pole distance) と云ふ。今之等の術語を用ひて R を求める方法を要約して述べると次の様である。

力 R の大き及び方向を與ふべき力示圖 $abcde$ を畫き、次に任意の極點 O を選びて極線 I, II, III, \dots を引き、力 P_1 の任意の一點 A を通してその邊を各々極線に平行に引きて索多角形を畫く。而して索多角形の始めと終りの邊の交點を通して力 R が働く。この始めと終りの邊を力群に對する外端の邊(端邊)と云ふ。たとへば II と IV とは力群 P_2, P_3 に對する外端の邊である。若し力 P_1, P_2, P_3, P_4 の合力を求むべき問題であるならば今求めた平衡力 R の向きを唯變へさへすればよい。

尙 Fig. 8 に於ける合力多角形 $ABCDE$ は矢張り一つの索多角形であつて唯その極點が力示圖 $abcdef$ の始點 a と一致するのみである。この場合他の角點をも極點に選ぶ事が出来るのであつて、極點から引かれた極線は力示圖の邊であるか、若しくはその間に挟まれた力の合力を表すものである。

〔6〕 力示圖に於ける異なる極に對して作られた二つの索多角形間の關係

Fig. 11 (b) に於いて極點 O と O' との二つを採り、極點 O に關する極線を I, II, III, \dots とし、極點 O' に關する極線を I', II', III', \dots とする。而して此の二種の極線に各相當した索多角形 I, II, III, IV, \dots 及び $I', II', III', IV', \dots$ に於いて、 I と I', II と II', III と III', \dots を互に交らせると是等の交點は一直線上にあり、且此の直線は二つの極點 O 及び O' を結んだ直線 OO' に平行である。

何故ならば茲に二つの四邊形 $ABOO'$ 及び $abcd$ を比較するに相當する五邊

は互に平行である。即ち $ab \parallel AO'$, $bc \parallel BO$, $ac \parallel AO$ 及び $db \parallel O'B$ 従つて $ab \parallel OO'$ である。同様に $bc \parallel OO'$, 及び $ix \parallel OO'$ となる事を證明する事が出来る。従つて $iabe$ は OO' に平行な直線上にある。

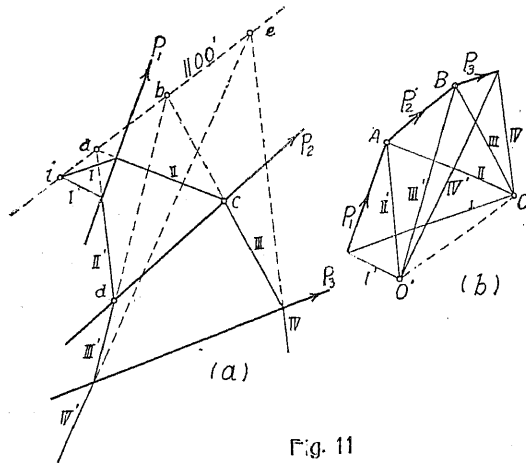


Fig. 11

尙此の問題は次の様にしても證明する事が出来る。即ち Fig. 11 (b) から四つの力 \overline{OA} , \overline{AO} , \overline{OB} , \overline{BO} は平衡状態にあるのであるがその内の二つの力 \overline{OA} と \overline{AO} の合力は \overline{OO} であり \overline{OB} , \overline{BO} の合力は \overline{OO} であるから此の兩者は大さ方向相等しく唯向きが反対であるに過ぎない、此の事實より今 Fig. 11 (a) に就いて考へるに \overline{OA} , \overline{AO} の合力は索多角形の邊 II と I' の交点 a を通り、又 \overline{OB} , \overline{BO} の合力は索多角形の邊 III と III' の交点 b を通りて共に OO' に平行であつて且互に消し合はねばならない。この事は $ab \parallel OO'$ であつて始めて成立することであるが故に $ab \parallel OO'$ であると云ふ事が出来る。同様に $ix \parallel OO'$, $bc \parallel OO'$ なる事を證明する事が出来る。

(7) 偶力即ち無限距離に作用する無限小の力 (Couple-Infinitely far and infinitely small force as a resultant of finite forces)

Fig. 12 (a) に其の位置の示された様な四つの力 P_1, P_2, P_3 , 及び P_4 に對し畫かれた力示圖が Fig. 12 (b) の様に閉合したものとす。然る時はこれら四つの力の合力は零である。従つて此の四力は一見平衡を保つ様に見えるのであるが是等の力は一か所に働いてゐる力ではないのであるから平衡を満すものであると斷言は出来ない。従つて極点 O に相當して畫かれた索多角形 $ABCD$ は何時

でも閉合するとは限らないのである。今点 $ABCD$ に於いて索多角形の邊力を考へるならば、是等の各點に働く三つの力は各々力示圖に於いて三角形をなすから互に平衡を保つ。而してこの内 II, III, IV は等しき力が反對にして而も同一直線上に働く故に互に打消さるべきも、I のみは量は等しいけれども同一直線上に作用しないから打消されずに残る。従つて P_1, P_2, P_3, P_4 の四つの力はそれ自身の他に更に二つの I と云ふ力が加はつて始めて平衡が保たれることを知る。而して此の二つの I なる力は平行であるが故に同一平面上無限距離に於いて交り、その合力は無限小と考へられる。即ち茲に P_1, P_2, P_3, P_4 の合力として無限距離に於いて交る無限小の力を得る事となる。而して此の Fig. 12 (a) に於ける I, I なる力は等しくして反對の方向に向ふが故に偶力を構成すべく、その相互の距離 h を偶力の挺率(Lever arm)

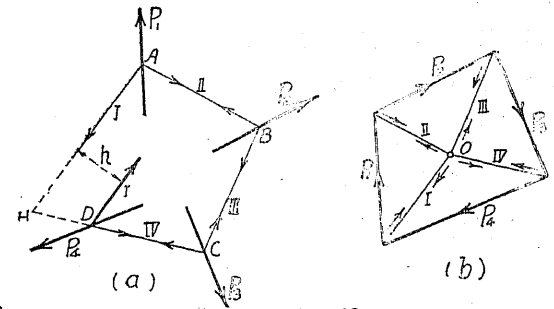


Fig. 12

と稱し、力と挺率の積 $M = Ih$ を偶力の力率(Moment) と云ふ。この力率の値は極点の位置に無關係であつて常に同一であるが故にこの力率を以て偶力即ち無限大距離にある無限小の力を測る尺度とする。尙力率が上述の如く極点の位置に無關係である事を證明すれば次の様である。Fig.

13 に於いて O' を別の新しい極点とする。而して極点 O 及び O' に相當する索多角形の最初の邊 I 及び I' の交点 E と最終の邊 I 及び I' の交点 F とは共に二つの極点を結ぶ直線 OO' に平行なる線上にある。従つて新しい索多角形の第一の邊 I' の位置が與へられると最終の邊 I'

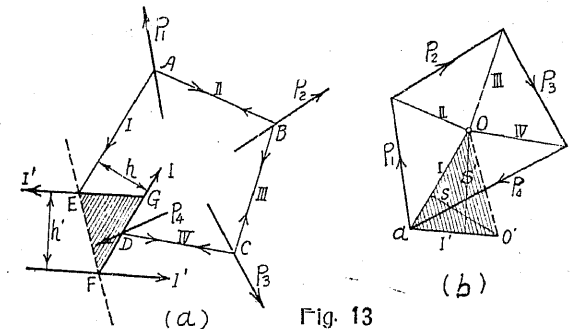


Fig. 13

の位置が定まる。その挺率を k' とすると偶力 (I, I') の力率 $M = I'h$ が求められる。次に第一の邊 I' を延長して最後の邊 I と G 點に於て交はらしむる時は三角形 $\alpha OO'$ と相似なる所の三角形 GFE を得る。三角形 $\alpha OO'$ に於いて頂點 O' 及び O から相對する邊 I, I' へ下した垂直線の長さを s 及び s' とすると、

$$\frac{h}{k'} = \frac{s}{s'}$$

であつて且つ 面積 $2 \times \Delta \alpha OO' = I \cdot s = I' \cdot s'$

従つて $\frac{h}{k'} = \frac{I'}{I} \therefore M = k'I'$

依つて極點の位置に無關係なる事を證明する事が出来たわけである。

Fig 13 (a) に於いて二つの力 I' の方向を反對にする時は偶力 (I, I') と平衡を保つ偶力 (I', I) を得るのであつて兩者の力率は互に反對の方向に向ふ。

〔8〕 平衡條件

Fig. 12 (a) に於いて力 P_4 を大き及び方向、向きはその儘とし唯位置だけを平行に移動せしめて索多角形の邊 I と IV との交點 H に働くものとする。然る時は索多角形は閉合し、二力 I 及び I' は一致し互に打消すを以つて、四力 P_1, P_2, P_3, P_4 は別に他の力を加へないのでそれ自身にて互に平衡にある事を知る。即ち極點の位置に無關係である所の力率 $I \cdot h$ は P_4 の移動に依り零となり、同時に四力の平衡を保つ爲に必要であつた所の無限大距離にある無限小の力が消失したのである。従つて平面上に散在する力群の平衡に對しては是等の力が閉合力示圖を作ると同時に閉合索多角形を作る事、即ち如何なる意味に於いても合力を有せざる事が必要にして充分な條件であつて、之を解析的に表せば

$$\sum H = 0, \quad \sum V = 0, \quad \sum M = 0$$

となる。この内最初の二式は〔4〕にて述べた所と一致し任意の方向への合力の和の零なる事、即ち閉合力示圖を作るべき事を示し最後の式は力率の和の零なる事、即ち閉合索多角形を得べき事を示してゐる。

〔9〕 平行力の合成及び平面圖形の重心を求める方法

平行力 P_1, P_2, P_3, P_4 の合力を求める場合に索多角形の方法を應用すれば特に便利である。此の場合凡べての力が平行であるから Fig. 14 (a) に示す様に力

示圖は一直線となる。

今極點として任意に O を選び、これに對して Fig. 14 (b) の如く索多角形を畫き、其の兩端の邊 I, IV の交點を s とすると合力 R は s を通りて P に平行に働くのであつてその大き

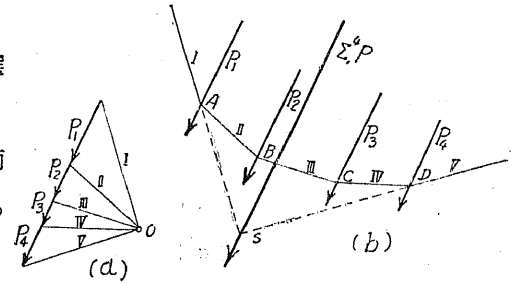


Fig. 14

は $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \sum P_n$

に依つて與へられる。

此の方法は又平面圖形の重心を求める方法に應用出来るのであつて、例へば Fig. 15 の如き場合には之を三つの矩形 F_1, F_2, F_3 に分ち、その各面積を夫々の重心に作用し AB に平行な方向の力と考へ

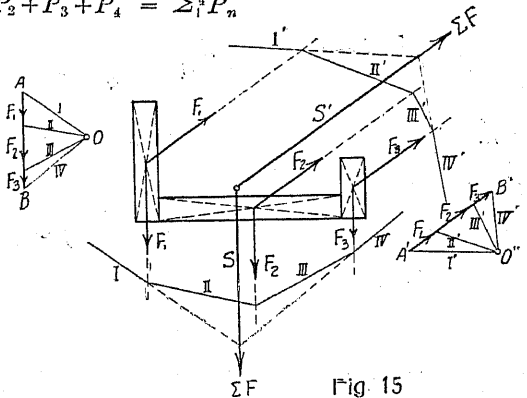


Fig. 15

て ΣF 即ち合力の働く位置 S を求める。更に又他の方向 $A'B'$ に平行な力と考へて合力の働く位置 S' を求める。然らば S, S' の交點が求むる重心となる。この場合 AB 及び $A'B'$ の方向は任意であるから、なるべく S, S' の交點が明瞭に求められる様な二方向をとればよい。尙 Fig. 15 に於いて力示圖を畫くに際し矩形の面積 F_1, F_2, F_3 を直線にて表す。従つてこの場合底又は高さの何れか一方を單位の長さ即ち 1 なる如くし且つ同一面積を有する矩形に變形すればその高さ又は底をはかりて力示圖を簡単に畫く事を得。例へば Fig. 16 に於いて矩形 $ABCD$ を單位の長さ DE を有する矩形に變形するには、まづ CE を結び次に $AG \parallel CE$ とする。然らば DG は新しい矩形の第二邊となる。何故ならば

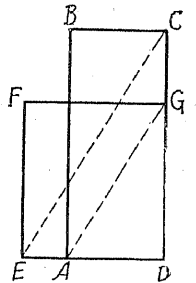


Fig. 16

$$ED : CD = AD : GD$$

$$\therefore ED \cdot GD = CD \cdot AD$$

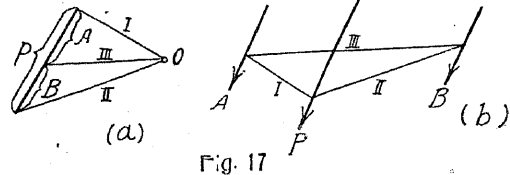
次に曲線に界せられた平面圖形の重心を求めるには之をなるべく梯形、矩形、又は三角形と看做される様な面條に細分して上述の方法を適用すればよい。

(10) 力の分解 (Decomposition of forces in a plane)

一つの力 $R = \vec{ac}$ を一點 a に於いてその R に出會ふ様な方向の與へられた

二力に分解する事は既に Fig. 5

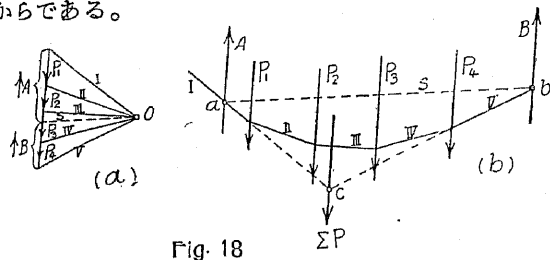
(a) に示した所であつて力の平行四邊形又は三角形の方法を用ひて容易に解き得たのである。



今一つの力 R をそれと平行である位置の與へられた二力に分つ方法を説明しよう。

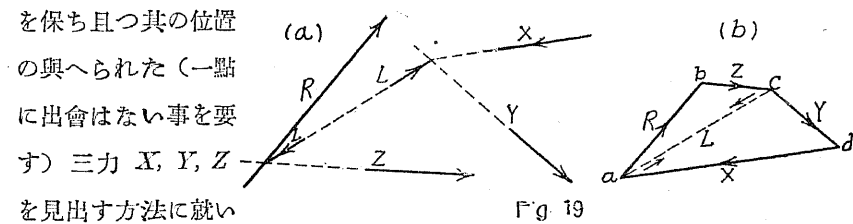
その爲には Fig. 17 (b) に示す様に P 及び分力の作用線 A, B を任意の索多角形にて結合しその邊を I, II, III とする。次に Fig. 17 (a) に示す様に力 P の兩端から I 及び II に平行線を引きその交點を O とする。すると此の O 點は索多角形の極點に當るのであつて、極點 O を通して索多角形邊 III に平行な線を引き力線 P との交點を求めると P なる力を所要の二力 A, B に分解することになる。この證明は極點 O に相當したる索多角形に依つて A, B を合成する作圖を照合すれば明らかである。何故ならば $A+B$ は量に於いてたしかに P であり、而も A, B の索多角形の外側の邊 I 及び II の交點を P が通るが故に P は A, B の合力であるからである。

次に此の方法を應用して多くの平行力 P_1, P_2, \dots と平衡を保つべき位置の與へられた平行二分力 A, B を求める事が出来る。



今 Fig. 18 に於いて P を並べて力示圖を作り任意に選ばれた極點 O に相當したる索多角形 (b) を畫く。そしてその外側の邊 I 及び V が夫々 A 及び B の作用

線と a 及び b に於いて交るものとする。次に a 及び b を結ぶ事に依つて索多角形を閉合し、又 (a) 圖に於いて極點 O から此の求めた閉合線 s に平行線を引く。然らばこの平行線は合力 $R = \sum P$ を分力 A 及び B に分つのであつて上の部分が力 A である。何とならば a 點に働く三力、即ち A 及び索多角形邊力 I 及び s は力示圖に於いて一つの三角形を作るが故に互に平衡状態にあることを示し、同様に B は b 點に於いて索多角形邊力 V 及び s と交り平衡状態にあると云ふ事を示すが故である。更に一步を進めて與へられた一力 R と平衡を保ち且つ其の位置



の與へられた(一點に出會はない事を要す) 三力 X, Y, Z を見出す方法に就いて説明を與へる。其の爲にはまづ四力 R, X, Y, Z の中任意の二力宛を互に交らせる。例へば Fig. 19 に於いて R と Z, X と Y との交點を求め、次にそれ等の交點を結ぶ線の方に等量にして反對に向ふ力 L を探つて考へる。而してまづ第一に與へられた力 R と平衡を保ち且つ點 (RZ) に働く様な二つの力 L, Z を求める。その爲には Fig. 17 (b) の様に一つの閉合三角形 $abca$ を作ると L, R を求める事が出来る。次に同様にして (XY) 點に於いて今見出された L と平衡を保ち且つ與へられた二方向を有する X 及び Y を定める。かくの如くすれば結局に於いて L は互に打ち消し合ふが故に一つの力 R と平衡を保ち且つ位置の與へられた三力 X, Y, Z が求められた事になる。若し問題が與へられた力 R を方向、位置が與へられ而も一點に交らない三分力 X, Y, Z に分解すると云ふのであつたならば上に見出した X, Y, Z の符號を反對にすればよい。

尙一つの力を同一平面内にある四つ又は四つ以上の分力に分解することは不定 (Indeterminate) であり、又三分力に分つにしても是等が一點に會する場合には解答は不定となる。

第二節 静力率 (Static moment)

(1) 定義

一點或は廻轉軸 C に関する力 P の静力率とは P と C から P への垂直距離 e との積を意味するのであつて、この静力率を M とすれば $M = P \cdot e$ となる。

従つて Fig 20 に示す様に幾何學的には静力率は力 P を底とし其の中心 C を頂點とする三角形 ABC の面積の二倍に相當する。而して此の力率の符號は力 P の方向に依つて自ら定まるのであつて、例へば Fig 20 に於ける力 P と P' との力率は其の方向に於いて相反する。何故ならば P の C に関する力率 $M = P \cdot e$ は右廻り (時計の針の方向) であつて普通之れを正號力率とする。之れに反して P' の C に関する力率 $M' = P' \cdot e'$ は左廻り (時計の針と反對の方向) であるから之れを負號力率とするのである。

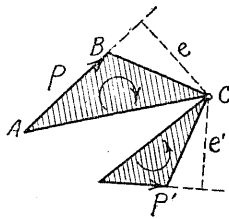


Fig. 20

(2) 定理

一平面上にある力群の同一面上にある一點に關する力率の和はそれ等の力の合力の同一點に關する力率に等しい。

この定理を證明する爲にまづ二力 P_1 及び P_2 の場合を考ふ、(Fig. 21)。此の二力の合力を R とし、力率の中心を C とする。今此の二力の交點 A を中心 C に結び AC に直角に CF を引き、この

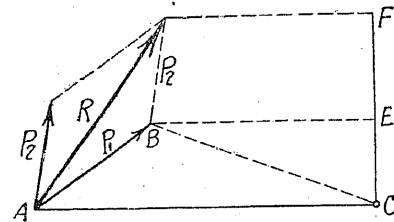


Fig. 21

CF 線へ P_1, P_2 , 及び R を投影したものとすれば、圖に於いて

$$\overline{CE} = P_1 \text{ の投影} = P_1', \quad \overline{EF} = P_2 \text{ の投影} = P_2',$$

$$\overline{CF} = R \text{ の投影} = R';$$

従つて、力 P_1 の C に関する力率 $M_1 = 2 \cdot \triangle ABC = \overline{AC} \cdot P_1'$,

同様に、力 P_2 の C に関する力率 $M_2 = \overline{AC} \cdot P_2'$,

力 R の C に関する力率 $M = \overline{AC} \cdot R'$.

然るに圖より明らかなる如く $R' = P_1' + P_2'$ であるから、たしかに

$$M = M_1 + M_2$$

となる。次にこの定理を Fig. 22 に示す様な一平面上に散在する力 P_1, P_2, P_3, P_4 に就いて證明するには、先づ索多角形によつてそれらの力に對する合力 R を求め、次に索多角形の各邊に於いて互に打消し合ふ二つの力を考へる。今 Fig. 22 に於いて I, I'; II, II'; III, III'; ... を以つて之を表すならば、 A 點に於いて力 II, I', 及び P_1 が互に平衡を保つてゐるから、力 II と反對の方向を持つ力 I' は力 I' 及び P_1 の合力である。従つて其の力率は力 I' 及び P_1 の力率の和に等しい。

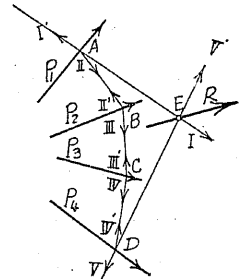


Fig 22

即ち $M_{II'} = M_{I'} + M_{P_1}$.

同様に、 $M_{III'} = M_{II'} + M_{P_2}$

$$M_{IV'} = M_{III'} + M_{P_3}$$

$$M_{V'} = M_{IV'} + M_{P_4}$$

$$= M_{I'} + M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4}$$

又 R は力 V' 及び I の合力であるから

$$M_R = M_I + M_{V'}$$

従つて、 $M_R = M_I + M_{I'} + M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4}$

ところが上式中 M_I と $M_{I'}$ とは互に消し合ふから

$$M_R = M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + M_{P_4}$$

となる。同様にして如何程多くの力に對しても以上の定理を簡単に證明する事が出来る。

(3) 平面上に散在する力の静力率

與へられた四面力 P_1, P_2, P_3 , 及び P_4 の原點 C に關する力率を求めるにはまづ Fig. 23 に示す様にして此の四力の合力を求めなければならぬ。即ち (b) 圖の力の多角形に依り合力 R の大き及び方向を知る。次にその合力の作用する

位置は、任意の極点 O を選んで (a) 圖の如く索多角形を畫きその端邊の交点 E を求める事に依つて與へられる。斯くして R の位置、方向が求められたならば原点 C からの垂直距離 r が容易に求められる。従つて原点 C に對する合力の力率は $M = R \cdot r$ となる。

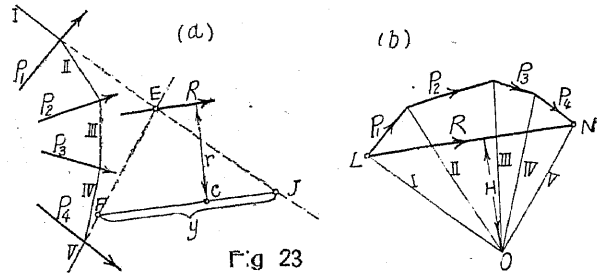


Fig 23

此の値は計算に依りても、又は $M = \frac{R \cdot r}{I}$ 即ち $M : R = r : 1$ なる關係より圖式的にも容易に求める事が出来る。然し此の力率の値は次の様にして求める方が一層便利である。即ち Fig 23 に於いて與へられた原点 C を通して合力 R に平行線を引き、これが索多角形の端邊 I 及び V の間に挟まれた長さ $\overline{FJ} = y$ とする。すると $\triangle EFJ$ と $\triangle ONL$ はその各邊が互に平行であるから相似である。従つて

$$r : y = H : R$$

$$\therefore H \cdot y = R \cdot r \quad \therefore M = H \cdot y,$$

茲に H は合力 R の極距を表す。

以上を要するに一平面内にある多くの力の静力率は、合力 R の極距と原点 C を通して R に平行に引かれた直線が索多角形の端邊に依つて切りとられる部分の長さとの積に等しいと云ふ事が出来る。

力率の符號は圖上に於いて廻轉の方向から知る事が出来るのであつて、たとへば Fig. 23 (a) に於ける R の力率は右廻りで正號である。 C が R に近ければそれだけ y は小さく従つて M は小となる。 C が R と一致すれば $y = 0$ となり従つて力率は零となる。更に進んで C が R の上方にあれば y は負號となり力率 M は負號となる。

次に極点 O はその位置を任意に選び得るを以つて極距 H を初めからある整数に採り置く事が出来る。従つて若し初めに $H = 1$ と置いて作圖を行つたな

らば力率 $M = y$ となり y 自身が力率を與へる事になる。

尙注意すべきは $R \cdot r$ にて力率を計算する場合に R は力の單位即ち kg にて測り、 r は長さの單位即ち cm 、 m にて測らなければならないが、 $H \cdot y$ なる式にて力率を求める場合には H 及び y の中何れか一力を力の單位にて他を長さの單位にて測ればよいのであつて以下特に注意せざる限り H を力の單位にて測る事にする。

〔4〕 同一平面内にある平行力の静力率

前に述べた所の力率を $H \cdot y$ にて表す方法は平行力の力率を求める際極めて便利である。たとへば Fig. 24 に於いて平行力 A, P_1, P_2 の点 C に関する力率を求めるには先づ力 A, P_1 及び P_2 を連結して力示圖を作り、次に極距 H を有する極点 O を採り各力の端へ極線 s, I, II, III を引く。此の中極線 s は力示圖の始點に、又極線 III はその終點に引かれたるものとする。是等の極線に平行に引いて作つた索多角形に於いて邊 s 及び II は其の兩端邊となり、 R に平行に C を通じて引いた直線が此の兩端邊間に挟まれた長さを y とすると求める力率 M は H と y の積に依つて與へられる。茲に $A > P_1 + P_2$ 従つて $R = A - P_1 - P_2$ は A と同様に上向きであつて、而も R の作用點は III 及び s の交點であるから C の左側にある。従つて力率 $M = H \cdot y$ の符號は正號である。

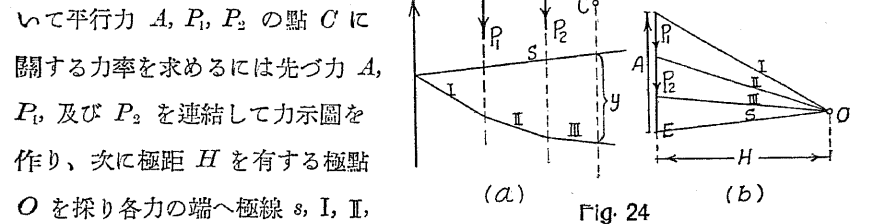


Fig. 24

次に此の解法を應用して $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ の如き平行力が與へられた場合合是等全體の力の或る原点 C に関する力率及び其の内の或る力、例へば P_1, P_2 、及び P_3 の他の原点 C' に関する力率を同一の圖上に求める事が出来る。先づ Fig. 25 (b) の如く與へられた力 P_1, P_2, \dots, P_n を其の順序に連ね、任意の極距 H を以つて第一極線 I が力の方向に直角となる様に極点 O を採る。而して其の極線に平行に索多角形を畫き、其の第一邊 I を延長する。次に與へられ

た力率中心 C を通して合力 $R = \sum P$ に平行な直線を引き、これが索多角形の両端邊 I 及び VII の間に挟まれた長さを y とする。然る時は P_1, P_2, \dots, P_6 なる全部の力の C 點に關する力率は

$$M_c = -H \cdot y$$

である。負號を採つたのは R なる力が下向きで而も C 點の左方に働き左廻りの力率となるからである。

同様にして點 C' に關する力 P_1, P_2 , 及び P_3 の力率は

$$M_{c'} = -H \cdot y_1$$

何故ならば力 P_1, P_2 及び P_3 に關する索多角形の兩端邊は I と IV とであるからである。上述の結果を要約すれば次の

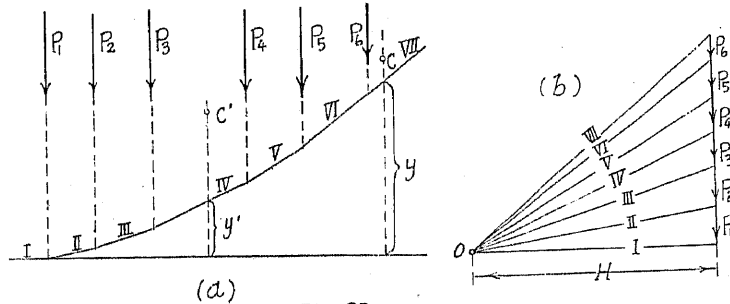


Fig. 25

如く云ふ事が出来る。

平行力に對する索多角形に於いて第一邊を力の方向に直角に作り之を横軸とする時の其の多角形に作つて生ずる縦距は其の縦距線上に存する原點に關する其の縦距より左にある力の力率に比例する

第三節 空間にある力の合成 (Composition of Forces in a Space)

〔1〕 平行力の静力率及び合力

Fig. 26 に於いて點 A_1, A_2, A_3, \dots を平行力 P_1, P_2, P_3, \dots とそれ等の方向に直角なる平面 E (圖に於いては紙の面がこの平面に相當する) との交點とし、平面 E 上に於いて任意の角をなす座標軸に關する點 A_m の座標を (x_m, y_m) と

する。然る時 $P_m \cdot x_m$ 及び $P_m \cdot y_m$ を座標軸 y 及び x に關する P_m の静力率 (Statical moment) と云ふ。而して與へられた力 P_1, P_2, P_3, \dots の合力 $R = \sum P$ が平面 E を切る點 S の座標を (ξ, η) とすると

$$(1) \quad R \cdot \eta = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \dots = \sum P \cdot y$$

$$(2) \quad R \cdot \xi = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots = \sum P \cdot x$$

なる事を證明する事が出来る。即ち任意軸に關する合力 R の静力率は各力 P の同一軸に關する静力率の和に等し

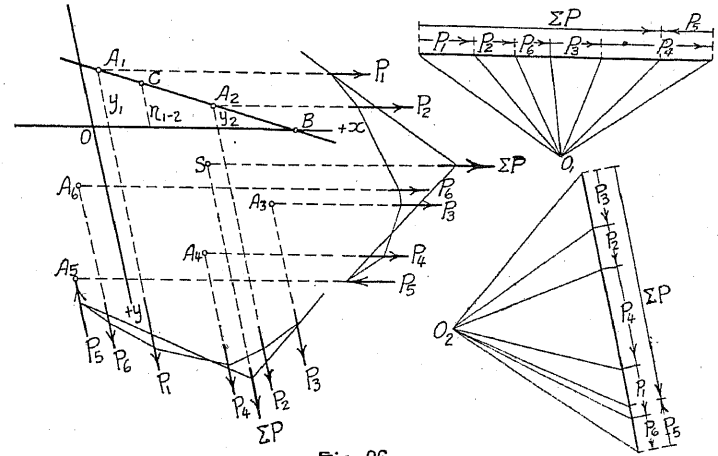


Fig. 26

と云ふ事が出来る。此の證明は容易に次の如く行はれる、即ち先づ任意の二力 P_1 及び P_2 を含む平面 E' を考へこの二力を合成して C 點に働く R_{1-2} を得たものとする。次に平面 E' と x 軸の交點を B とすれば前節説明した所に従つて R_{1-2} の B に關する力率は勿論同點に關する力 P_1 及び P_2 の力率の和に等しきが故に、

$$R_{1-2} \cdot \overline{CB} = P_1 \cdot \overline{AB} + P_2 \cdot \overline{A_2B}$$

今 C 點の縦距を圖の如く η_{1-2} とすれば

$$\eta_{1-2} : y_1 : y_2 = \overline{CB} : \overline{AB} : \overline{A_2B}$$

故に $R_{1-2} \cdot \eta_{1-2} = P_1 y_1 + P_2 y_2$

次に今求めた R_{1-2} と P_3 なる力を含む平面に就いてこの二力を合成すれば R_{1-3} を得べく、更に R_{1-3} と P_4 とを合成して P_{1-4} を得。順次斯くの如く進めば次の關係を得る。

$$R_{1-3} \cdot \eta_{1-3} = R_{1-2} \cdot \eta_{1-2} + P_3 y_3 = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3$$

$$R_{1-4} \cdot \eta_{1-4} = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4$$

斯くして結局公式(1)の関係を得る。全く同様にして公式(2)を得る。

尙公式(1)(2)を用ひると點Sの座標を知る事が出来る。

$$(3) \quad \eta = \frac{\sum P y}{\sum P} \quad \xi = \frac{\sum P x}{\sum P}$$

次に點Sの位置を圖式的に求めるには力Pを平面Eの上に作用するものと考へ、始めにx軸に平行に次にy軸に平行に働くものとする。

そしてその各々に就いて多角形の方法に依つて合力 $\sum P$ の働く位置を求めるならば其の交點Sが求める合力RのE平面に於ける作用點となる。此の作圖に於いて注意すべきは力示圖を畫く際に於けるPの符號であつて、正號のPは軸の正の方向に向はしめなければならない。例へば Fig. 26 に於いて平面Eを水平と考へ重力の方向に働く力を正號とするならば、下から上方に向ふ P_5 のみは(-x)及び(-y)の方向に置かなければならない。

〔2〕空間に於いて任意の方向を有する力の合成

空間に於いて任意の方向を有し散在する力を合成するには、先づ各々の力と任意に選ばれた平面Eとの交點Aを求める。次に力Pをその作用線上に於いて點Aまで移し、その點に於いて面E上の分力とそれに直角である分力とに分解する。而して面Eに直角である分力を前項〔1〕に示す方法に依つて合成しその合力をNとする。又面E上にある力を前節に述べた方法に依つて合成し合力をQとする。NとQとが交れば直にその合力Rに合成する事が来るが、交らない場合にはそれ以上合成する事は出来ない。尙この場合平面Eの位置は任意に選ぶ事が出来るから、與へられた多くの力を無数の方法に依つて二つの力にて置きかへる事が出来る。

今若し Fig. 27 に示す様に與へられた力Pが平面Eに平行であるか、又はそれに近き場合には上に述べた方法は用ひる事が出来ない。此の場合にはPと交り面Eに直角にして互

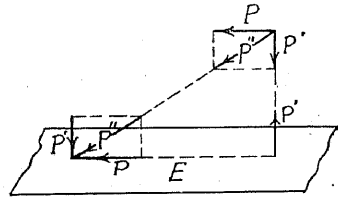


Fig. 27

に消し合ふ二つの力P'を挿入して考へる。そしてPを一つのP'と合せてP''

とし、P''を面Eまで移して交らしめ、其の點に於いてP及びFに分解するかくして一つの力を三つの力にて置き代へる事が出来るのである。

練習問題 2

(1) P_1, P_2, P_3, P_4 , 及び P_5 の五力が夫々圖の如く A, B, C, D, 及び E 點に働く時これ等の力の合力 R を求む。

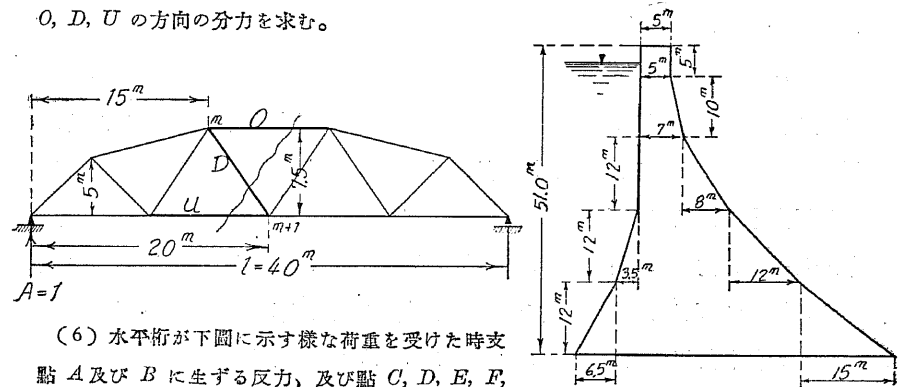
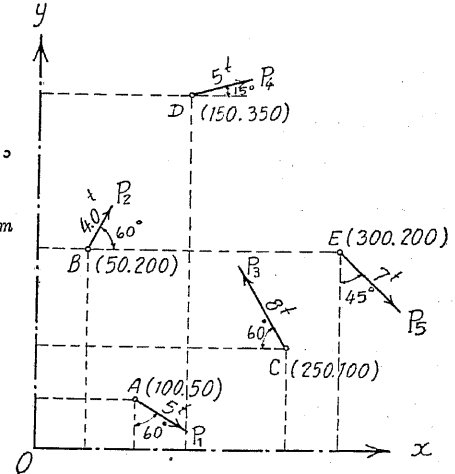
縮尺：力：- 1cm = 1ton
距離：- 1cm = 20cm

(2) 三角形 ABC と同面積を有し高さ 2m なる三角形の底長を求む。

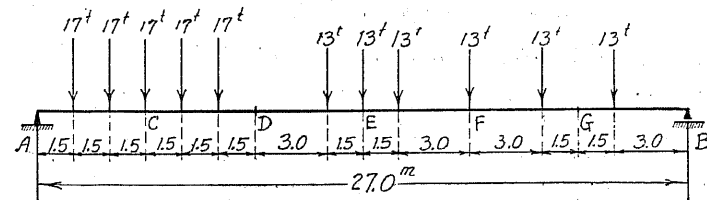
(3) 梯形 ABCD の重心の底邊よりの距離を求む。

(4) 下圖に示す堰堤断面の重心を圖式的に求む。

(5) 下圖に於いて $A = 1$ と平衡を保つべき O, D, U の方向の分力を求む。



(6) 水平桁が下圖に示す様な荷重を受けた時支點 A 及び B に生ずる反力、及び點 C, D, E, F, 及び G に於ける力率を圖式にて求め、且つ計算によりその結果を検せよ。



第四節 平行力の高次力率

〔1〕 Culmann 解法

Fig. 28 に於いて P_1, P_2, P_3, \dots を同一平面 (E) 上に作用する平行力とし、其の平面内にある平行軸 LL より一定方向に測られた距離を x_1, x_2, x_3, \dots とする時、

$$P_1 \cdot x_1^n + P_2 \cdot x_2^n + P_3 \cdot x_3^n + \dots = \sum P \cdot x^n$$

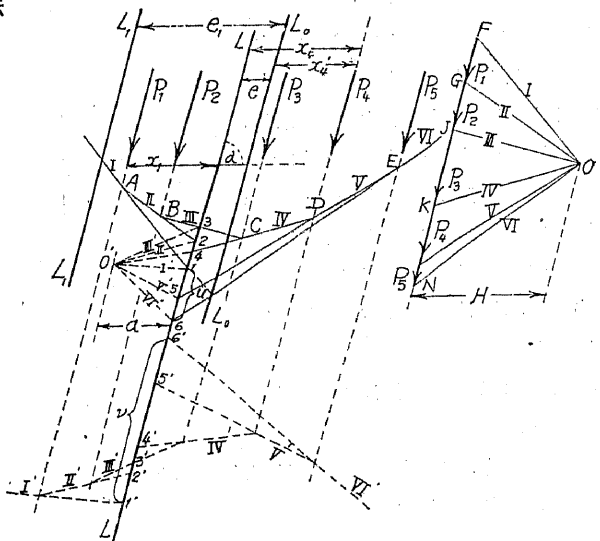


Fig. 28

なる値を軸 LL に關する力 P の n 次力率と稱する。特に $n = 1$ なる時には静力率、 $n = 2$ なる時には慣性能率 (Moment of inertia) と云ふ。尙慣性能率を物量力率、或は又二次率とも云ふ事があるが一般に I を以て表す事にする。

今若し一つの力 P に對し $P \cdot x^{n-1}$ の値を知れば $P \cdot x^n = (P \cdot x^{n-1}) \cdot x$ なる關係より、 $P \cdot x^{n-1}$ なる力を考へ其の LL 軸に關する静力率を求めると一次高き力率 $P \cdot x^n$ の値を見出す事が出来る。従つて $\sum P x^n$ を見出すには單に静力率を求める方法を順次繰返せばよい。

今 Fig. 28 に於いて FN を力示圖とし、極點 O を選んで索多角形 $ABC \dots$ を畫き各邊の延長が軸 LL を各々點 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ にて切るものとする。然らば索多角形の相隣る二邊と LL とがなす三角形 $1A2, 2B3, 3C4, \dots$ は力示圖に於いてそれに相當する三角形 FOG, GOJ, JOK, \dots に各々相似である。従つて H を x の方向に測られた極距とすれば次の關係が成立する。

$$x_1 : \bar{1}2 = H : P_1,$$

$$x_2 : \bar{2}3 = H : P_2,$$

.....

従つて $P_1 x_1 = H \cdot \bar{1}2, P_2 x_2 = H \cdot \bar{2}3, \dots$

故に $\sum P x = H (\bar{1}2 + \bar{2}3 + \bar{3}4 + \dots)$,

茲に $\bar{1}2, \bar{2}3, \bar{3}4, \dots$ はその符號を考へて加へ合さなければならぬ。而して力が同一方向に向ふ時には力率の符號は距離 x の正負、従つて $\bar{1}2, \bar{2}3, \dots$ の正負と一致すべきものであつて、圖上 LL 軸の右方の x を正とすれば正の範圍は x_3, x_4, x_5 , 即ち $\bar{3}4, \bar{4}5, \bar{5}6$ であつて負の範圍は x_1, x_2 , 即ち $\bar{1}2, \bar{2}3$ である。依つて索多角形の外端の邊(端邊と稱す)が軸 LL の上に切り取る長さを $\bar{1}6 = U$ とすると

$$\bar{1}2 + \bar{2}3 + \bar{3}4 + \dots = \bar{1}6 = U$$

$$\therefore \sum P \cdot x = H \cdot U,$$

茲に $\bar{1}6$ は正號なるが故に勿論 $\sum P \cdot x$ は正號である。

次に同圖に示す様に線分 $\bar{1}2, \bar{2}3, \bar{3}4, \dots$ を P_1, P_2, P_3, \dots の位置及び方向に働く力と考へて、任意に選ばれた極點 O' に關して索多角形 I, II, III, \dots を畫き、その邊の延長が軸 LL を切る點を各々 $1', 2', 3', \dots$ とする。然らば x の方向にはかられた極點 O' の LL より距離を a とすれば前と同様に、

$$x_1 : \bar{1}'2' = a : \bar{1}2,$$

$$x_2 : \bar{2}'3' = a : \bar{2}3,$$

.....

且つ $\bar{1}2 = \frac{P_1 x_1}{H}, \bar{2}3 = \frac{P_2 x_2}{H}, \dots$

であるが故に此の關係を挿入し

$$P_1 x_1^2 = H a \cdot \bar{1}'2', P_2 x_2^2 = H a \cdot \bar{2}'3', \dots$$

依つて、 $I = \sum P x^2 = H a (\bar{1}'2' + \bar{2}'3' + \bar{3}'4' + \dots) = H a v$

茲に v は第二索多角形の端邊が軸 LL を切る長さを表すのであつて、又二次力率は力の方向が一定なる場合常に正號をとるものと云ふ事も注意すべきで

ある。尚この式に於いて H を力の尺度にて a 及び v は長さの尺度にて測ればよい。

全く同様にして任意の高次力率を求める事が出来るのであつて、例へば $\sum P x^3$ を求めるには線分 $\overline{1'2}, \overline{2'3}, \overline{3'4}, \dots$ を P の位置及び方向に働く力と考へて任意の極距 b を有する極點を採りて索多角形を畫き、その兩端邊が LL を切り取る長さ w を定める。然らば符號は別として

$$\sum P x^3 = H \cdot a \cdot b \cdot w$$

となる。更に $\sum P x^n$ を求めるには同様の作圖方法を n 箇の索多角形に對して繰返して行へばよい。この際總べての極距は x の方向に測る事が必要なは云ふまでもない。

〔2〕 I を求める Mohr の解法

一般に構造力學の問題を解くには屢々静力率の他、二次力率（慣性力率）を求める必要が起るのである。本法は Fig. 28 に示す第一索多角形から直接二次力率を求める極めて便利な方法である。

先づ Fig. 28 に於いて索多角形 I, II, III, ……の兩端邊 I, VI 及び LL 軸に包まれた面積を F とすると、

$$\begin{aligned} F &= \triangle 1 A 2 + \triangle 2 B 3 + \triangle 3 C 4 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha (x_1 \cdot \overline{12} + x_2 \cdot \overline{23} + x_3 \cdot \overline{34} + \dots) \\ &= \frac{\sin \alpha}{2H} (P_1 \cdot x_1^2 + P_2 \cdot x_2^2 + P_3 \cdot x_3^2 + \dots) \\ &= \frac{\sin \alpha}{2H} \sum P \cdot x^2, \end{aligned}$$

茲に α は P の方向が x の方向となす角を示す。

従つて (1) $I = \sum P \cdot x^2 = \frac{2FH}{\sin \alpha}$ となる。

特に $\alpha = 90^\circ$ ならば $I = \sum P \cdot x^2 = 2FH$ となる。

〔3〕 二つの平行軸に関する二次力率間の關係

Fig. 28 に於いて力 P_1, P_2, \dots の合力 $\sum P$ の位置、即ち第一索多角形の兩端邊の交點を通する平行軸 $L_0 L_0$ から P_1, P_2, \dots まで x の方向に測られた距離

を x'_1, x'_2, \dots とすると、 $L_0 L_0$ に関するこれ等の力の二次力率は $I_0 = \sum P \cdot x'^2$ である。又その $L_0 L_0$ に関する静力率は $\sum P \cdot x'$ にしてこの値は零である。今 LL と $L_0 L_0$ の間の距離を x の方向に測り、その値を e とすれば $x = x' + e$ となる。従つて

$$I = \sum P x^2 = \sum P (x' + e)^2 = \sum P x'^2 + 2e \sum P x' + e^2 \sum P$$

然るに前述の如く $\sum P x' = 0$ なるを以つて、

$$(2) \quad I = I_0 + e^2 \sum P$$

全く同様にして $L_0 L_0$ から e_1 の距離にある平行軸 $L_1 L_1$ に對しては

$$I_1 = I_0 + e_1^2 \sum P$$

従つて (3) $I_1 - I = (e_1^2 - e^2) \sum P$

となる。

第五節 二次斷面率 (Sectional Moment of the Second Order)

前節に述べた二次力率の理論は彎曲力率を受ける直錐の研究に應用せられる。これ等直錐の斷面に於いて座標軸 x, y (普通直角座標軸) を採り、 dF を以つて座標 (x, y) を有する斷面の微分面積を示すものとするとなし、全面積に関する次の三種の積分

$$I_x = \int y^2 \cdot dF; \quad I_y = \int x^2 \cdot dF; \quad I_{xy} = \int x \cdot y \cdot dF$$

を總稱して二次斷面率と云ふ。この内特に I_x, I_y を夫々 x -軸、 y -軸に関する斷面の慣性能率と稱し、 I_{xy} をその兩軸力率 (Centrifugal moment or Product of inertia) と云ふ。直錐に生ずる彎曲應力はこの三つの積分 I_x, I_y, I_{xy} の函數として表されるから應用力學に於いてはこれ等の攻究が極めて重要である。今まづ慣性能率から説明を始めよう。

〔1〕 不規則斷面の慣性能率を求める Culmann の解法

Fig. 29 に示す如き軌條斷面を採り、その x 軸に関する慣性能率を求めよう。一般に $I_x = \int y^2 \cdot dF$ であるから x 軸に関する慣性能率は其の横距 x には

無関係である。故に dF として x 軸に平行な微分小の幅を有する細き線條の面積を採り得る事となるが、圖式的に之を取扱ふ爲には此の微分小の幅を有する線條の代りに Fig. 29 に示すやうに有限の幅を有する面積を以つて代用するのである。今此の面積を F_1, F_2, F_3, \dots とし、其の面積の重心が x 軸よりの距離を y_1, y_2, y_3, \dots とすると近似的に

$$I_x = F_1 \cdot y_1^2 + F_2 \cdot y_2^2 + F_3 \cdot y_3^2 + \dots = \sum (F \cdot y^2)$$

となる。扱 F_1, F_2, F_3, \dots は一般的には異なる幅 d_1, d_2, d_3, \dots を有するものであるから、之を取扱ふ場合には等しい幅 a を有する矩形に變形し、此の變形された矩形の長さを z_1, z_2, z_3, \dots とすれば

$$F_1 = az_1, \quad F_2 = az_2, \quad F_3 = az_3, \dots \text{となる。}$$

従つて
$$I_x = \sum (F \cdot y^2) = a \sum (zy^2)$$

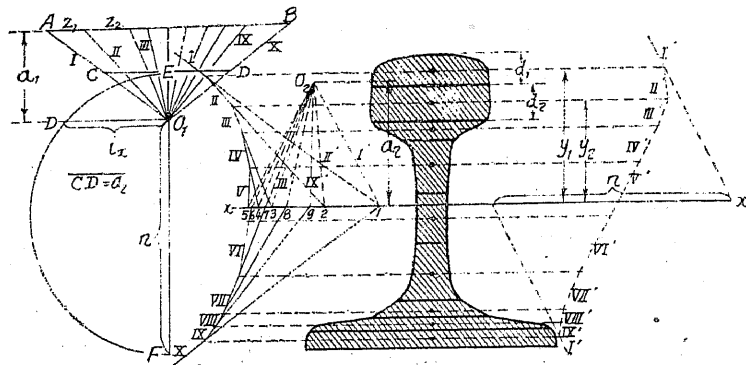


Fig. 29

斯くの如くしてこの矩形の長さ z_1, z_2, z_3, \dots を各線條の重心に於いて x 軸に平行に働く力と考へる。然らば前節に説明した方法に従つてこれ等の力の x 軸に關する二次力率を容易に求める事が出来る。今 Fig. 29 に於いて x 軸は斷面の重心を過ぎるものとし、 a_1 を第一索多角形 I, II, III, ... に關する極距、 a_2 を第二索多角形 I', II', III', ... に關する極距とし、又 n を以て第二索多角形の端邊が x 軸上に切り取る長さとするならば、

$$\sum y^2 \cdot z = a_1 \cdot a_2 \cdot n$$

故に

$$I_x = a \sum y^2 \cdot z = a \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot n$$

此の式中 a, a_1, a_2 、及び n は何れも長さの尺度を以つて測ればよく、又 a, a_1, a_2 は共に整数に採り置く方が計算上便利である。

尙斷面を數多の部分に分割する時に個々の線條は之を梯形と看做し得る形となすものとし、其の平均長(上邊と下邊との平均)を h 、幅を d とすると其の面積は $F = d \cdot h$ となる。故に前記 $F = a \cdot z$ に於ける z の値は

$$z = \frac{h \cdot d}{a} \text{ となる。}$$

此の z の値は上式を用ひて計算から求める事が出来るが、又 Fig. 30 (b) に示す様に圖式的にも定める事が出来る。

次に梯形の重心 S を求めるには Fig. 30 (a) に於いて平行邊 h', h'' の延長線上に長さ $\overline{DE} = \overline{CF} = \overline{AB} = h'$ 、 $\overline{BG} = \overline{AH} = \overline{CD} = h''$ を採り G と F 、及び E と H を直線にて結ぶ、然らばその交點が求める重心 S である。何故ならば、今梯形を二つの三角形 ABC (面積 $\frac{h'd}{2}$) と CDB (面積 $\frac{h''d}{2}$) とに分ちて考へると邊 h' に關する梯形の靜力率は次の如くなる。

$$M = \frac{h'd}{2} \cdot \frac{d}{3} + \frac{h''d}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot d = \frac{h' + 2h''}{6} d^2$$

又一方 S の h' からの距離を e' とすれば梯形の邊 h' に關する靜力率は

$$M = \frac{h' + h''}{2} \cdot d \cdot e'$$

従つて
$$\frac{h' + 2h''}{6} \cdot d^2 = \frac{h' + h''}{2} \cdot d \cdot e' \quad (a)$$

$$\therefore \frac{e'}{d} = \frac{h' + 2h''}{3(h' + h'')}.$$

同様にして

$$\frac{e''}{d} = \frac{h'' + 2h'}{3(h' + h'')}.$$

上の兩式から

$$\frac{e'}{e''} = \frac{h' + 2h''}{h'' + 2h'} \text{ となる。}$$

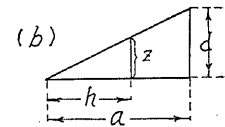
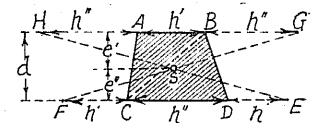


Fig. 30

所が Fig. 30 (a) に示す如くして求めた S 點は此の條件を満足するが故に明らかに重心である事を知る。尙 HE, FG の何れか一方の代りに平行邊 AB, CD の中點を結ぶ直線を以つて代用する事が出来る。何故ならばかくの如くした場合

に於いても矢張上に述べた條件を満足するからである。

〔2〕環動半徑 (Radius of gyration)

今斷面積を F とする時

$$i_x^2 = \frac{I_x}{F}$$

なる關係式に依つて與へられる i_x を稱して x 軸に關するその斷面の環動半徑と云ふ。

而して前に〔1〕に於いて述べた様に

$$I_x = a \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot n, \text{ 及び } F = a \sum z$$

従つて
$$i_x^2 = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot n}{\sum z} \text{ となる。}$$

この値を圖式的に定めるには Fig. 29 に於いて第一力示圖の極線 I と X との間に $AB = \sum z$ と平行に直線 CD を置きその長さを a_2 とする。次に $CD \perp EO, F$ とし、 $\overline{OF} = n$ と採る。そして O_1 に於いて EF に立てた垂線が EF を直径とする圓周に交る點を D とすれば $\overline{O_1D} = i_x$ となる。何故ならば

$$\overline{O_1E} = a_1 \cdot \frac{a_2}{\sum z}$$

$$\overline{O_1D}^2 = \overline{O_1E} \cdot \overline{O_1F} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot n}{\sum z}$$

故に $\overline{O_1D} = i_x$

〔3〕環動半徑の知れた部分からなる集合斷面の I を決定する法

Fig. 31 に於いて SS は F なる斷面積を有す

る斷面の重心軸にして、 xx 軸は ss から e なる

距離にある平行軸とする。然らば前節の公式 (2)

に依つて ss 及び xx に關する慣性能率の間に次

の關係がある。

$$(1) \quad I_x = I_s + F e^2$$

ところが前項の環動半徑の定義に依つて $I_x = F \cdot i_x^2, I_s = F \cdot i_s^2$ と置く事を得るが故に

$$(1)' \quad I_x = F \cdot i_x^2 = F (i_s^2 + e^2)$$

従つて、(2)
$$i_x = \sqrt{i_s^2 + e^2}$$

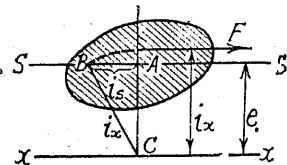


Fig. 31

となる。故に今 Fig 31 に於いて直線 ss 上に任意の點 A から $AB = i_x$ にとり、且つ A を通りて xx に垂線 AC を立てるならば CB は i_x の長さを與へる事になる。尙 $I_x = F \cdot i_x^2$ であるから I_x は軸 xx から i_x の距離に於いて xx に平行に働く力 F の軸 xx に關する二次力率であると云ふ事が出来る。

以上の事實を應用すれば次の如くして慣性能率 I_x を求める事を得。即ち I_x を求める可き一つの斷面を多くの部分面積 F に分ち、その各部分に就いて各々の重心軸に關する環動半徑 i_x を知り得るものとすれば、まづ各部分に就いて $i_x = \sqrt{i_s^2 + e^2}$ なる關係より i_x を求める。然らば全體の面積 $\sum F$ に就いては $I_x = \sum F \cdot i_x^2$ なるを以つて、各々軸より i_x の距離に働く平行力 F の二次力率の總和を求むることになる。之すでに前節に述べたる所に依り容易に其の結果を知る事を得。

Fig. 29 に於いて全體の斷面を或る幅を有する線條に分ち I_x を求めた際に於ける誤差を全く除かんとすれば、個々の線條に對して其の重心距離 y_1, y_2, y_3, \dots の代りに軸 xx に關するこの i_x の値を用ふればよい。

尙直線を以つて界せられた斷面は平行四邊形及び三角形に分解する事を得べく、又平行四邊形及び三角形は其の一邊が軸に平行になる様に採られた場合それに関する慣性能率及環動半徑は極めて容易に求めることが出来る。以下其れに就いて少しく説明をしよう。唯ここに注意すべきは曲線を以つて界せられた斷面の場合であつて、この時は其の斷面をそれに添ふ短き邊の近似的多角形を以て置き代へる様にすればよい。

(a) 平行四邊形 (Fig. 32)

b を底邊の長さとし、 h を高さとするば b に平行な重心軸 ss に關して

$$I_x = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} y^2 \cdot dF$$

$$= 2 \int_0^{+\frac{1}{2}h} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$\therefore i_x^2 = \frac{I_x}{F} = \frac{I_x}{bh} = \frac{h^2}{12}$$

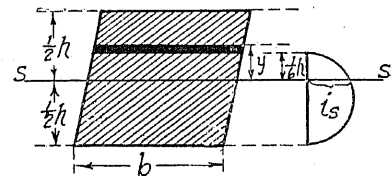


Fig. 32

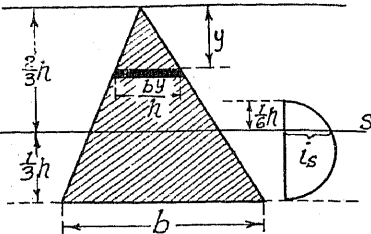
故に $i_o = \sqrt{\frac{h}{2} \cdot \frac{h}{6}}$
 従つて i_o を圖式的に Fig 32 に示す様に $(\frac{h}{2} + \frac{h}{6})$ なる直径を有する半圓より容易に求め得る事は説明をするまでもない。

又底邊 b に一致する軸に関する慣性能率は

$$I_b = I_s + F \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} + bh \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{3} \quad \text{となる。}$$

(b) 三 角 形 (Fig 33)

先づ始めに頂點を過ぎ底面 b に平行な軸に関して、

$$I = \int_0^h y^2 \cdot dF = \int_0^h y^2 \cdot \frac{by}{h} \cdot dy = \frac{bh^3}{4}$$


これから前節公式(2)に従つて底邊に平

行な重心軸に関する慣性能率を求めると、

$$I_s = I - F \left(\frac{2h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2} \cdot \frac{4h^2}{9} = \frac{bh^3}{36}$$

故に $i_s^2 = \frac{I_s}{F} = \frac{2I_s}{bh} = \frac{h^2}{18}, \therefore i_s = \sqrt{\frac{h}{3} \cdot \frac{h}{6}}$

従つて Fig. 33 に示す様に i_s を圖式的に求める事を得。次に底面 b に関して

$$I_b = I_s + F \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2} \cdot \frac{h^2}{9} = \frac{bh^3}{12}$$

〔4〕 Mohr 解法

Fig. 29 に示された断面の xx 軸に関する慣性能率 I_x を第一索多角形のみを用ひて決定するのが Mohr 解法であつて、その索多角形と兩端邊 I と X との間に包まれた面積 F を求めると前節〔2〕に説明した所に依つて

$$\sum z \cdot y^2 = 2 F \cdot a_1$$

従つて近似的に $I = \sum a \cdot z \cdot y^2 = 2 a a_1 F$

此の場合分たれた線條の幅が薄ければ薄いほど I の値は精密に求められる筈である。無し無限に薄く分つた場合には索多角形は一つの曲線となるべく、其の曲線は實際作圖に於いて有限の幅を有する線條に對して畫かれた索多角形に各面積の分割點に相當する索多角形上の點に於いて切るのである。その理由を説明するに、Fig. 34 に於いて A, D, E, B 點にて索線に切線を引いたものとする。

然らば相隣接する二つの切線はその切點の間にある断面の線條に對する索多角形の外端邊となる。従つて各區分断面の x に平行な重心線上にて交る。

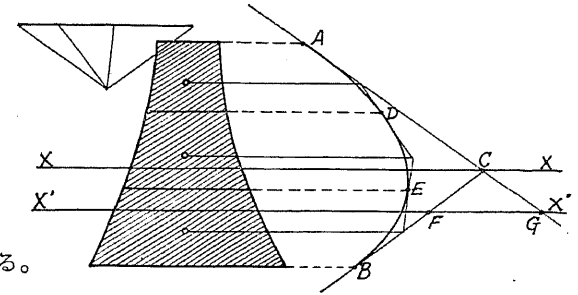


Fig. 34

故にこれ等の切線は索線に

對して外接する多角形にして同時に断面を有限の幅に分割して畫いた索多角形となる。

この理を應用して索線を精密に畫き得るのであつて、断面の分割點に相當する索多角形上の點に於いて索多角形に切する様な曲線を畫けばよい。従つて割合に精密な索線を得る爲に餘り多くの切點などを必ずしも必要としないのであつて、この Mohr 解法を用ひる時には Culmann 解法より幅の廣い線條を採り得るのである。尙この方法にては有限の幅に線條を採つたことから生ずる誤差は索多角形と索線との面積差であつて容易にこれを認める事が出来る。

更に Mohr 解法に於いて公式 $I = 2 a a_1 F$ 中にある面積 F は普通測面器(Planimeter)を用ひるか、又は Simpson 公式に依つて容易に見出す事を得。今此の Simpson 公式に就いて説明するに、Fig. 35 に示す様に索線 AB と二つの端邊 AC 及び BC に依つて包まれた面積 ABC を幅の等しき偶數 m 箇の線條に分ち、その分割線の一つの端邊、たとへば AC に平行ならしめる。かくして得た分割線の長さを各 y_1, y_2, y_3, \dots とし y に直角に測られた線條の幅を e とすると

$$F = \frac{e}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{m-1})$$

茲に $AC = y_0$ にして $y_m = 0$ である。

Fig. 34 に於いて xx に平行である軸 $x'x'$ に関する慣性能率 I' を定めるには上に見 B_m 出した F の面積に索線の兩端切線と軸 $x'x'$

Fig. 35

に依つて包まれた三角形 CFG の面積をつけ加ふべきである。

(5) 兩軸力率 (Centrifugal moment)

Fig. 36 に於いて x_1, y_1 を断面 F の重心を通る直角座標軸とし、この x_1, y_1 に関する断面の兩軸力率 $I_{x_1 y_1}$ が與へられたるものとする。次に x_1, y_1 に平行なる軸 x, y を採り、 x, y に関する断面の重心座標を (ξ, η) とするならば軸 x, y に関する断面の兩軸力率 I_{xy} は次の如くなる。

$$I_{xy} = \int (x_1 + \xi)(y_1 + \eta) dF$$

$$= \int x_1 y_1 dF + \eta \int y_1 dF + \xi \int x_1 dF + \eta \xi F$$

上式中 $\int y_1 dF$ 、及び $\int x_1 dF$ は共に断面 F の重心軸に関する静力率であるから零である。従つて

$$(3) \quad I_{xy} = I_{y_1 x_1} + F \eta \xi$$

又断面 F が二軸 x_1, y_1 の内何れか一方に對し對稱的である場合には $I_{y_1 x_1} = 0$ であるから (4) $I_{xy} = F \eta \xi$ となる。

この公式を用ひると軸 x, y に平行な邊を有する矩形からなる断面の兩軸力率を容易に求める事が出来るのであつて、例へば Fig. 37 に示す如き三つの矩形部分からなる断面に就いてその應用を説明しよう。

今三つの矩形部分の重心を S_1, S_2, S_3 とし、其の座標を夫々 $(+\eta_1, +\xi_1), (-\eta_2, -\xi_2), (-\eta_3, +\xi_3)$ とすると次の如くなる。

$$I_{xy} = F_1 \eta_1 \xi_1 + F_2 \eta_2 \xi_2 - F_3 \eta_3 \xi_3$$

尙是等を圖式的に求めるには先づ各矩形部分を同一の幅 a を有する様に變形し、その長さ $z_1 = \frac{F_1}{a}, z_2 = \frac{F_2}{a}, z_3 = \frac{F_3}{a}$ を求める。次に z_1, z_2, z_3 を各々の重心の位置に於いて x 軸に平行に働く力と考へて極點 O_1 を選んで索多

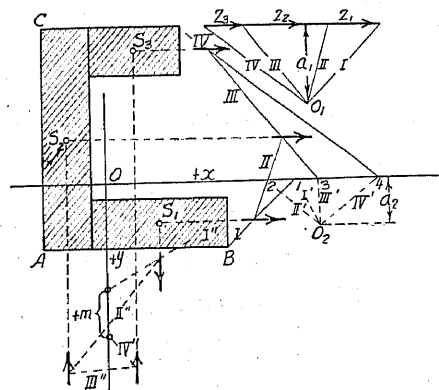


Fig. 37

角形 I, II, III, IV と畫き、その各邊の延長が x 軸を切る點を 1, 2, 3, 4 とする。然らば O_1 點の極距を a_1 とする時

$$\bar{I2} = \frac{z_1 \eta_1}{a_1}; \quad \bar{23} = -\frac{z_2 \eta_2}{a_1}; \quad \bar{34} = -\frac{z_3 \eta_3}{a_1}$$

次に是等の長さを點 S_1, S_2, S_3 に於いて y 軸の方向に働く平行力と考へて極距 a_2 を以つて第二の索多角形 I'', II'', III'', IV'' を畫く。但しこの際それ等の各邊は O_2 に関する極線 I', II', III', IV' に各々直角とする。かくして得た第二索多角形の端邊 I'', 及び IV'' が y 軸上に切り取る長さ m と第二極距 a_2 との積は y 軸に関する力 $\bar{I2}, \bar{23}, \bar{34}$ の静力率の和に等しい。従つて $a_2 m = \bar{I2} \cdot \xi_1 - \bar{23} \cdot \xi_2 + \bar{34} \cdot \xi_3$

$$= \frac{z_1 \eta_1 \xi_1}{a_1} + \frac{z_2 \eta_2 \xi_2}{a_1} - \frac{z_3 \eta_3 \xi_3}{a_1} = \frac{\sum z \eta \xi}{a_1}$$

Fig. 31 に於いて長さ m は正號にして、上式をかきかへる時は次の如くなる。

$$\sum z \eta \xi = a_1 a_2 m$$

従つて

$$I_{xy} = \sum F \eta \xi = a \sum z \eta \xi = a a_1 a_2 m$$

斯くして矩形部分からなる断面の兩軸力率が圖式的に求められたわけであるが、同様な方法が不規則なる形を有する断面の兩軸力率を求める場合にも應用されるのであつて、この場合には断面を座標軸の一つに平行にして而も矩形と看做し得る程薄き線條に分つ事が必要である。今特別の場合として Fig. 38 に示す如き場合を説明する。即ち x 軸に平行な區分断面の中點が一直線上にあるものとし且その直線は x 軸と α なる角をなして原點 O から a の距離に於いて x 軸と交るものとする。然らば

$$I_{xy} = \int xy dF = \int (a + y \cot \alpha) y dF$$

$$= a \int y dF + \cot \alpha \int y^2 dF$$

今 η を以つて F の重心に對する縦距を表すものとする、

$$(5) \quad I_{xy} = F a \eta + I_x \cot \alpha \quad \text{となる。}$$

例へば Fig. 39 に示す様な三角形に對しては

$$I_{xy} = \frac{bh^3}{4} c \cot \alpha$$

又公式 (3) に従つて

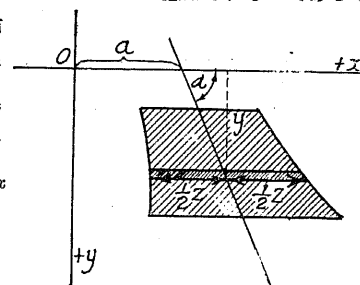


Fig. 38

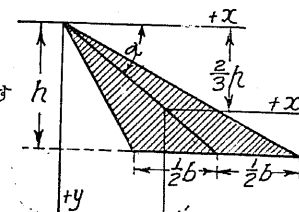


Fig. 39

$$I_{x'y'} = \frac{bh^3}{36} \cot \alpha \text{ となる。}$$

次に Fig. 40 に示す抛物線形断面に對してはその幅 z は次式によつて定められる。

$$z = b \sqrt{\frac{y}{h}}$$

従つてその面積は

$$F = \int z dy = \frac{2}{3} b \cdot h$$

となり、 x 軸に関する断面の静力率は

$$\int z y dy = \frac{2}{5} bh^2$$

となる。尚その重心 S は x 軸から $\frac{3}{5}h$ の距離にあり、且つその二次断面率として次の如き値を得る。

$$I_x = \int z y^2 dy = \frac{2}{7} bh^3$$

$$I_{x'} = \frac{2}{7} bh^3 - \frac{2}{3} bh \left(\frac{3h}{5}\right)^2 = \frac{8}{175} bh^3$$

$$I_{x'y'} = \frac{8}{175} bh^2 \cot \alpha$$

[6] 断面の極慣性性能率 (Polar moment of inertia of a section)

一つの断面のその面上にある極点 O に関する極慣性性能率は次式によつて與へられる。

$$(7) \quad I_p = \int r^2 dF$$

茲に r は極点 O より微分面積 dF に在る距離を示す。

次に微分面積 dF の直角座標を (x, y)

とすると $r^2 = x^2 + y^2$

従つて (8) $I_p = I_y + I_x$

次に x 軸に於いて点 O から e の距離にある点 O' を極点とする時は、この極点に関する極慣性性能率は

$$I_{p'} = I_y' + I_x = I_p + I_y' - I_y$$

となる。若し y 軸が重心軸である場合には

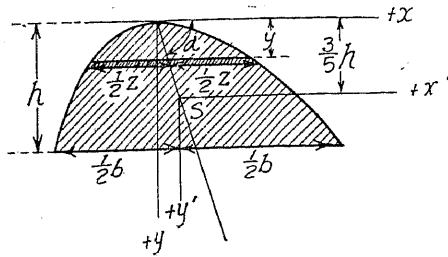


Fig. 40

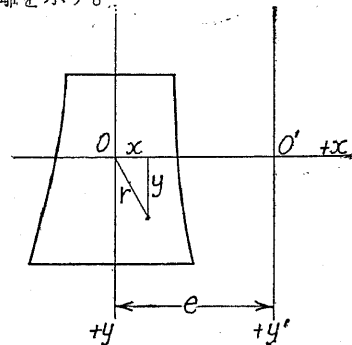


Fig. 41

$I_{y'}$ と I_y との間に次の關係がある。 $I_{y'} = I_y + Fe^2$

従つて (9) $I_{y'} = I_y + Fe^2$

となる。

[7] 斜座標軸に関する断面力率

Fig. 42 に於いて任意の断面を直角座標軸 x, y 及び斜座標軸 x', y' に關して考へ、其の何れも共通原点 O を有し且つ y 軸と y' 軸とは一致するものとし、 x', y' 軸の含む角を β とする。然る時は

$$y'' = y - x \cot \beta; \quad x' = x \operatorname{cosec} \beta,$$

にして、直角座標軸に関する二次断面率は次の式によつて與へられる。

$$I_x = \int y^2 dF; \quad I_y = \int x^2 dF; \quad I_{xy} = \int xy dF$$

従つて斜座標軸に関する二次断面率を求むれば次の如くなる。

$$(10) \quad I_{x'} = \int x'^2 dF = \operatorname{cosec}^2 \beta \int x^2 dF = I_y \operatorname{cosec}^2 \beta$$

$$(11) \quad I_{x'y'} = \int y'x' dF = \operatorname{cosec} \beta \left[\int yx dF - \cot \beta \int x^2 dF \right] \\ = \operatorname{cosec} \beta (I_{xy} - I_y \cot \beta)$$

公式 (11) からして

$$(12) \quad \cot \beta = \frac{I_{x'y'}}{I_y}$$

なる様に β を選ぶ時は斜座標軸 y', x' に関する兩軸力率は零となる。

[8] 合成断面の二次断面率

一つの断面が Fig. 43 に示す様に二つの部分 F_1 及び F_2 からなるものとし、各部分断面の重心を S_1 及び S_2 とし、更に断面全體としての重心を S とする。 S_1, S_2 及び S を通る直角座標軸を各々 $x_1, y_1; x_2, y_2$ 及び x, y とし、 x_1, x_2, x 及び y_1, y_2, y は次々互に平行とする。然らば本節公式 (1) に従つて全體の断面の x 軸に関する二次力率は次の如くなる。

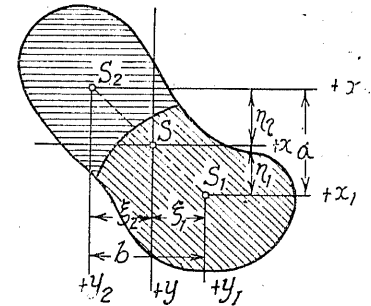


Fig. 43

$$I_x = I_{x_1 y_1} + F_1 \cdot \eta_1^2 + I_{x_2 y_2} + F_2 \cdot \eta_2^2$$

茲に I_{x_1}, I_{x_2} は各々、部分断面 F_1, F_2 の軸 x_1, x_2 に関する二次力率とする。尙 S は部分断面 F_1, F_2 の重心であるから

$$F_1 \eta_1 = F_2 \eta_2, \quad \text{及び} \quad \eta_1 + \eta_2 = a$$

$$\text{故に} \quad \eta_1 = \frac{F_2 a}{F_1 + F_2}, \quad \text{及び} \quad \eta_2 = \frac{F_1 a}{F_1 + F_2}$$

従つて $F_1 \eta_1^2 + F_2 \eta_2^2 = \frac{F_1 F_2 a (\eta_1 + \eta_2)}{F_1 + F_2}$ となるから結局 I_x として、

$$(13) \quad I_x = I_{x_1 y_1} + I_{x_2 y_2} + \frac{F_1 F_2 a^2}{F_1 + F_2}$$

同様にして部分断面 F_1, F_2 の夫々軸 y_1, y_2 に関する二次力率と I_{y_1}, I_{y_2} とすると

$$(14) \quad I_y = I_{y_1} + I_{y_2} + \frac{F_1 F_2 b^2}{F_1 + F_2}$$

又公式 (3) に従つて、部分断面 F_1, F_2 の夫々軸 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ に関する兩軸力率を $I_{x_1 y_1}, I_{x_2 y_2}$ とすると

$$I_{x_1 y_1} = I_{x_1 y_1} + I_{x_2 y_2} + F_1 \eta_1 \xi_1 + F_2 \eta_2 \xi_2$$

$$\text{故に} \quad (15) \quad I_{x_1 y_1} = I_{x_2 y_2} + \frac{F_1 F_2 ab}{F_1 + F_2}$$

若しも x_1, y_1 及び x_2, y_2 が夫々部分断面 F_1 及び F_2 の主軸である場合には

$$I_{x_1 y_1} = 0 \quad \text{及} \quad I_{x_2 y_2} = 0 \quad \text{となるから}$$

$$(16) \quad I_{x_1 y_1} = \frac{F_1 F_2 ab}{F_1 + F_2}$$

公式 (13), (14), 及び (16) を用ふれば重心 S の位置を求める事なくして I_x, I_y 及び $I_{x_1 y_1}$ を求める事が出来る。尙 S の位置が知れ且つ $I_{x_1 y_1}$ が零である場合には

$$I_{x_1 y_1} = F_1 \eta_1 \xi_1 + F_2 \eta_2 \xi_2$$

となり、これに $F_1 \xi_1 = F_2 \xi_2; F_1 \eta_1 = F_2 \eta_2$ なる関係を挿入すれば、

$$(17) \quad I_{x_1 y_1} = F_1 \xi_1 a = F_2 \xi_2 a = F_1 \eta_1 b = F_2 \eta_2 b$$

となる。

例題:

Fig. 44 に示す如き山形鋼断面に就いてその脚に平行なる重心軸に関する二次断面率 I_x 及び $I_{x_1 y_1}$ を求めて見よう。

先づ第一に断面を二つの矩形 $F_1 = 6 \delta^2$ 及び $F_2 = 9 \delta^2$ に分つて考へる。然らば公式 (13), (14) 及び (16) に依つて

$$I_x = \frac{1}{12} (6 \times 1^3 + 1 \times 9^3) \delta^4 + \frac{6 \times 9}{6+9} 5^2 \delta^4 = 151.25 \delta^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} (1 \times 6^3 + 9 \times 1^3) \delta^4 + \frac{6 \times 9}{6+9} 2.5^2 \delta^4 = 41.25 \delta^4$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{6 \times 9}{6+9} \times 5 \times 2.5 \delta = 45 \delta^4$$

次に桁の計算をする場合の如く断面重心の位置 S を定める必要ある時は Fig. 43 の符號を用ひると、

$$(18) \quad \begin{cases} \eta_1 = \frac{F_2 a}{F_1 + F_2}; & \xi_1 = \frac{F_2 b}{F_1 + F_2}; & \frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{a}{b} \\ \eta_2 = \frac{F_1 a}{F_1 + F_2}; & \xi_2 = \frac{F_1 b}{F_1 + F_2}; & \frac{\eta_2}{\xi_2} = \frac{a}{b} \end{cases}$$

なるを以つて Fig. 44 の如き山形鋼断面に對しては

$$\eta_1 = \frac{9 \delta^2 \times 5 \delta}{(6+9) \delta^2} = 3 \delta,$$

$$\xi_1 = \eta_1 \frac{b}{a} = \eta_1 \frac{1}{2} = 1.5 \delta$$

となる。尙公式 (17) を用ひると

$$I_{x_1 y_1} = F_1 \xi_1 a = 6 \times 1.5 \times 5 \delta^4 = 45 \delta^4$$

之上に求めた値と一致する事を知る。尙一般に Fig. 44 に示す如き簡単な断面に對しては二次断面率を求める場合圖式によるより計算に依る方が便利である。

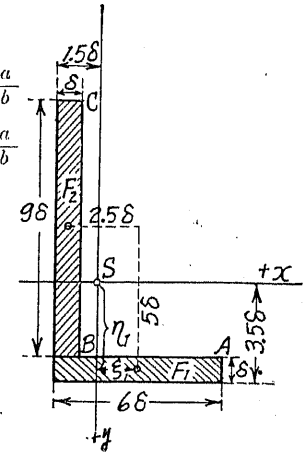


Fig. 44

(9) 二次断面率を求める例題

(1) 圓形断面 (Fig. 45)

Fig. 33 に就いて説明した様に三角形の頂點を過ぎ底邊に平行な軸に関する三角形の慣性能率は

$$I = \frac{1}{4} b h^3 \text{ である。この性質を應用して Fig. 45 の如き圓形断面の中心 } O \text{ に関する極慣性能率}$$

を求めると次の如くなる。

$$I_p = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} r^4 d\varphi \cdot r^2 = \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi r^4}{2}$$

然るに $I_p = I_x + I_y$ にして、而も $I_x = I_y$

$$\text{故に} \quad I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$$

(2) 四分圓形断面 (Fig. 46)

この断面の x 及び y 軸に関する慣性能率は圓形断面の場合の四分の一に當るを以つて、

$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}; \quad I_p = \frac{\pi r^4}{8} \text{ となる。}$$

次に兩軸力率を計算すると、

$$I_{x_1 y_1} = \int_0^r x \frac{y}{2} \cdot dF = \int_0^r x \frac{y}{2} \cdot y dx = \frac{1}{2} \int_0^r x (r^2 - x^2) dx = \frac{r^4}{8}$$

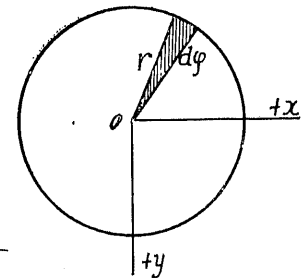


Fig. 45

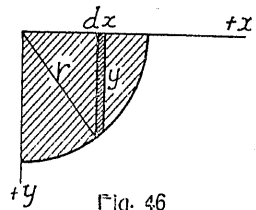


Fig. 46

更に x 軸に関するこの断面の静力率は

$$S_x = \int_0^r \frac{y}{2} \cdot dF = \int_0^r \frac{y}{2} \cdot y dx = \frac{1}{2} \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{r^3}{3}$$

なるを以つて x 軸からその重心までの距離を求めると

$$\frac{S_x}{F} = \frac{4r}{3\pi}$$

となる。

(3) 正方形と四分圓形との差から成る断面 (Fig. 47)

此の断面に対しては

$$\begin{aligned} I_x &= I_y = \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) r^4 \\ I_{xy} &= r^2 \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} - \frac{r^4}{8} = \frac{r^4}{8} \\ S_x &= S_y = r^2 \cdot \frac{r}{2} - \frac{r^3}{3} = \frac{r^3}{6} \\ F &= r^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

従つて重心の縦距は、次の如くなる。

$$\xi = \frac{S_x}{F} = \frac{2r}{3(4-\pi)} = 0.776632r$$

重心軸 ss に関する二次断面率は

$$\begin{aligned} I_s &= I_x - F\xi^2 = I_x - S_x\xi \\ I_{ss} &= I_{xy} - F \cdot \xi^2 = I_{xy} - S_x\xi \end{aligned}$$

となる。更に x 軸に平行な a 軸に関する慣性率を求めると、

$$I_a = I_s + F(\xi + e)^2 = I_s + F\xi^2 + 2F\xi e + Fe^2$$

$$\therefore I_a = I_x + 2S_x e + Fe^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) r^4 + \frac{r^3 e}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r^2 e^2$$

直角座標軸 a, b に関する兩軸力率は公式 (3) に依つて、

$$\begin{aligned} I_{ab} &= I_{ss} + F(\xi + e)(\xi + e) \\ &= I_{ss} + F\xi^2 + F\xi(c + e) + Fce \\ &= I_{xy} + S_x(e + c) + Fce \\ &= \frac{r^4}{8} + \frac{r^3}{6}(e + c) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r^2 ce \end{aligned}$$

(4) 正 n 角形断面 (Fig. 48 及び Fig. 49)

この場合には圓形断面の場合の如く中點 O に関する極慣性率から二次断面率を導く事が出来る。先づ Fig. 48 に示す二等邊三角形の頂點 O に関する極慣性率を求めると、

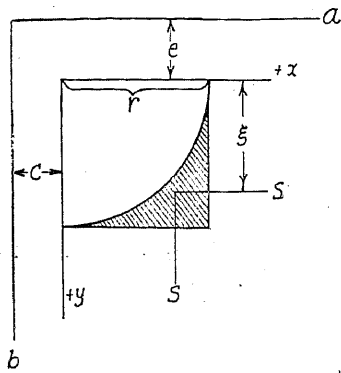


Fig. 47

$$\begin{aligned} I_y &= I_1 + I_2 = \frac{ar^3}{4} + 2 \frac{r \left(\frac{1}{2}a\right)^3}{12} \\ &= \frac{ar}{4} \left(r^2 + \frac{a^2}{12}\right) \end{aligned}$$

となる。所が $a = 2r \tan \alpha$ であるから、正 n 角形に対しては次の如くなる。

$$I_p = \frac{n}{2} r^4 \tan \alpha \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2 \alpha\right)$$

尙次節に説明する所であるが、この場合中心 O に関する慣性率

率極限は圓となるが故に、 O 点を通ずる軸に関する慣性率率は總べて相等しくその値は $\frac{1}{2} I_p$ となる。

例へば正八角形に対しては

$$\alpha = \frac{1}{2} 45^\circ, \tan \alpha = \sqrt{2} - 1.$$

$$I = \frac{1}{2} I_p = \frac{4}{3} r^4 (4\sqrt{2} - 5)$$

$$= 0.875806 r^4$$

$$F = 8(\sqrt{2} - 1) r^2 = 3.31371 r^2$$

(5) Z 字形鋼断面 (Fig. 50 及び Fig. 51)

Fig. 50 に示す如き Z 字形鋼断面に就いてその重心を通る直角座標軸 x, y に関する断面力率を求めよう。

先づ Fig. 51 に示す隅角 C 及び E に於ける丸味を無視すれば、

$$I_x = \frac{1}{12} (8 \times 13^3 - 7 \times 11.6^3) = 918.811 \approx 919 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} (1.2 \times 15^3 + 12.8 \times 1^3) = 338.567 \approx 339 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 2 \times 1.2 \times 7 \times 6.4 \times 4.0 = 430.080 \approx 430 \text{ cm}^4$$

次に E 及び C に於ける丸味の影響を考へに入れる。今 Fig. 51 に示す様に丸味の半径を r 及び r_1 とする。然らば例題 (3) に於いて導いた公式を用ひて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta I_x &= \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) r^4 + \frac{r^3 c}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r^2 c^2 \\ &\quad - \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) r_1^4 - \frac{r_1^3 c}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r_1^2 c^2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta I_y &= \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) r^4 - \frac{r^3 c}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r^2 c^2 \\ &\quad - \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right) r_1^4 + \frac{r_1^3 c_1}{3} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r_1^2 c_1^2\right] \end{aligned}$$

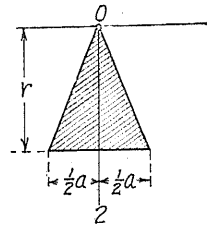


Fig. 48

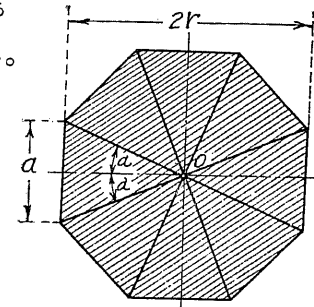


Fig. 49

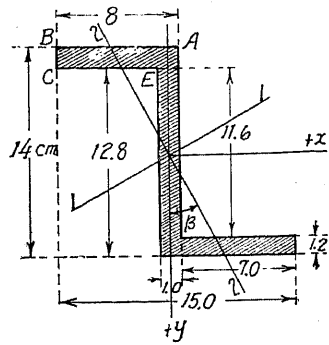


Fig. 50

$$\frac{1}{2} \Delta I_{xy} = -\frac{r^4}{8} - \frac{r^3}{6} (e-c) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r^2 cc$$

$$- \left[-\frac{r^4}{8} + \frac{r^3}{6} (e_1 - c_1) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) r_1^2 e_1 c_1 \right]$$

今假りに $r_1 = \frac{1}{2} r$ とすると

$$\Delta I_x = +0.2568 r^4 + \frac{2}{3} r^3 \left(e + \frac{1}{8} e_1 \right) + 0.4292 r^2 \left(e^2 - \frac{1}{4} e_1^2 \right)$$

$$\Delta I_y = +0.2568 r^4 - \frac{2}{3} r^3 \left(c + \frac{1}{8} c_1 \right) + 0.4292 r^2 \left(c^2 - \frac{1}{4} c_1^2 \right)$$

$$\Delta I_{xy} = -0.2344 r^4 - \frac{1}{3} r^3 \left(e-c + \frac{e_1 - c_1}{8} \right) + 0.4292 r^2 \left(ec - \frac{1}{4} e_1 c_1 \right)$$

Fig. 51 に示す例に於いて $r = d = 1 \text{ cm}$, $c = 1.5 \text{ cm}$, $c_1 = 7 \text{ cm}$, $e = 4.8 \text{ cm}$, $e_1 = 6.3 \text{ cm}$ とすると

$$\Delta I_x = 9.612 \text{ cm}^4; \quad \Delta I_y = -5.619 \text{ cm}^4; \quad \Delta I_{xy} = -2.547 \text{ cm}^4$$

従つて精密な断面力率は $[+\Delta I]$ にして次の如くなる。

$$I_x = 928.423 \text{ cm}^4; \quad I_y = 332.948 \text{ cm}^4; \quad I_{xy} = 427.133 \text{ cm}^4$$

又 E に於いて附加すべき面積を ΔF , c に於いて引き去るべき面積を ΔF_1 とし、 ΔF , ΔF_1 の重心座標を夫々 (η, ξ) , (η_1, ξ_1) とすると近似的に次の式を用ふる事を得。

$$\Delta I_x = 2 (\Delta F \eta^2 - \Delta F_1 \eta_1^2)$$

$$\Delta I_y = 2 (\Delta F \xi^2 - \Delta F_1 \xi_1^2)$$

$$\Delta I_{xy} = 2 (\Delta F \eta \xi - \Delta F_1 \eta_1 \xi_1)$$

尙断面積は丸味を考へない時は $F = 30.6 \text{ cm}^2$ であるが丸味を考慮に入れる時は

$$F = 31.1 \text{ cm}^2 \quad \text{となる。}$$

(6) 斜座標軸 x', y' に関する梯形の断面力率 (Fig. 52)

圖に於いて y' 軸は縦二等分截線と一致するものとする $I_{x'y'} = 0$ である。次に梯

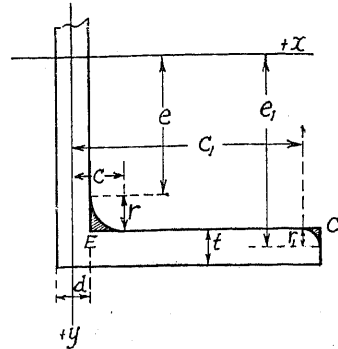


Fig. 51

形を二つの三角形に分ち、公式 (13) を用ふると重心を通る直角座標軸 x, y に関して

$$I_x = \frac{a_1 h^3}{36} + \frac{a_2 h^3}{36} + \frac{\frac{a_1 h}{2} \cdot \frac{a_2 h}{2}}{\frac{a_1 h}{2} + \frac{a_2 h}{2}} \left(\frac{h}{3}\right)^2$$

次に x 軸をその儘とし y 軸を y' 軸の位置に轉ぜしめると、〔7〕に於いて説明したと同様にして、

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \alpha = I_x \frac{t^2}{l^2}$$

之に上に見出した I_x の値を挿入すると

$$I_{x'} = \frac{h t^2}{36} \left(a_1 + a_2 + \frac{2 a_1 a_2}{a_1 + a_2} \right)$$

更に線條 $z dy$ の斜座標軸 y' に関する慣性能率を $\alpha I_{y'}$ とすると

$$dI_{y'} = dy' \sin \beta \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} x'^2 dx' = \frac{z^3}{12} \sin \beta dy'$$

Fig. 52

断が $dy' = dz \frac{t}{a_1 - a_2}$ であるからこれを上式に代入して積分すれば

$$I_{y'} = \frac{\sin \beta t}{12(a_1 - a_2)} \int_{a_2}^{a_1} z^3 dz = \frac{\sin \beta t (a_1^4 - a_2^4)}{48 (a_1 - a_2)}$$

尙この梯形面積は $F = \frac{h (a_1 + a_2)}{2}$ であるから $I_{y'}$ を書き換へると、

$$I_{y'} = \frac{F (a_1^3 + a_2^3)}{24}$$

となる。

第六節 一點を通ずる二つの直角座標軸に関する二次断面率間の關係

〔1〕解析的關係

Fig. 53 に示す如く直角座標軸 x, y を α だけ廻轉せしめた位置を他の直角座標軸 x', y' とする。然らば二つの座標の間に次の關係がある。

$$y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$x' = y \sin \alpha - x \cos \alpha$$

従つて x', y' 軸に関する二次断面率

$$I_{x'} = \int y'^2 dF; \quad I_{y'} = \int x'^2 dF;$$

$$I_{x'y'} = \int x'y' dF$$

に対して次の式を得る。

$$I_{x'} = \cos^2 \alpha \int y^2 dF + \sin^2 \alpha \int x^2 dF$$

$$- 2 \sin \alpha \cos \alpha \int xy dF$$

$$I_{x'y'} = \sin^2 \alpha \int y^2 dF + \cos^2 \alpha \int x^2 dF$$

$$+ 2 \sin \alpha \cos \alpha \int xy dF$$

$$I_{x'y'} = \sin \alpha \cos \alpha (\int y^2 dF - \int x^2 dF) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int xy dF$$

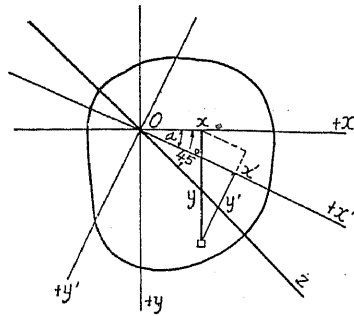


Fig. 53

上式をかき換へると、

$$(1) \begin{cases} I_{x'} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \\ I_{y'} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \\ I_{x'y'} = -\frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$

これ求める所の $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{x'y'}$ と I_x , I_y , I_{xy} との関係にして、更に上式中始めの二式を加へると次の重要な関係を得る。

$$(2) \quad I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$$

此の関係は前節公式(8)から、極慣性能率の性質に依り

$$I_p = I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$$

として証明する事も出来る。要するに同じ原点を通る直角座標軸に関する慣性能率の和は常に一定である事を知る。

Fig. 53 に示す x 軸と 45° をなす軸に関する慣性能率は公式(1)の第一式から次の如くなる。

$$I_x = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - I_{xy}$$

$$従つて (3) \quad I_{xy} = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - I_x$$

斯くの如く三つの慣性能率から兩軸力率を計算する事が出来る。

尚 $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ なる關係を用ひると $I_{x'}$ は次の如き形となる。

$$(4) \quad I_{x'} = -\frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

この α に就いて微分し零と置けば

$$-\frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\alpha - I_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

$$\therefore (5) \quad \text{tg } 2\alpha = \frac{-2 I_{xy}}{I_x - I_y}$$

之 $I_{x'}$ が最小又は最大なる爲の x' 軸の x 軸に対する傾きを與へる式である。この條件式を満足せしめる α の値は二つあつて 90° だけ異なるが、その内一方の α の値だけ傾いた軸に関する慣性能率は最大となり、他の α の値だけ傾いた軸に関するものは最小となる。即ち慣性能率が最大及び最小である二つの軸は互に直角をなすのであつて之を主軸 (Principal axis) と稱し、この軸に関する慣性能率を主慣性能率 (Principal moments of inertia) と云ふ、普通之を I_1 及 I_2 を以つて表す。

次に公式(4)及び(5)からして

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\alpha \left[1 - \frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y} \text{tg } 2\alpha \right] \\ &= \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\alpha [1 + \text{tg}^2 2\alpha] \\ &= \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sqrt{1 + \text{tg}^2 2\alpha} \end{aligned}$$

従つて二つの主慣性能率として次式を得る。

$$(6) \begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2} = I_{max} \\ I_2 = \frac{1}{2} (I_x + I_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2} = I_{min} \end{cases}$$

尚公式(1)の第三式及び公式(5)から主軸に関する兩軸力率は零である事を知る。

(2) 二次断面率の圖示法

Fig. 54 に示す様に y 軸上に中心 M を有し x 軸に點 O に於いて接する圓を畫く。次に同じ原点 O を有する第二の直角座標軸 x', y' を引き圓との交りを C ,

D とする。そして任意の点 T から直径 OMA 及び CMD に垂線を下ろしその足を夫々 B, R とする。然らば軸 x と x' 軸との角を α とする時、

$$\angle DMA = \angle RTB = 2\alpha$$

$$\overline{RC} = \overline{MC} + \overline{MB} \cos 2\alpha - \overline{BT} \sin 2\alpha$$

$$\overline{RT} = \overline{MB} \sin 2\alpha + \overline{BT} \cos 2\alpha$$

今任意の尺度を以つて $\overline{OB} = I_x$, $\overline{BA} = I_y$,

$\overline{BT} = I_{xy}$ とする様に作圖すれば、

$$\overline{MO} = \overline{MC} = \frac{1}{2}(I_x + I_y)$$

$$\overline{MB} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)$$

従つて公式 (4) 及び (1) を用ひる事に依つて次の關係を得る。

$$\overline{RC} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha = I_{x'}$$

$$\overline{RT} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = I_{x'y'}$$

公式 (2) に依つて

$$I_{y'} = (I_x + I_y) - I_{x'} = \overline{RD}$$

Fig. 55 及び Fig. 56 には見易き様に I_x, I_y, I_{xy} 及び $I_{x'}, I_{y'}, I_{x'y'}$ を別々の

圖として示す。

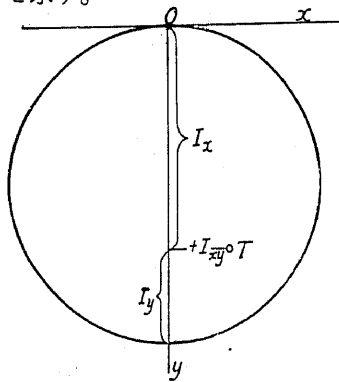


Fig. 55

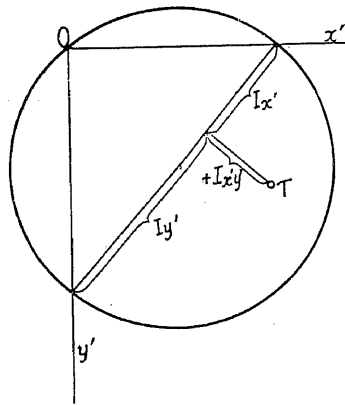


Fig. 56

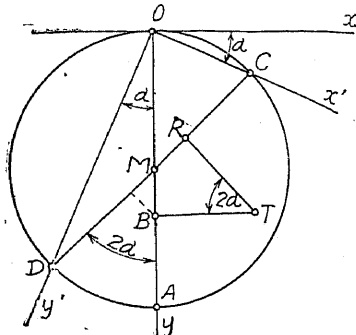


Fig. 54

次に Fig. 57 に於いて主軸及び主慣性能率を求める方法を示す。先づ上に説明した様に $I_x,$

I_y, I_{xy} を置いて点 T を定める時、点 T を通る直径が主軸 OA 及び OB を定めるのであつて、主慣性能率は

\overline{TA} 及び \overline{TB} に依つて與へられる。

$$\text{即ち } \overline{TA} = I_1 = I_{max}$$

$$\overline{TB} = I_2 = I_{min}$$

尙 Fig. 57 から本節 [1] に説明した關係

を明らかにする事が出来るのであつて、今 x

軸と主軸 1 のなす角を β とするならば、

$$\overline{MT} = \frac{I_1 - I_2}{2}, \quad \overline{ME} = \frac{I_x - I_y}{2}$$

$$\text{従つて } \frac{I_1 - I_2}{2} = \frac{I_x - I_y}{2} \sec 2\beta$$

$$\text{且つ } I_1 + I_2 = I_x + I_y$$

最後の二式より

$$I_1 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sec 2\beta$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sec 2\beta$$

又 β は Fig. 57 から次の關係式を満す事がわかる。

$$(7) \quad \text{tg } 2\beta = \frac{\overline{ET}}{\overline{ME}} = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

今 $\overline{MH} = \overline{MT}$ とすると

$$\angle ETH = \frac{\pi - 2\beta}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) = \beta$$

$$\text{且つ、 } \overline{EH} = \overline{OH} - \overline{OE} = \overline{AT} - \overline{OE} = I_1 - I_x = I_{xy} \text{tg } \beta$$

$$\text{従つて } (8) \quad \begin{cases} I_1 = I_x + I_{xy} \text{tg } \beta \\ I_2 = I_y - I_{xy} \text{tg } \beta \end{cases}$$

尙一般に断面が對稱軸を有する場合にはその軸に関する兩軸力率 I_{xy} は零で

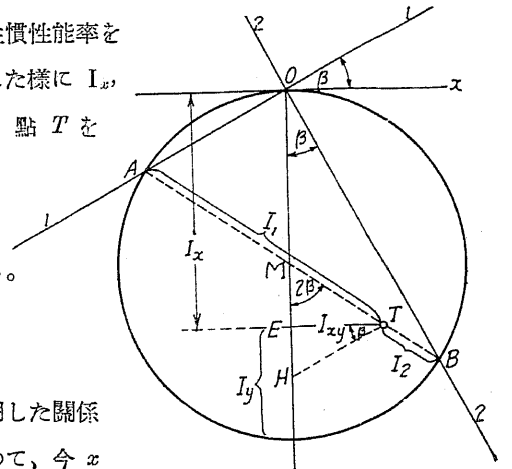


Fig. 57

あるから明らかにこの軸は主軸となる。従つて初めにこの主軸、即ち對稱軸に関する慣性能率を求め、次に他方向の軸に関するものを見出すやうにすれば便利である。この関係を Fig. 58 に就いて説明するに、先づ $OT = I_1$, $TA = I_2$ とする。そして圖に示す如き作圖を行へば同一原点 O を通る他の直角座標軸 x, y に関する二次断面率 I_x, I_y 及び I_{xy} を容易に定める事が出来る。

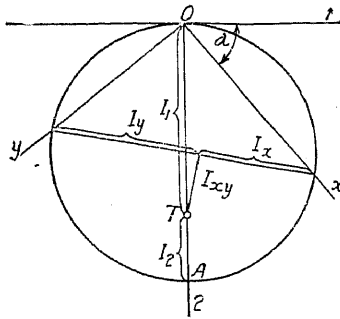


Fig. 58

又計算的に主慣性能率を與へて、 I_x, I_y, I_{xy} を求めるには次の式に依るとよ

$$(9) \quad I_x = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \sin^2 \alpha$$

$$(10) \quad I_y = I_1 \sin^2 \alpha + I_2 \cos^2 \alpha = I_1 + I_2 - I_x$$

$$(11) \quad I_{xy} = \frac{1}{2} (I_1 - I_2) \sin 2\alpha$$

例題

前節 (9) (5) に説明した Z 字形断面に就いて

$$I_x = 928.423 \text{ cm}^4; \quad I_y = 332.948 \text{ cm}^4; \quad I_{xy} = 427.133 \text{ cm}^4$$

を見出した。従つて主軸方向は公式 (7) に依り

$$\tan 2\beta = \frac{2 I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{854.266}{597.475} = 1.4345959$$

$$\therefore \beta = 27^\circ 33' 38'' \quad \tan \beta = 0.52191$$

又主慣性能率として次の値を得る。

$$I_1 = I_x + I_{xy} \tan \beta = I_x + 222.925 = 1151.35 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = I_y - 222.925 = 110.02 \text{ cm}^4$$

[3] Mohr 解法

Fig. 59 に示す様に断面上の一点 O を通して互に任意の角を挟む座標軸 x, y を引き、微分断面 dF からこの軸迄の垂直距離 x, y を面積 dF の座標とし ρ を dF から O 迄の距離とする。次に α 及び β を夫々圖に示す様に O と dF を結ぶ直線が軸 x 及び y となす角とする。然らば微分断面 dF の軸 x, y に関する

兩軸力率は次の如くなる。

$$dI_{xy} = dF \rho^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

今点 O が半径 r なる圆周上にあるものとして、軸 x, y 及び O と dF を結ぶ直線 ρ が圆周と交る點を A, B 及び C とする。然らば

$$\angle BAC = \beta,$$

且つ 弦 $AC = 2r \sin \alpha$

従つて點 C から弦 AB

への垂直距離は $2r \sin \alpha$.

$\sin \beta$ となる。故に今點 C

に $\frac{dF \rho^2}{2r}$ なる量があるものとする時、この量の弦 AB に関する静力率は兩軸力率 dI_{xy} に等しい事になる。即ち

$$\frac{dF \rho^2}{2r} \times 2r \sin \alpha \cdot \sin \beta = dF \rho^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta = dI_{xy}$$

以上の事實より各々の dF に就いてそれに対応する圆周上の點 C を求め、その點に集中して作用すべき量 $\left(\frac{dF \rho^2}{2r}\right)$ を計算する。そして最後に是等質點の重心 T を定め、 T から弦 AB への距離を h_{xy} とする。然らば求める I_{xy} として

$$I_{xy} = h_{xy} \int \frac{dF \rho^2}{2r} = \frac{h_{xy} I_p}{2r}$$

を得る。茲に I_p は断面の點 O に関する極慣性能率を示す。若し兩軸 x 及び y が一致すれば兩軸力率はその一致した軸に関する慣性能率となり、この場合弦 AB が一つの切線となる。今 h_x 及び h_y を T より A 及び B に於ける圓の切線への距離とすると、

$$I_x = h_x \frac{I_p}{2r}; \quad I_y = h_y \frac{I_p}{2r}$$

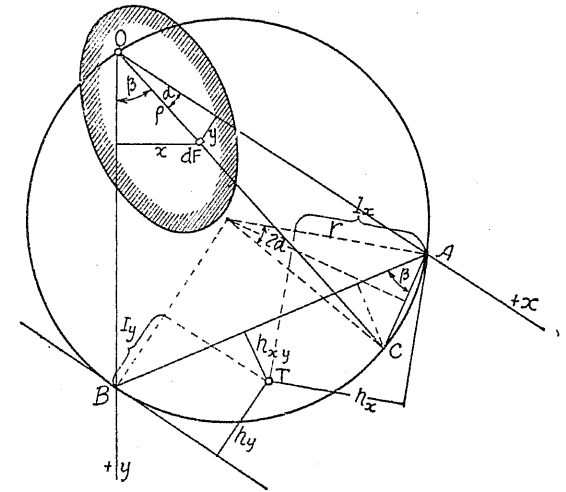


Fig. 59

尙二次断面率 I_x, I_y, I_{xy} が前項に述べた方法に依つて圖式的に求められてゐる場合には T の位置は次の條件から定める事が出来る。

$$h_x : h_y : h_{xy} = I_x : I_y : I_{xy}$$

かくして點 T の位置が定められたならば原點 O を通ずる多くの軸に関する慣性能率及び兩軸力率を容易に決定する事が出来る。尙 T の位置を決定するに I_{xy} の代りに第三の慣性能率 I_z を用ふる事も出来るし、又三つの兩軸力率又は一つの慣性能率と二つの兩軸力率を用ひてもよい。

次に圓の弦 AB が點 T を通ずる時

はその兩軸力率 $I_{xy} = 0$ となる。

かかる場合二つの軸 x 及び y を共軛軸 (Conjugate axes) と稱する。Fig. 60

に於いて軸 $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; \dots$ は何れもその弦が點 T を通るが故に兩軸力率は零となり、従つて共軛軸である。

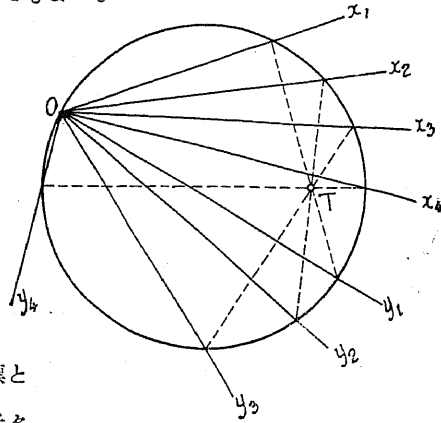


Fig. 60

次に Fig. 61 に示す様に dF の座標として直角距離 x, y の代りに軸 x, y と夫々 r, ε をなす傾斜距離 ξ, η を採るならば

$$I_{\xi\eta} = \int \xi\eta dF = \frac{1}{\sin r \sin \varepsilon} \int xy dF$$

若し $I_{xy} = 0$ なる時には $I_{\xi\eta}$ も亦零となる。

普通我々は直角距離 x, y を座標として用ふ。

(4) 一對の共軛軸間の關係

直角座標軸 x, y に関する二次断面率が與へられたるものとし、共軛關係にある二軸が x 軸となす角を α' 及び α'' とする時、この二角 α' と α'' の間の關係を求めよう。今 Fig. 62 に於いて y', y'' を微分断面 dF の共軛軸に対する垂直距離とするならば共軛軸の性質より $\int y'y'' dF = 0$ となる。

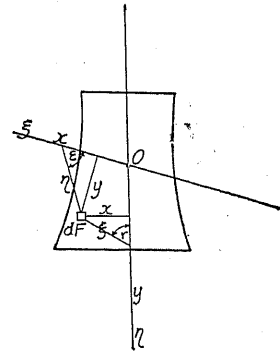


Fig. 61

然るに座標間の關係より

$$y' = y \cos \alpha' - x \sin \alpha'$$

$$y'' = x \sin \alpha'' - y \cos \alpha''$$

なるを以つて、之を $\int y'y'' dF = 0$ に代入すれば、

$$\begin{aligned} & \cos \alpha' \sin \alpha'' \int yx dF - \sin \alpha' \sin \alpha'' \int x^2 dF \\ & - \cos \alpha' \cos \alpha'' \int y^2 dF + \sin \alpha' \cos \alpha'' \int xy dF = 0 \end{aligned}$$

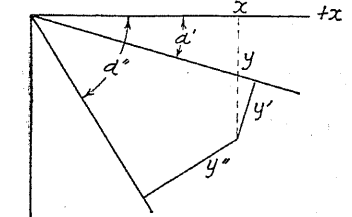


Fig. 62

これより次の關係を得る。

$$(12) \quad I_{xy} (tg \alpha' + tg \alpha'') = I_x + I_y tg \alpha' tg \alpha''$$

若しも α' が與へられてゐる時には、

$$(13) \quad tg \alpha'' = \frac{I_x - I_{xy} tg \alpha'}{I_{xy} - I_y tg \alpha'} = \frac{I_x \cot \alpha' - I_{xy}}{I_{xy} \cot \alpha' - I_y} \quad \text{となる。}$$

特に $\alpha' = 0$ ならば $tg \alpha'' = \frac{I_x}{I_{xy}}$

$\alpha' = 90^\circ$ ならば $tg \alpha'' = \frac{I_{xy}}{I_y}$

尙この場合 x, y が主軸であるならば $I_{xy} = 0$ となるから公式 (12) は次の如き簡単な形となる。

$$I_x + I_{xy} tg \alpha' tg \alpha'' = 0$$

(5) 直角座標軸に関する慣性橢圓 (Ellipse of inertia)

Fig. 63 に於いて (1) 及び (2) を原點 O を通ずる主軸とし、主環動半徑

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{F}} \quad \text{及び} \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{F}}$$

(1) と α なる角を爲す軸 x に関する環動半徑は公式 (9) に依つて、

$$(14) \quad i_x^2 = i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha$$

となる。此の値を x 軸に直角なる y 軸上にとつて點 A を定め、 A から x 軸に平行線を引く。かかる作圖を多くの α の値に對して繰返せばこれ等の平行線は遂に一つの橢圓を包む事になる。この橢圓を稱して點 O に對する慣性橢圓と

云ひ、特に点 O が断面の重心である場合之を中心楕圓(Central ellipse)と云ふ。此の慣性楕圓の半径は主軸と一致し、その値は軸(2)上に於いては i_1 となり軸(1)上に於いては i_2 となる。以上の事實を證明すれば次の如し。まづこの i_1 及び i_2 を半径とする楕圓上の一 B の座標 (x_1, y_1) は次の式を満足する。 $(y_1 // i_1, x_1 // i_2)$

$$(15) \quad \frac{y_1^2}{i_1^2} + \frac{x_1^2}{i_2^2} = 1$$

之を微分すれば

$$(16) \quad \frac{y_1 dy_1}{i_1^2} + \frac{x_1 dx_1}{i_2^2} = 0$$

或は
$$x_1 = -y_1 \frac{i_1^2}{i_2^2} \frac{dy_1}{dx_1}$$

次に切線 AB の軸(1)に対する傾きを α とすれば

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \operatorname{tg} \alpha$$

となるを以つて(16)は次の如くなる

$$(16') \quad x_1 = -y_1 \frac{i_1^2}{i_2^2} \operatorname{tg} \alpha$$

公式(15)及び(16')の關係を用ひて

$$y_1^2 = \frac{i_1^4 \cos^2 \alpha}{i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha} = \frac{i_1^4 \cos^2 \alpha}{i_x^2}$$

$$\therefore y_1 = \frac{i_1^2 \cos \alpha}{i_x}$$

同様にして
$$x_1 = \frac{i_2^2 \sin \alpha}{i_x}$$

となる。従つて

原点 O から B に於ける切線への垂直距離 \overline{OA} は次式によつて與へられる。

$$\overline{OA} = y_1 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha = \frac{i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha}{i_x} = i_x$$

之を以つて上述の作圖によつて一つの楕圓を得る事を證明し得たのである。次に

点 A から切点 B 迄の距離 C を求めると次の如し。

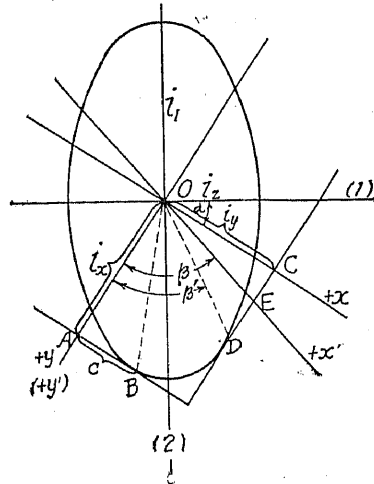


Fig. 63

$$e = y_1 \sin \alpha - x_1 \cos \alpha = \frac{(i_1^2 - i_2^2) \sin \alpha \cos \alpha}{i_x} = \frac{(I_1 - I_2) \sin 2\alpha}{2 i_x F}$$

之に公式(11)の關係を代入すれば、

$$(17) \quad e = \frac{I_{xy}}{i_x F}, \quad \text{或は} \quad I_{xy} = e i_x F$$

以上述べた所に依り慣性楕圓を用ひると任意の方向の軸に関する、二次断面率 I_x, I_y, I_{xy} を定める事が出来る。しかし乍ら實際用ひる場合には前項に述べた Mohr の方法が寧ろ便利である。

尙 Fig. 63 に於いて CD を y 軸に平行とし、慣性楕圓に D 點に於いて切するものとすれば $\overline{OC} = i_y$ 及び $\overline{DC} = \frac{I_{xy}}{i_y F}$

となる。今 $\overline{DC} = e$ とすれば $I_{xy} = e i_y F$ となる。

(6) 斜座標軸に関する二次断面率

Fig. 63 に於いて y 軸を其の儘とし、 x 軸を $90^\circ - \beta$ だけ廻轉して軸 x' の位置をとらしむ。然る場合には前節〔7〕に従つて斜座標軸 $x'y'$ に関しては、

$$I_{y'} = I_y \operatorname{cosec}^2 \beta \quad \text{及び} \quad I_{x'y'} = \operatorname{cosec} \beta (I_{xy} - I_y \cot \beta)$$

となる。之に $I_{y'} = F i_{y'}^2, I_y = F i_y^2, I_{x'y'} = e i_{y'} F$ なる關係を挿入すると、

$$i_{y'} = i_y \operatorname{cosec} \beta \quad \text{及び} \quad I_{x'y'} = i_y \operatorname{cosec} \beta (e - i_y \cot \beta) F$$

となる。今 x' 軸と楕圓切線 DC との交点を E とすれば

$$\overline{OE} = i_{y'}, \quad \overline{DE} = e - i_y \cot \beta$$

となるを以つて次の關係が成立する。

$$I_{y'} = F \overline{OE}^2, \quad I_{x'y'} = F \overline{OE} \cdot \overline{DE}$$

今特に x' 軸が OD の方向をとれば $\overline{DE} = 0$ なるを以つて $I_{x'y'} = 0$ となる。従つて OD, OA はこの断面の O に関する共軛軸であると云ふ事が出来る。同様にして OB, OC も共軛軸である。尙 OD, OA 及び OB, OC は慣性楕圓の共軛半径と見る事が出来るから「慣性楕圓の共軛半径は断面の共軛軸であつて、その共軛半径に関する兩軸力率は零である」と云ふ事も出来る。

次に共軛方向 OD と OA の爲す角 β' は公式(12)に依り

$$\cot \beta' = \frac{I_{xy}}{I_y}$$

として與へられる。或は又 Fig. 63 に従つて次の如く導く事も出来る。

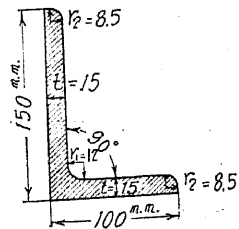
$$\cot \beta' = \frac{DC}{OC} = \frac{e}{i_y} = \frac{I_{xy}}{I_y}$$

尚 x' 軸が OD の位置をとれば環動半径 i_y' は楕圓半径 OD となる。

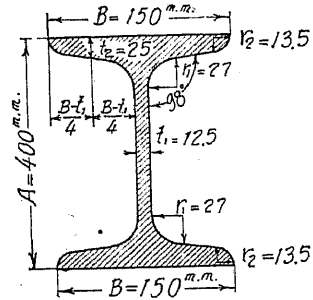
以上説明した所に依つてわかる様に、任意の座標軸 x, y に関する二次断面率 I_x, I_y 及び I_{xy} を知る事が出来れば慣性楕圓の各四分弧に於ける一つの切線とその切點を夫々知る事が出来る。例へば Fig. 63 に於いて、切點 B, D 切線 AB, DC 並びに y 軸の反對の側にてこれ等に相當する二切點及び二切線を知る事が出来る。

練習問題 3

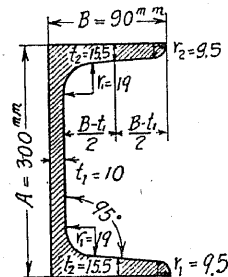
(1) 次に示す不等邊山形鋼の重心に関する慣性楕圓を求めよ。



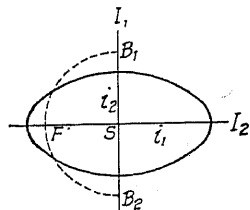
(2) 次に示す I 字鋼の重心に関する慣性楕圓を描け。



(3) 次に示す溝形鋼の重心に関する慣性楕圓を示せ。



(4) 圖に示す如く F をある断面の中心楕圓の焦點とする時、重心 S を中心とし FS を半徑とする圓が小徑を切る點を B_1, B_2 とせよ、然らば B_1 又は B_2 を通る任意の軸に関する慣性率率は夫々一定なる事を證せよ。



(5), (4) の圖に於いて任意の點 O を B_1 及び B_2 と結ぶ時 $\angle B_1OB_2$ を二等分する直線は断面の O 點に對する一の主軸なる事を證せ。

(6) 圖の如き矩形断面の重心 M を通る X, Y 軸に関する兩軸力率を求めよ。

(答) $I_{XX} = \frac{ab}{12} (a^2 - b^2) \sin \phi \cos \phi$

