水平並ニ逆勾配水路ニ於ケル自由定流水面ヲ求ムル一解法

※ 淺　野　好

序　論

元來水平水路及び逆勾配水路に於ては其の底勾配は性質上一般勾配水路の背水公式に於ける如く底勾配並に等速流水深を *Parameter* として取扱ふことを得ない。本文は一般の壩狀水路に於て水深の變化に伴ふ限界勾配の變化極めて小なる特性を應用し定流の自由水面を限界水深、限界勾配にて表はさんとするものである。

水路の斷面形狀が與へらるるときは一定流量に對する限界水理量は容易に定まるから水流を此の定量に關係せしめんとするのが本文の骨子である。

【*1.*】壩狀水路に於ける、限界諸水理量限界勾配の特性、今壩狀水路に於て最大水深を H. 流速を V、路底より勢力線迄の高さを He とせば

$$He = H + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad \cdots\cdots (1)$$

但し α = 流速水頭補正係數

(*1*)式を微分して零と置けば

$$\frac{dHe}{dH} = 1 - \frac{\alpha V}{g}\frac{dV}{dH} = 0$$

然るに

$$V = \frac{Q}{A}$$ (Q = 流量、A = 流水斷面積)、及び $\frac{dA}{dH} = B$ (水面幅) なるを以て

$$\frac{dHe}{dH} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g}\left(\frac{B}{A^3}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{A^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g} \quad \cdots\cdots (2)$$

(*2*)式は限界水深を與ふる條件である。此の時の流速を限界流速とせば

$$V = \frac{Q}{A} = \sqrt{\frac{gA}{\alpha B}} \quad \cdots\cdots (3)$$

次に限界勾配を σ とせば

$$Q = A c R^m \sigma^n = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \cdot A \sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$\therefore \sigma^n = \frac{\sqrt{\frac{A}{B}}}{CR^m}\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$$

$n = \frac{1}{2}$ とせば　　$$\sigma = \frac{gA}{\alpha c^2 B R^{2m}} \quad \cdots\cdots (4)$$

※南滿高專教授

今物部博士の方法に從ひ　$A = aH^s$　$S = bH^k$(潤邊長)

とせば　徑深　$R = \frac{A}{S} = \frac{a}{b} H^{s-k}$　仍て

$$\sigma = \frac{gA}{\alpha C^2 B R^{2m}} = \frac{gH}{\alpha C^2 S\left(\frac{a}{b}\right)^{2m} H^{2m(s-k)}}$$

$$= K H^{1-2m(s-k)} \qquad 但し \quad K = \frac{g}{\alpha C^2 S\left(\frac{a}{b}\right)^{2m}}$$

$$\Delta\sigma = K\left[1 - 2m(s-k)\right] H^{-2m(s-k)} \Delta H$$

$$\therefore \frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \left[1 - 2m(s-k)\right] \frac{\Delta H}{H} \cdots\cdots (5)$$

(5) 式より壔狀水路に於ては限界勾配の增加率は水深の增加率の $1 - 2m(s-k)$ 倍である、著者の計算によれば水深の變化の大ならざるときは $1 - 2m(s-k)$ は微小であつて從て $\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \doteqdot 0$ と考へられる。換言せば、限界勾配は水深により多少變化するも水深の變化の餘り大でないときは略常數と見做し得る特性がある。此の特性は以下述べる定流の自由水面を論ずる上の根幹をなすものである。

【2.】水平水路に於ける自由水面

此の際の不等速定流の運動方程式は

$$I = -\frac{dH}{dx} = \frac{Q^2}{C^2 R^{2m} A^2} - \alpha \frac{Q^2}{g} \frac{B}{A^3} \frac{dH}{dx} \cdots\cdots (6)$$

然るに

$$Q^2 = C^2 R_{c\gamma}^{2m} A_{c\gamma}^2 \sigma_{c\gamma}$$

茲に $\sigma_{c\gamma}$ は Q が限界水深 $Hc\gamma$ なるときの限界勾配に表はす。又任意の水深に對しては

$$\frac{A^3}{B} = \alpha \frac{Q_{c\gamma}^2}{g} = \frac{\alpha C^2 A^2 R^{2m} \sigma}{g}$$

故に (6) 式は次の如く變形し得る

$$\frac{dH}{dx}\left(1 - \frac{A_{c\gamma}^2 R_{c\gamma}^{2m}}{A^2 R^{2m}} \frac{\sigma_{c\gamma}}{\sigma}\right) = -\sigma_{c\gamma} \frac{A_{c\gamma}^2 R_{c\gamma}^{2m}}{A^2 R^{2m}} \cdots\cdots (7)$$

$$\therefore \sigma_{c\gamma}\, dx = dH \left(\frac{\sigma_{c\gamma}}{\sigma} = \frac{A^2 R^{2m}}{A_{c\gamma}^2 R^{2m}}\right)$$

$$\frac{\sigma_{c\gamma}}{\sigma} = u \quad , \quad \frac{H}{H_{c\gamma}} = y \quad , \quad \frac{A^2 R^{2m}}{A_{c\gamma}^2 R^{2m}} = \left(\frac{H}{H_{c\gamma}}\right)^{2s+2m(s-k)} = y^r$$

但し $\gamma = 2s + 2m(s-k)$

とせば (7) 式より

$$x = \int \frac{H_{c\gamma}}{\sigma_{c\gamma}} (u - y^\gamma)\, dy + C \cdots\cdots (8)$$

(8)式にて C は積分常數なるが限界勾配の特性として

$$\mu m = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \int_{u_1}^{u_2} u\, dy$$

と置けば

$$l = x_2 - x_1 = \frac{H_{c\gamma}}{\sigma_{c\gamma}}\left\{um\,(y_2 - y_1) - \frac{y_2^{\gamma+1} - y_1^{\gamma+1}}{\gamma + 1}\right\} \cdots\cdots\cdots (9)$$

即ち水路に於ける背水公式は限界水深 $Hc\gamma$ 及び限界勾配 σcr を *Parameter* として表はすことを得る

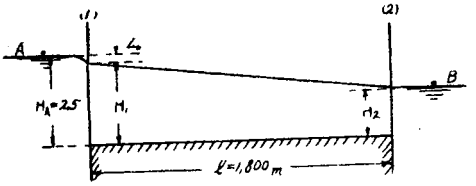
式中 γ は任意の t 狀斷面の水路に對して容易に算定し得るのである、即ち水深が H_1 と H_2 との間に變化するものとせば γ は次の如し。

$$\gamma = \frac{2\log\dfrac{A_2 R_2^m}{A_1 R_1^m}}{\log\dfrac{H_2}{H_1}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

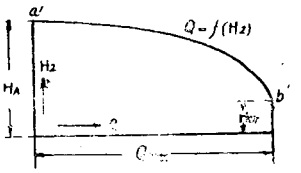
〔例〕 湖池の連結水平水路に於ける流量曲線

第 1 圖に示せる如き 2 個の貯水池 $A.B$ 間に 1 個の調整水平水路ありて兩池の水位を調整するものとせば水位の相對

第 1 圖



第 2 圖



位置によりて、水流は A より B に又は其の反對の方向に流るる場合を生ずるも、今 A 水面の最高水位が一定し、B 水面のみ變動するものとして、其の水位と流入量の關係を求むる必要あることありは。此の關係を水路終端 (2) の流量曲線と稱し、是は第 2 圖に示せる如き 2 個の特異點あり。

a' 點は $H_2 = H_A$ に相當し流量零なるを示し、b' 點は $H_2 = Hc\gamma$ にして流量最大なるを示す。

B 池の水位を更に下降せしめても、水路の流量及び流況には關係せぬから水路水面は最低位に達する。此の流量曲線を求むるには次の如き方法に據るを便とすべし

(1) 水路入口の水深 H_1 と流量 Q_1 の關係を求む、是を流入量曲線と云ふ。此の關係は

$$Q = vA_1 = Cv\,A_1\sqrt{2g\,(H_A - H_1)}$$

$$H_A = Const, \qquad Cv = \text{流速係數}$$

(2) 限界流量曲線を求む。是は水路終端 (2) に於ける種々なる限界水深たるときに於て、是等の水深と流量の關係を表はすものなり。即ち

$$Q = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \cdot A\sqrt{\frac{A}{B}}\quad Hcr$$

の關係なり。

(3) 限界勾配曲線を求む。即ち

$$\sigma = \left[\frac{gA}{\alpha C^2 BR^{2m}} \right] Hcr$$

の關係なり。

(4) 最大流量及び流量曲線

水路の最大流量を求むには限界流量曲線より種々なる $H_2 = Hcr$ に對應する限界流量を求め、流入量曲線より其の各流量に對する H_1 を定め H_1 H_2 間に (9) 式を適用して背水距離 l を算定す。

斯くして l と限界流量 Q の關係を曲線にて表はしおくときは與へられたる水路の長さに對應する最大流量を求むる。流量曲線の中間(第2圖 a' b' 曲線)の諸點を求めれとせば、最大流量に對する Hcr 以下の限界水深を假定して是に對應する限界流量，限界勾配を定め更に H_1 λ_1 δ_1 μ_1 を用ひて (9) 式より y_2 從て H_2 を得。

【3.】 逆勾配水路に於ける自由水面

此の際の運動方程式は

$$I = -io - \frac{dH}{dx} = \frac{Q^2}{C^2 R^{2m} A^2} - \alpha \frac{Q^2}{g} \frac{B}{A^3} \frac{dH}{dx} \cdots\cdots\cdots (11)$$

$Q = C^2 R_o^{2m} A_o^1 i_o^1$　　$\frac{B}{A^3} = \frac{g}{\alpha C^2 A^2 R^{2m} \sigma}$ とせば　逆勾配水路に對する微分方程式は

$$\frac{dH}{dx} = -io \frac{1 + \frac{A_o^2 R_o^{2m}}{A^2 R^{2m}}}{1 - \frac{io}{\sigma} \frac{A_o^2 R_o^{2m}}{A^2 R^{2m}}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

$\frac{A^2 R^{2m}}{A_o^2 R^{2m}} = y$ ，$\delta = \frac{io}{\sigma}$ とし　限界勾配の特性として

$$\frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} (1 + \delta)\, dy = 1 + \delta m \text{ と置けば}$$

逆勾配水路に於ける　$y_1 = \frac{H_1}{Ho}$　　$y_2 = \frac{H_2}{Ho}$　間の自由水面を決定する

式として　$l = x_2 - x_1 = \frac{Ho}{io} \left\{ (y_2 - y_3) + (1 + \delta m) \right\} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{1 + y^r} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$

なる式を得るが(13)式の右邊の積分を行ふには $\frac{1}{1+yr}$ を收斂級數に展開し積分せねばならぬが y 及び Υ の各値に對して之ら計算することは頗る複雑で是に代るべきは圖式解法である。

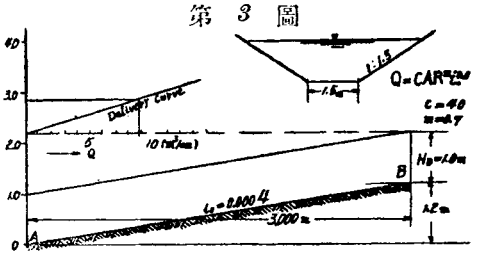
今　實際起り得る　$\Upsilon = 3. \sim 4$　　$y = 0 \sim 5$　の範圍内に於て $\int_0^y \frac{dy}{1+y^r}$ ら圖式計算にて求め　$y = \frac{H}{Ho}$ と $\int_0^y \frac{dy}{1+y^r}$　の關係を對數座標にて示せば 第3圖及第4圖の如し

〔計算例〕

第5圖に示せる如き梯形水路の長さが 3.000m にして A 端にて海洋と B 端にて廣大なる内湖水連結するものとせば A 端に於ける海洋水位と流量の關係を示す

Delivery curve を求む

第 3 圖



$$Q = C\,A_o\,R_o^{m}\,i_o^{0.5} \qquad i_o = 0.0004$$

$$l = 3.000m \qquad C = 40 \qquad m = 0.7$$

とし　水深は $1m$ より $3m$ 迄變化するものと假定せば

$$\sigma = \frac{i_o}{\sigma} = 0.0597 \sim 0.0803$$

$$1 + \sigma m = 1.07 \qquad \gamma \doteqdot 3.8$$

(B) 式より　$l\dfrac{i_o}{H_o} = \left\{-y_2 + (1+\delta m)\displaystyle\int_0^{y_2}\frac{dy}{1+y^{\gamma}}\right\} - \left\{-y_1 + (1+\delta m)\displaystyle\int_0^{y_1}\frac{dy}{1+y^{\gamma}}\right\}$

$$= Z(y_2) - Z(y_1)$$

$H_o = 1.5m$, $Q = 8.97m^3/sec$　とせば　$l\dfrac{i_o}{H_o} = 3.000\,\dfrac{0.0004}{1.5} = 0'8$

$$y_2 = \frac{H_B}{H_o} = 0.667 \qquad \int_0^{y_2}\frac{dy}{1+y^{\gamma}} = 0.644 \quad (第3圖)$$

$$Z(y_2) = \left\{-0.667 + 1.07 \times 0.644\right\} = -0.022$$

$$Z(y_1) = Z(y_2) - i\frac{i_o}{H_o} = -0.778$$

$$= -y_1 + (1+\delta m)\int_0^{y_1}\frac{dy}{1+yv}$$

試算にて　$y_1 = 1.9$　　$Z(y_1) = -0.7594.$

$= 2.0$　　$Z(y_1) = -0.852\,.$

$= 1.95$　　$Z(y_1) = -0.8062.$

仍て　$y_1 = 1.92$　　$H_1 = y_1\,H_o = 2.88$　　$Q = 8.97m^3/sec$

を得。同樣に他の水深 H_o を假定して逐次計算せば

Deliuery cuwe を得、(昭和14年4月)附表30頁參照

〔附記〕本文は機械學會の第11回滿洲地方講演會(2月9月及10月)に於ける講演論文である。