

(2)

複素函數論の水理學への適用(其の二)

※ 永 井 莊 七 郎

5 直角端附近に於ける流線の分布

(1) 重力なき流體自由表面

圖-22 に示す如き開水路の底が直角に段落ちになつてゐる場合、重力を考慮せざる完全流體の流水の状態を調べて見る。

Schwarz の變換を行へば、 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = +\frac{\pi}{2}$ であるか

$$Z = k_1 \int_0^z (a-z)^{\frac{1}{2}} (b-z)^{-\frac{1}{2}} dz + k_2$$

半平面の原点を a に、 $b = 1$ に取り、 $d_1 = 1$, $k_2 = 0$ に

置けば

$$Z = \int_0^z \sqrt{\frac{Z}{1-Z}} \cdot dz \dots\dots\dots (1)$$

之を積分すれば

$$Z = \sin^{-1} \sqrt{z} - \frac{1}{2} \sin \{ 2 \sin^{-1} \sqrt{z} \} \dots\dots\dots (2)$$

$\sqrt{z} = u$ と置けば

$$Z = \sin^{-1} \sqrt{z} - \frac{1}{2} \sin \{ 2 \sin^{-1} u \} \dots\dots\dots (3)$$

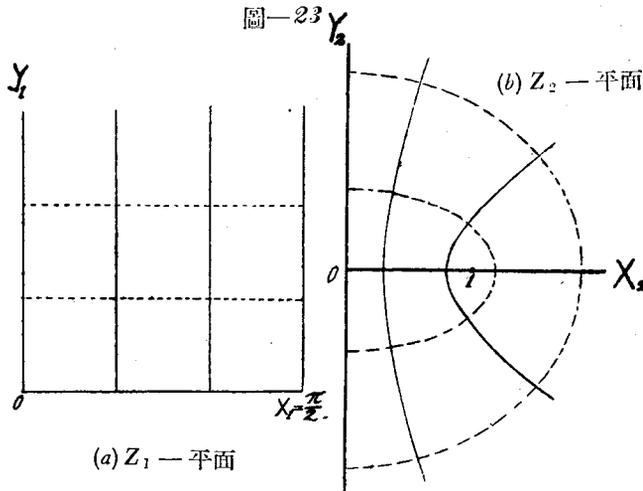
更に $\sin^{-1} u = Z_1$ 及び $\sin \{ 2 \sin^{-1} u \} = Z_2$ と置けば

$$Z_2 = \sin(2Z_1)$$

故に(3)式は

$$Z = Z_1 - \frac{1}{2} Z_2 \dots\dots\dots (4)$$

となる



函数 $Z_1 = \sin^{-1} u$ により得られる等角寫像から、圖-23 (b) に於ける双曲線と楕圓との群は圖-23 (a) の縦横の平行直線群に對應することが判る而も (b) 圖の第一象限は (a) 圖の $X_1 = 0$ から $X_1 = \frac{\pi}{2}$ までの領域に對應する。

同様にして $Z_2 = \sin(2Z_1)$ なる等角寫像は圖-24, (a) 及 (b) の對應である。

同様にして $Z_2 = \sin(ZZ_1)$ なる等角寫像は圖-24 (a) 及 (b) の對應である。

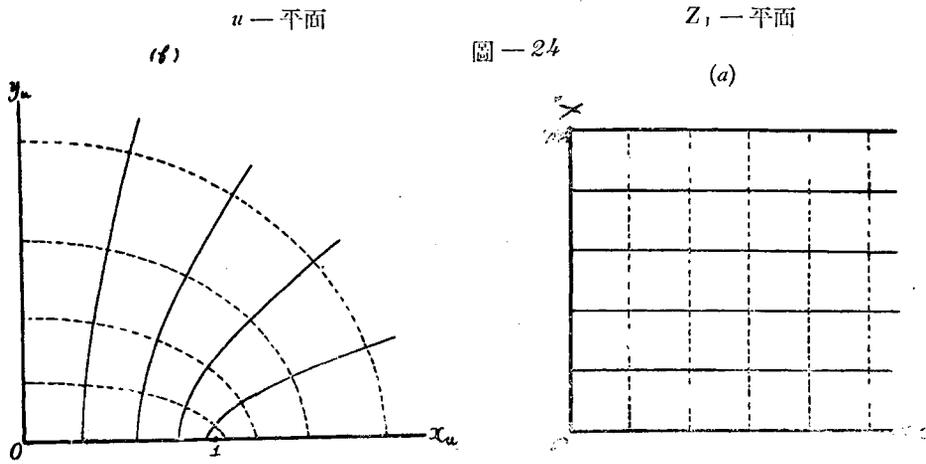


圖-23 及び 圖-24 より u の同一の値に對して Z_1 及び Z_2 の値が得られるから Z -平面上に $u = \text{一定}$ なる軌跡を描けば 圖-25 が得られる。(圖-25別紙参照)

次に流線を得る爲に $u = \sqrt{z}$ なる等角寫像を用ひ、圖-26 (b) を 圖-23 (a) の上に重ね、圖-26 (b) 圖の曲線群を 圖-25 に寫像すれば 圖-27 を得る。(圖-26 圖-27別紙参照)

(2) 圖-27 の曲線群を境 CD に對稱に描けば 圖-28 を得る。

之は水を完全流體と考へた場合の、河中に橋脚を設置した場合の流水の状態を示すものである。

圖-28(a) (bは別紙参照)

(3) 矩形暗渠の底が直角に段落になつた場合

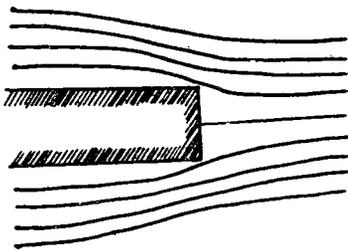


圖-29 の如き場合の流線の分布を考ふ。(圖-29別紙参照)

圖-29 の領域内の曲線群を半平面に寫像するには $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = +\frac{\pi}{2}$ 及び $\alpha = +\pi$ であるから

$$Z = k_1 \int_0^z (a-z)^{\frac{1}{2}} (b-z)^{-\frac{1}{2}} (c-z)^{-1} dz + k_2$$

半平面の原點を C にとり $b = 1$ にとり、 $k_1 = 1$ 及び $k_2 = 0$ と

置けば

$$Z = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-z}} \sqrt{\frac{a-z}{1-z}} dz \dots \dots \dots (5)$$

$$\sqrt{\frac{a-z}{1-z}} = t \text{ と置くと } \frac{a-z}{1-z} = t^2 \quad \therefore Z = \frac{t-t^2}{1-t^2} \quad dz = \frac{2t(a-1)}{(1-t^2)^2} dt$$

従つて(5)式は

$$\begin{aligned} Z &= \int \frac{1-t^2}{a-t^2} \cdot t \cdot \frac{2t(a-1)}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{2t^2(a-1)}{(a-t^2)(1-t^2)} dt = \int \frac{-2a}{a-t^2} dt + \int \frac{2}{1-t^2} dt \\ &= \sqrt{a} \log\left(\frac{\sqrt{a-t}}{\sqrt{a-t^2}}\right)^2 - \log\left(\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2 \end{aligned}$$

$t = \sqrt{\frac{a-z}{1-z}}$ を入れると

$$\begin{aligned}
Z &= \sqrt{a} \log\left(\frac{\sqrt{a}\sqrt{1-z}-\sqrt{a-z}}{\sqrt{z(1-a)}}\right)^2 - \log\left(\frac{\sqrt{1-z}\sqrt{a-z}}{\sqrt{1-a}}\right)^2 \\
&= \sqrt{a} \log \frac{2a - (1+a)z - 2\sqrt{a}\sqrt{(1-z)(a-z)}}{z(1-a)} \\
&\quad - \log \frac{(1+a) - 2z - 2\sqrt{(1-z)(a-z)}}{1-a} \dots\dots\dots (6)
\end{aligned}$$

今 $Z_1 = \sqrt{a} \log \frac{2a - (1+a)z - 2\sqrt{a}\sqrt{(1-z)(a-z)}}{z(1-a)}$ と置くと

$$e^{\frac{z_1}{\sqrt{a}}} = \frac{2a - (1+a)z - 2\sqrt{a}\sqrt{(1-z)(a-z)}}{z(1-a)}$$

$$e^{\frac{z_1}{\sqrt{a}}} = \frac{2a - (1+a)z + 2\sqrt{a}\sqrt{(1-z)(a-z)}}{z(1-a)}$$

従つて
$$\frac{e^{\frac{z_1}{\sqrt{a}}} + e^{-\frac{z_1}{\sqrt{a}}}}{2} = \frac{2a - (1+a)z}{z(1-a)} = \cosh \frac{z_1}{\sqrt{a}}$$

$$\therefore Z_1 = \sqrt{a} \cosh^{-1} \left\{ \frac{2a - (1+a)z}{z(1-a)} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

同様にして

$$Z_2 = \log \frac{(1+a) - 2z - 2\sqrt{(1-z)(a-z)}}{1-a}$$

と置くと

$$e^{z_2} = \frac{1+a - 2z - 2\sqrt{(1-z)(a-z)}}{1-a}$$

$$e^{-z_2} = \frac{1+a - 2z + 2\sqrt{(1-z)(a-z)}}{1-a}$$

従つて

$$\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} = \frac{1+a - z}{1-a} = \cosh z_2,$$

$$\therefore Z_2 = \cosh^{-1} \left\{ \frac{1+a - z}{1-a} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

(7)式中 $X = \frac{2a - (1+a)z}{z(1-a)} = \frac{2a}{1-a} - \frac{1}{z} - \frac{1+a}{1-a}$ 及び $b = \frac{2a}{1-a}$ と置くと

$$z = \frac{b}{X + 1 + b} \dots\dots\dots (9)$$

$1 > a > 0$ と假定して $X = \text{一定}$ 及び $y = \text{一定}$ の軌跡を描けば 圖-30 を得る。

今 $Z = iZ_1 - \frac{\pi}{2}$ 及び $z = e^{i\pi} X$ と置いて $Z = \sin^{-1} z$ の中に入れると、

$$-X = \sin\left(iZ_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos iZ_1 = -\cosh Z_1 \dots\dots\dots (10)$$

函数 $X = \cos Z_1$ あり得られる等角寫像から、圖-31(a)の縦横の平行直線群が 圖-31(b)の楕圓及び双曲線群に對應することが明かである。即ち $X_1 < 0$ で $Y_1 = 0$ から $Y_1 = -\pi$ までの領域が (b)圖の $Y > 0$ なる半平面に對應する。

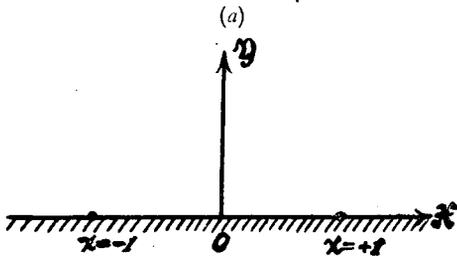
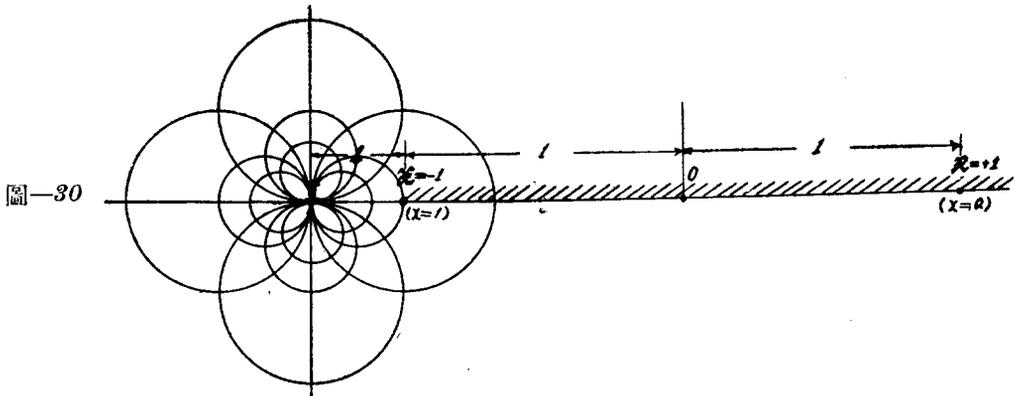
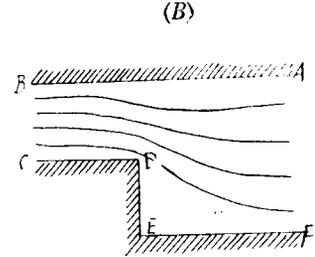


圖-31



$X = \cosh Z_1$ の兩邊に $e^{i\pi}$ を掛
けると

$$e^{i\pi} X = e^{i\pi} \cosh Z_1$$

即ち $-X = -\cosh Z_1$

故に(10)式の函數に依り得
られる等角寫像は圖-31を
 π 角だけ廻轉したものである
即ち圖-32(a)及び(b)である

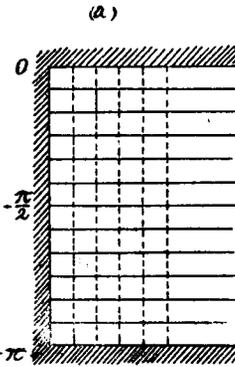


圖-32

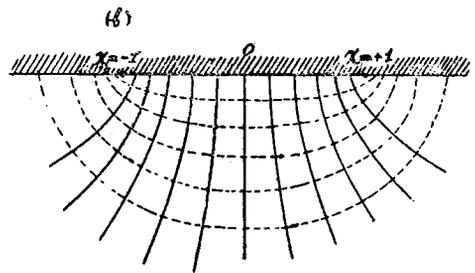


圖-30の $X = \pm 1$ が圖-32(b)の $X = \pm 1$ の上に夫々一致
する如く重ね、圖-30の曲線群を圖-32(a)の領域内に等角寫
像すれば圖-33が得られる。次に $\frac{1+a+2z}{1-a} = X$ と置くと
圖-34を得る。

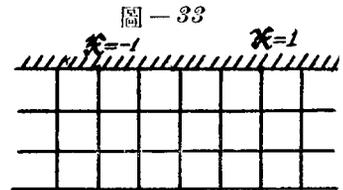


圖-34の ± 1 が圖-32(b)の $X = \pm 1$ の上に夫々一致する如く重ね、圖-34の直線群を
圖-32(a)の領域内に等角寫像すれば圖-35を得る。(圖-35別紙参照)

圖-33及び圖-35から z の同一の値に對して Z_1 及び Z_2 の値が得られるから、 z の種々の値に
對して Z_1 及び Z_2 を求め兩者を組合せば、 Z -平面内に等角寫像

$$Z = Z_1 - Z_2 \dots \dots \dots (11)$$

を得る。圖-36は之である。(圖-36別紙参照)

$z = 0$ から $z = \infty$ に向ふ流線を得るため

$$z = e^{\zeta} \dots \dots \dots (12)$$

なる變換を行ふ。

$$\zeta = \xi + iy$$

と置けば(12)式から $\xi = \text{一定}$, $y = \text{一定}$ なる軌跡は z -平面に於いて夫々同心圓及び放射線である。之等の曲線群を圖-26(a)の上に重ね、圖-36の領域内に等角寫像すれば圖-37を得る。

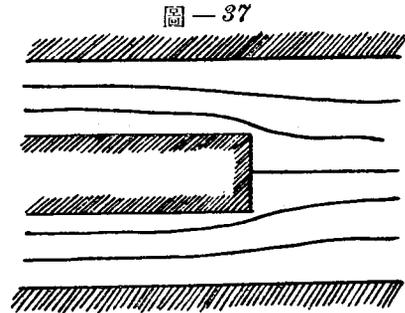
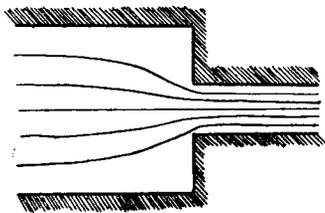


圖-37

(4) 圖-29を境 AB に對稱に描けば圖-38が得られる

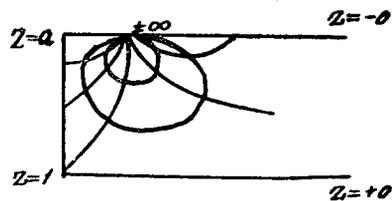
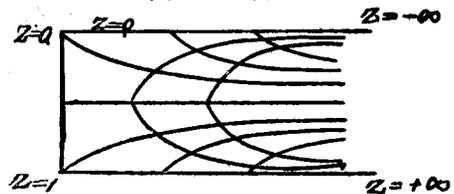
圖-38(a) ((b)別紙参照)



之は水路断面の急縮或は急擴の場合の流線の分布状態を示すものである。水を完全流體と考へ、渦流が生じない所謂整流(Laminarströmung)に於ては、水路断面の急縮の場合も急擴の場合も流水の状態は全く同一である事になるのである。

(5) 圖-29を境 EF に對稱に描けば圖-39((a)別紙参照)を得る。之は河中に矩形の構造物例へば矩形橋脚の存在する場合の流線分布を示すものである。

圖-39 (a)



6 自由面を有する流體の問題

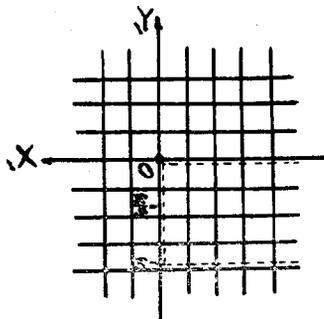
元來等角寫像に於ては先づ境が與へられて初めて問題が解けるのであるが自由表面では $p = 1$ (或は $p = 0$) が與へられるけれども其の境の形が與へられない。それで自由面を有する場合は、先づ與へられた境の形に依り寫像函數を決定し、それより速度を求め、速度が求まれば Bernoulli の定理に依り壓力が求まる。斯様に境を或る既知の函數の如くして壓力を求め、其の壓力が 1 (或は零) なることから逆に寫像函數を求めるのである。

此の際我々は一の微分方程式を解かなければならない。然して其の解を得ることは相當困難である。

それで著者は、自由面を有する問題を圖式的に解くことを認めしたが其の結果比較的容易に其の目的を達することが出來た。

圖-40 に示す如き水路の底が直角に段落ちになつてゐる時、段落ちの下流の水位を次第に上昇せしめ、其の水位が上流の水路底附近に達すると、段落ちより下流側に恰も跳水現象後の定常波

圖-40



の如き波が生ずる、下流水位を更に増すと波は稍々緩かになる。

著者は斯くの如き波の存在を數學的に證明し、其の寫像函數を見出さんと。

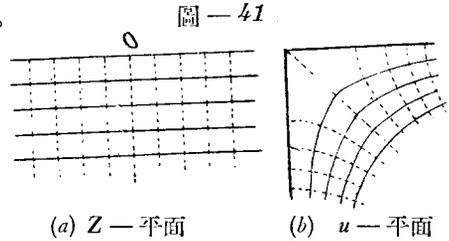
圖—40の自由面の波形を圖—37上に寫し、それを圖—37に對應する方眼面内に寫す。然る後圖—41に寫すと、波形は $Y = 1.0$ なる曲線に一致する。

以上の圖式的關係より次の數學的關係を得る。

$$Z = \sqrt{a} \log \frac{2a - (1+a)u - 2\sqrt{a}\sqrt{(1-u)(a-u)}}{u(1-a)} - \log \frac{(1+a) - 2u - 2\sqrt{(1-u)(a-u)}}{1-a} \dots (13)$$

$$u = e^z \dots \dots \dots (14)$$

$$Z' = z + \frac{1}{z} \quad \text{或は} \quad z = \frac{Z' \sqrt{Z'^2 - 4}}{2} \dots \dots \dots (15)$$



此の場合 $z = \frac{Z' + \sqrt{Z'^2 - 4}}{2}$ は不適合である。以上3式より求たる波の寫像函數は

$$Z = \Psi(Z')$$

である事が考へられる。今式中の文字の紛はしさを避ける爲 Z' の代りに χ を用ふれば

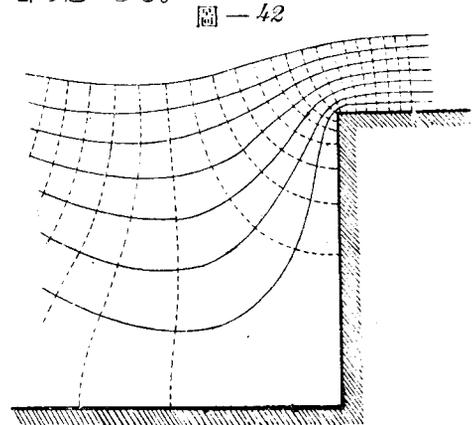
$$Z = \Psi(\chi)$$

即ち

$$Z = \sqrt{a} \log \frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - 4}}{2} - (1+a)e^{\frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - 4}}{2}} - 2\sqrt{a} \sqrt{\left(1 - e^{\frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - 4}}{2}}\right) \left(a - e^{\frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - 4}}{2}}\right)} - \log \frac{(1+a) - 2e^{\frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - 4}}{2}}}{1-a} - 2 \sqrt{\left(1 - e^{\frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - 4}}{2}}\right) \left(a - e^{\frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - 4}}{2}}\right)} \dots \dots \dots (16)$$

之を求むる波の寫像函數である。圖—41の $Y = 0$ より $Y = 1.0$ 迄の間の流線及等位線を圖—37上に寫像すれば求むる流線の分布が得られる。圖—42は即ち之である。

*Fri Prasil**は重力を考慮せる自由流線の問題に就いて、特殊な境の條件の許に寫像函數を見出してゐる即ち自由流線の形狀が一の函數で表はし得る場合に就いて論じてゐる。然るに實際上の水理學の問題に於ては、自由流線の形狀を或一の函數で表はし得る事は特殊な場合を除いては、一般に稀である。されば與へられた自由流線を種々の面に等角寫像して解析的に解決して後寫像函數を求むる方法が遙かに適用範圍が大であると考へる。著者は今後斯る方法に因り水理學の



實際的問題を解決しやうと考へてゐる。

本文は北海道帝大理學部教授池田博士指導に因り著者が計算せるものにして、*Mem. Fac. Eng. Hokkaido Imp. Univ., Vol. 4, No. 1.* に發表せるものを、一般の土木技術者に紹介する目的を以て土木技術者の立場より平易に説明したるものである。

終りに臨み常に御懇篤なる御指導を賜つた池田芳郎博士に對し衷心より謝意を表する次第である。

※ *Fri Prasil ; Technische Hydrodynamik, S. 197~S. 236.*

出版物發賣
通知

推獎すべき簡易舗裝の構造と維持

東京市土木局管理課長 山本 亨 著 定價 ¥1.00

内 容 目 次

- | | |
|-------------------------|-----------------|
| 1. 總 說 | 10. 表 面 處 理 |
| 2. 簡易瀝青舗裝の沿革 | 11. 表面處理と交通 |
| 3. 簡易瀝青舗裝の語義 | 12. 表面處理と氣象 |
| 4. 路盤と表層 | 13. 表面處理と周圍の狀況 |
| 5. 路盤の沈下量測定方法 | 14. 表面處理の材料 |
| 6. 舗裝の龜裂と路盤沈下量 | 15. 表面處理の破損原因 |
| 7. 路盤厚と沈下量 | 16. 表面處理の維持 |
| 8. 表層とフレキシビリティー | 17. 表面處理の修繕方法 |
| 9. フレキシブルサーフェーシングと骨材の粒度 | 18. 表面處理の築造と維持費 |
| | 19. 多層式表面處理 |

第3回土木講習會講演集

四六倍判210餘頁 定價1.20 (但シ會員=限り ¥1.00)

内 容 目 次

- | | | |
|-------------------|--------------|-----------|
| 1. 開會之挨拶 | 理 事 | 坂 田 昌 亮 |
| 2. 遼河改修計畫 | 交 通 部 | 原 口 忠 次 郎 |
| 3. 道路の構造物の凍害に就て | 交 通 部 | 米 田 正 文 |
| 4. 河川の基本調査に就て | 交 通 部 | 照 井 隆 三 郎 |
| 5. 塞中コンクリートの現勢 | 土 建 協 會 | 眞 鍋 簡 好 |
| 6. 河川の氷害 | 交 通 部 | 橋 内 德 治 |
| 7. 朝鮮の河川 | 鮮 朝 總 督 府 | 川 澤 章 明 |
| 8. 最近のセメントの趨勢に就いて | 小野田セメント鞍山工場長 | 西 脇 寬 司 |
| 9. 土木工事に滿洲産木材に就いて | 滿鐵々道研究所 | 布 施 忠 司 |

圖 — 25

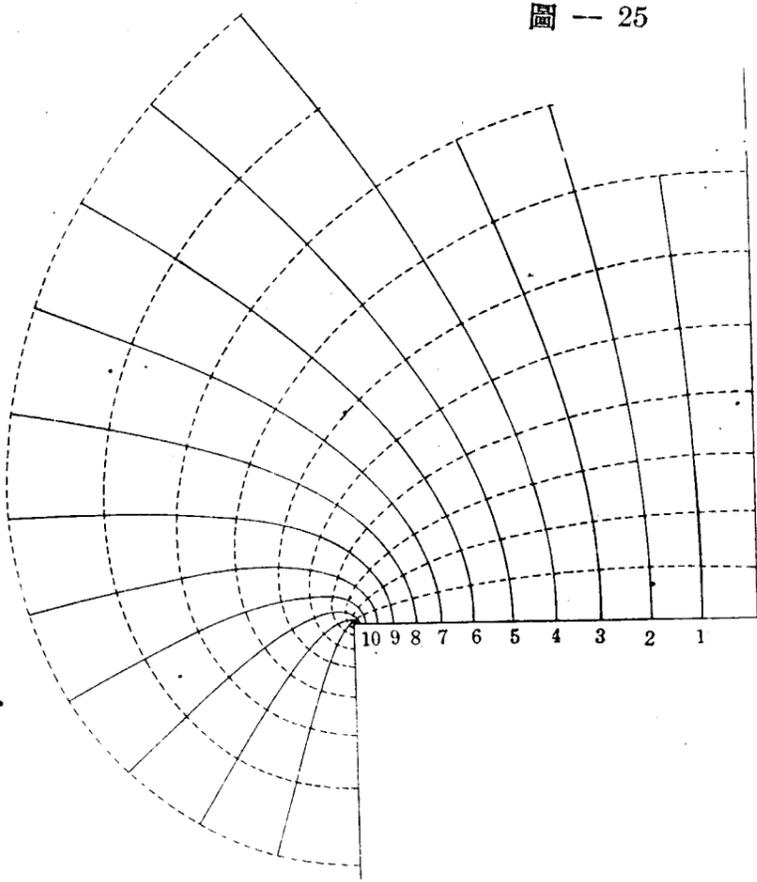
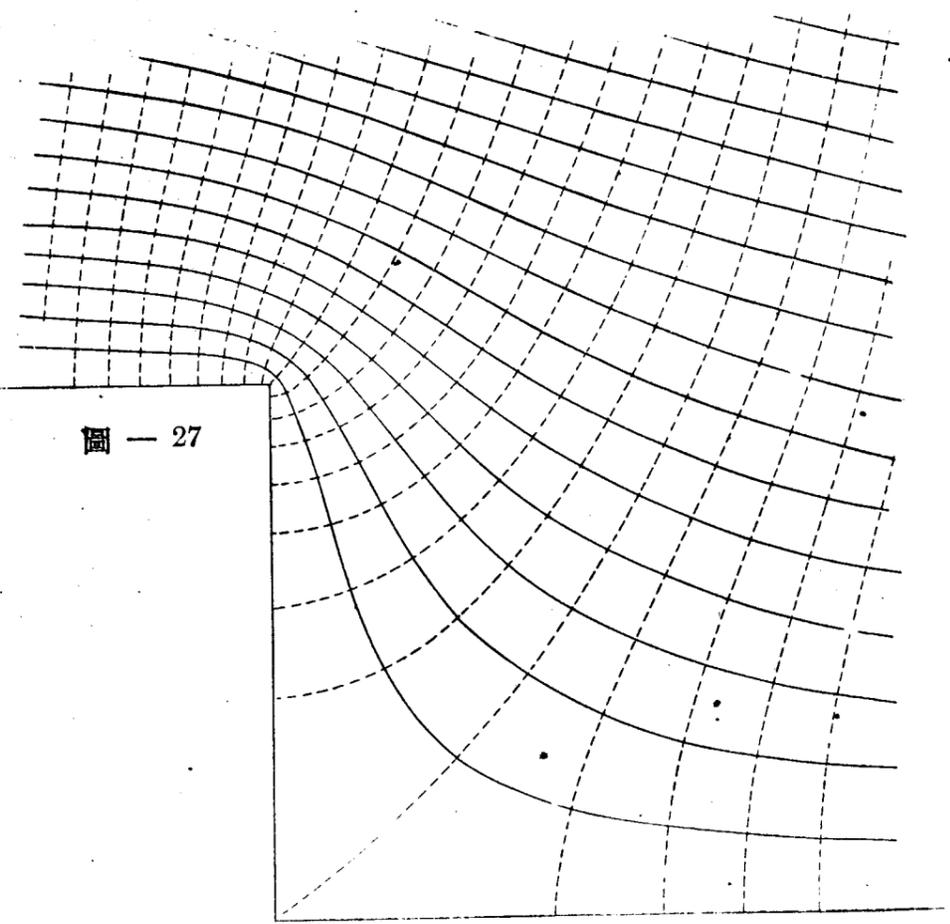
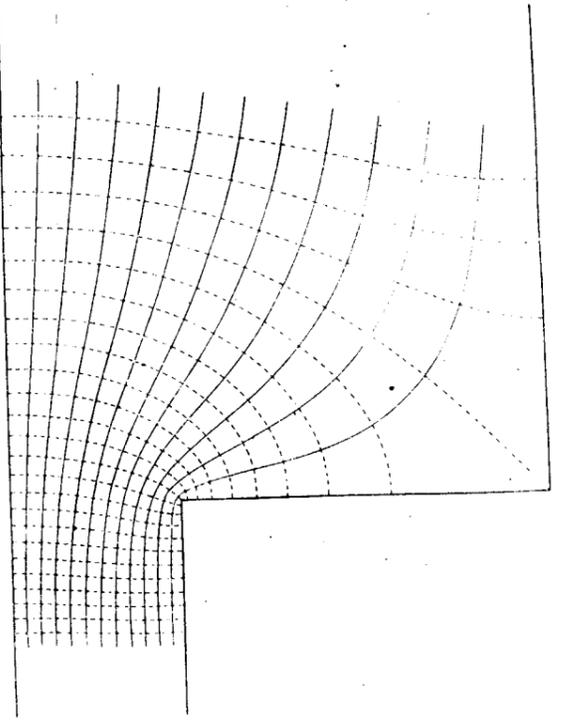


圖 — 27

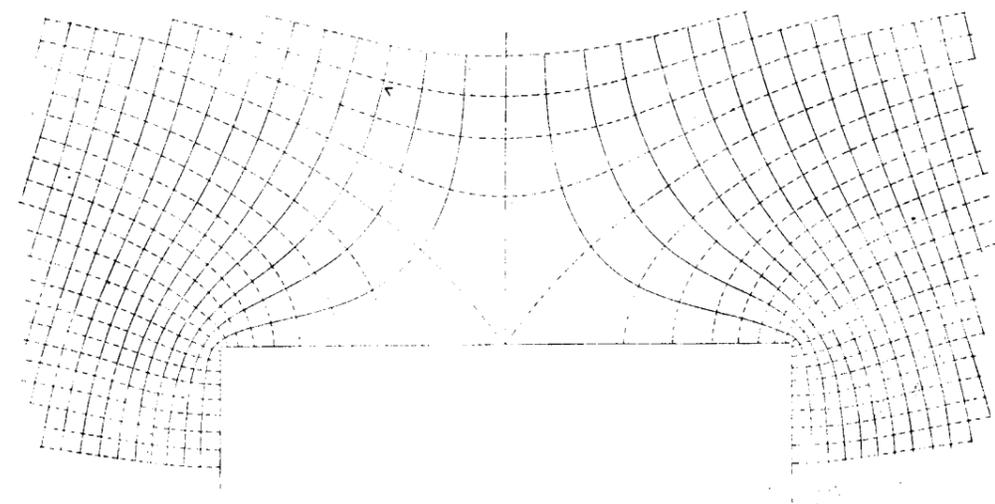


(Y. Ikeda and S. Nagai: Streamlines n. Rect. Edge 1-53)

圖 — 35

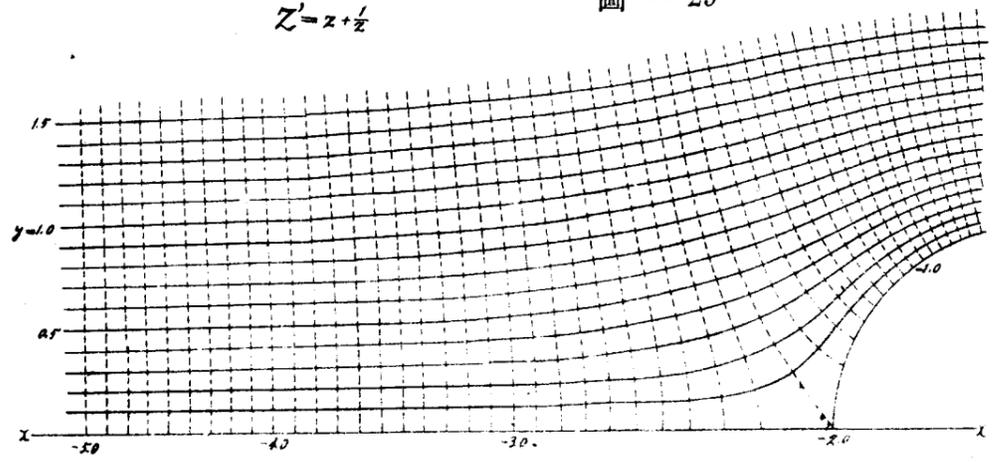


Streamlines near the Rectangular Edge.
 Mem. Fac. Eng., Hokkaido Imp. Univ., Vol. 1, No. 1 (1-53) 圖 — 28(b)



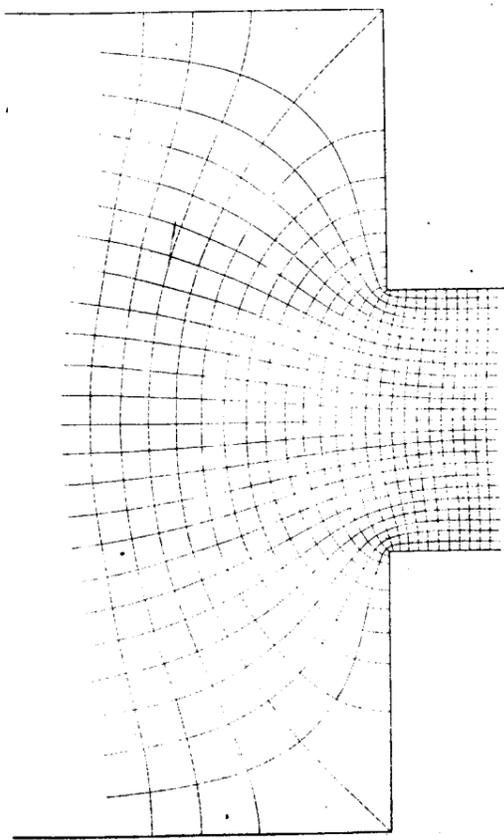
$Z' = z + \frac{1}{z}$

圖 — 29



Y. Ikeda,

圖 — 38(b)



Edge 1=53)

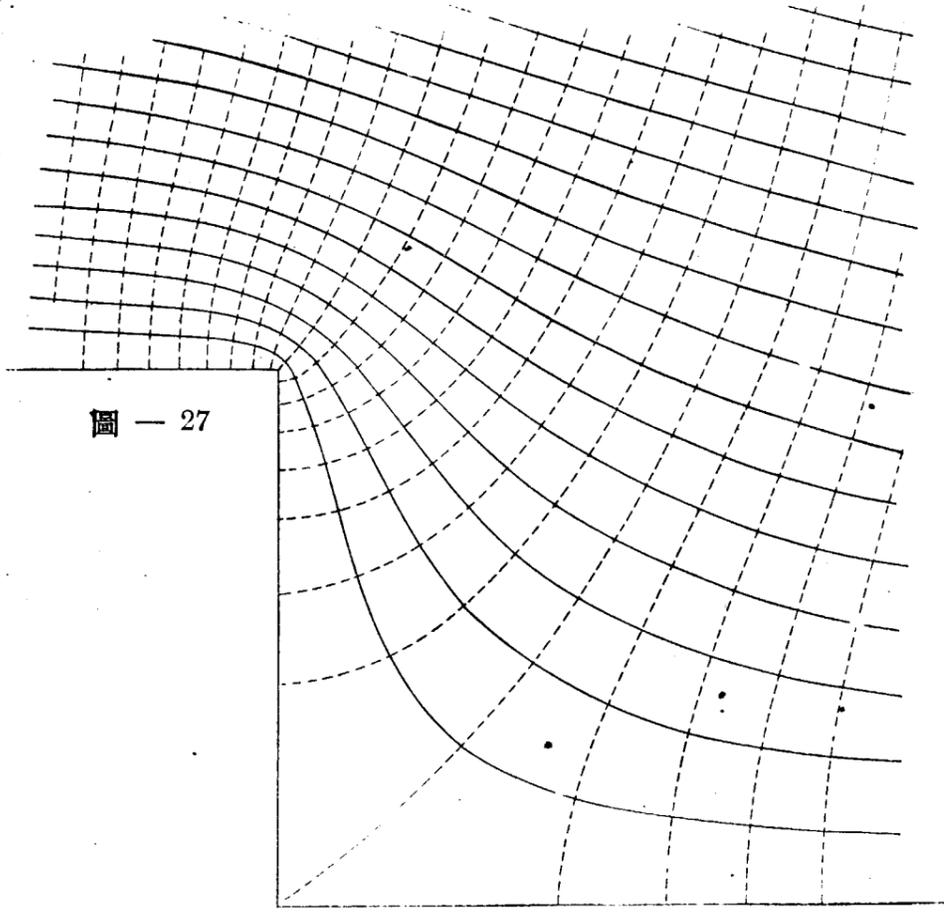


圖 - 27

(Y. Ikeda and S. Nagai: Streamlines n. Rect. Edge 1=53)

$$Z' = z + \frac{1}{z}$$

圖 - 29

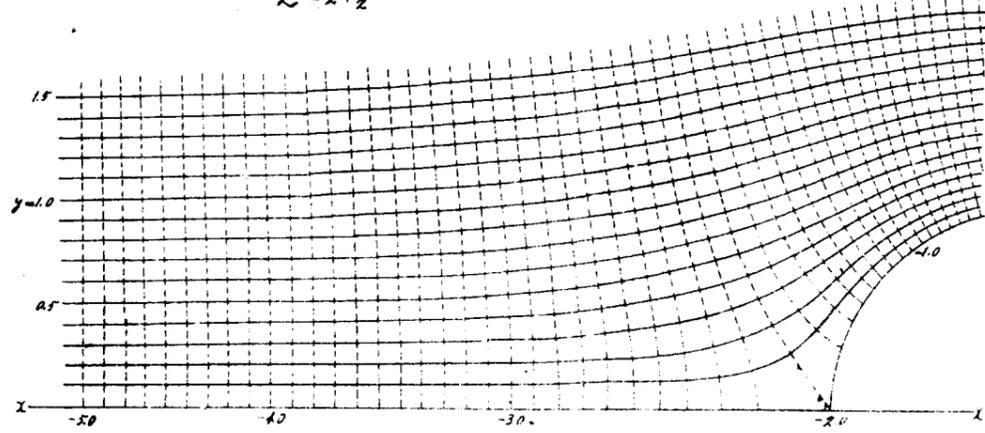
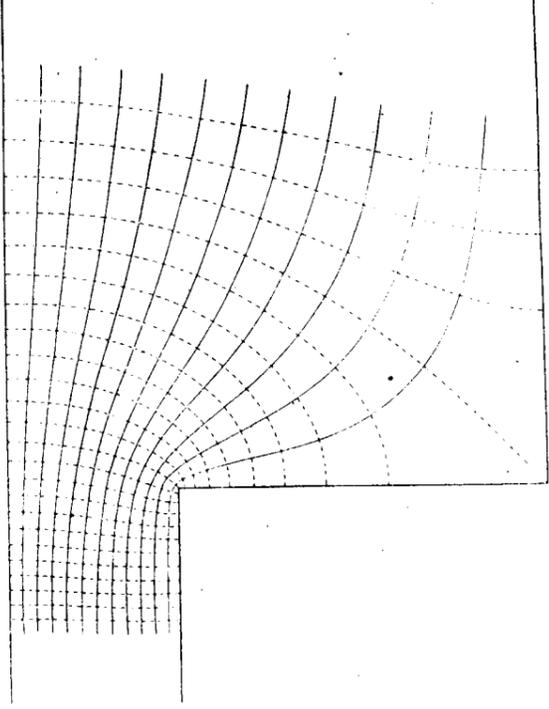


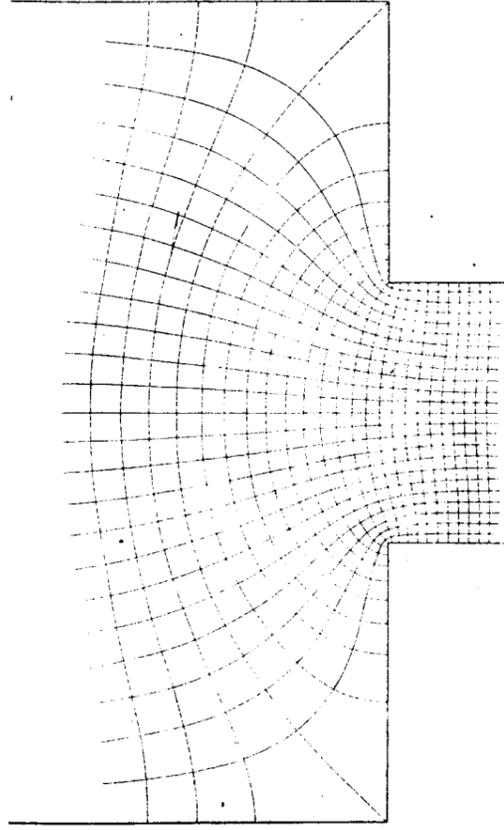
圖 - 35



Mem. Fac. Eng. Hokkaido Imp. Univ., Vol. 1, No. 1

Y. Ikeda,

圖 - 38(b)



(Mem. Fac. Eng. Hokkaido Imp. Univ., Vol. 1, No. 1, p. 53) 圖 - 36

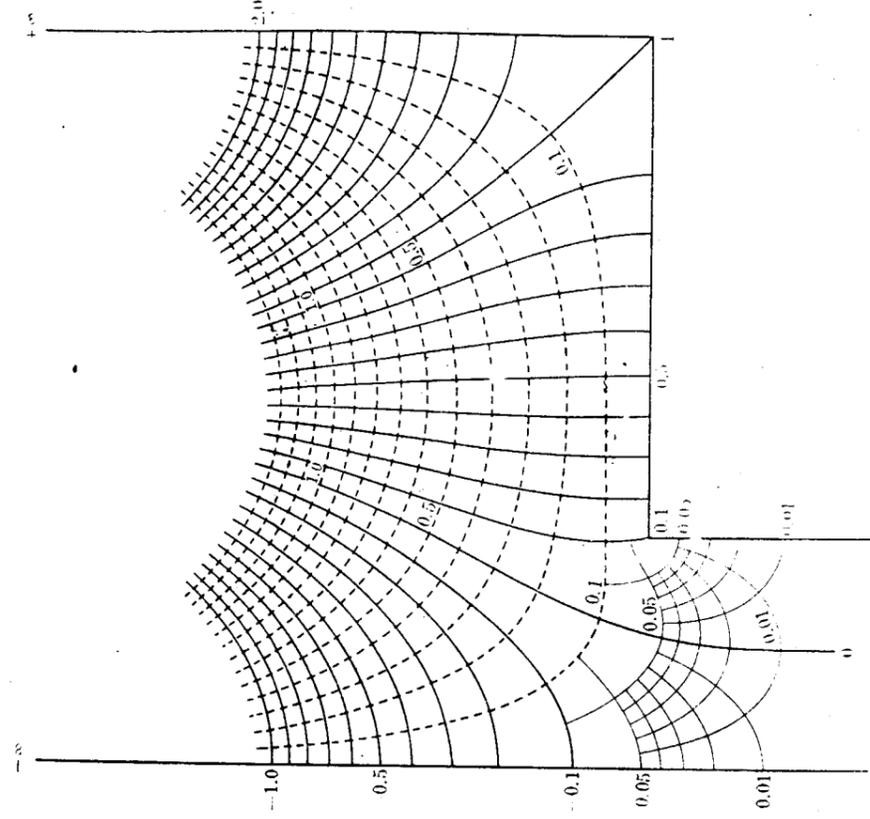
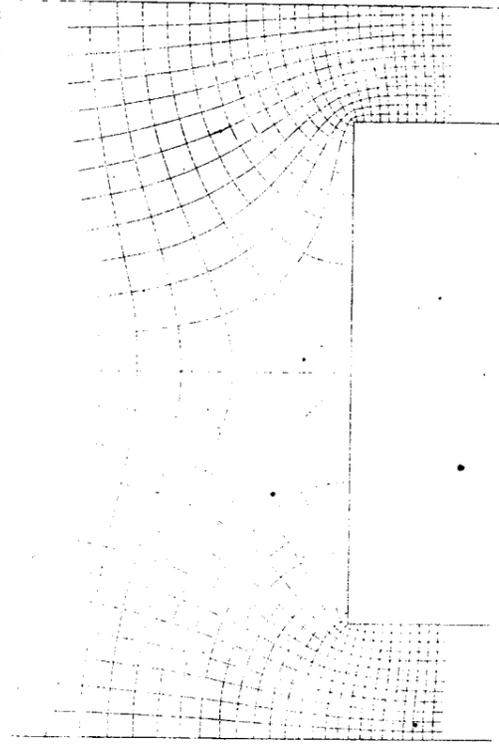


圖 - 39(b)

Pl. VII



Y. Ikeda, S. Nagai, F. Sakuma and T. Takahashi: Streamlines near the Rectangular Edge.