

# 堤体下部への滲透流に対する変分法の応用

正 員 嶋 祐 之\*

## ON THE APPLICATION OF VARIATION PRINCIPLES TO SEAPAGE PROBLEMS UNDERNEATH DAMS

(Trans. of JSCE, No. 29, Dec. 1955)

Sukeyuki Shima, C.E. Member

**Synopsis** In the case of uniform permeability, many seepage problems underneath dams have been solved by the method of conformal representation. The following problems, however, with continuously varied permeability in vertical direction or with two different but uniform permeabilities have not been solved, because the above method is not available.

In this paper, the author has treated these problems and obtained their solutions by the following method. At first the general solutions which satisfy the fundamental equations have been introduced in the form of infinite integral, then by means of Fourier integral and so forth the arbitrary functions contained in the integrand have been determined so as to satisfy some of the boundary conditions. At last the arbitrary functions which can not be obtained a priori due to the nature of "mixed" boundary conditions have been determined by the principle of variation (Friedrichs transformation).

**I. 要旨** 堤体下部への滲透流の問題は、透水係数が一様の場合には等角写像法により、数多くの場合について解かれている<sup>1)</sup>。しかしながら垂直方向に透水係数が連続的に変化する場合や、相異なる二つの透水係数を持つ透水層のあるときは、上述の方法が利用できないので、まだ解かれていなかった。本文では筆者はこのような問題を取扱い、つぎのような方法によりそれらの解をえた。すなわち最初に基礎方程式を満足する解を無限積分の形式で与え、つぎに Fourier 積分等を用いることにより全境界条件のうちいくつかのものを満足するように積分内に含まれる任意函数を決定する。

最後に複合境界条件である故に、アプリオリには求められない任意函数を変分法 (Friedrichs 変換<sup>2)</sup>) を用いて決定したものである。

### II. 垂直方向に透水係数が増加する場合の解法

(1) 基礎方程式及び境界条件 図-1 に示すように深さ  $h$  の透水層があり、層内の土砂が深くなるにつれて次第に詰まつていて、透水係数  $k$  が

$$k = k_0 \left( \frac{y}{h} + 1 \right)^m ; m > 0 \dots \dots \dots (1)$$

で示すように変化していると考え。ただし  $k_0$  は地表面での透水係数を表わしている。

堰体の前後の圧力差  $\Delta p$  により滲透流を生ずるのであるが、この際流れは Darcy 法則に従うものとする。

そうすると圧力  $p$  の満足すべき基礎方程式は  $k$  が一様でないことを考慮すればつぎのようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

いま  $y_0 = y + h$  とおき (1) を (2) に代入すれば

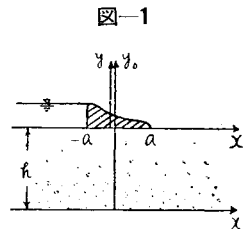
$$y_0^m \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y_0} \left( y_0^m \frac{\partial p}{\partial y_0} \right) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

境界条件は一般性を失わぬ範囲で

$$y_0 = h ; -a < x < a, \quad \frac{\partial p}{\partial y_0} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} a < x < \infty, \quad p &= -\frac{\Delta p}{2} \\ -\infty < x < -a, \quad p &= +\frac{\Delta p}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

$$y_0 = 0 ; \quad \frac{\partial p}{\partial y_0} = 0 \dots \dots \dots (6)$$



\* 東京大学助教授，工学部土木教室

とおくことができる。上記境界条件のうち、最も問題となるのは  $y_0=h$  の条件で (4) と (5) とで示されるように一部は  $p$  の値で他の一部は  $\frac{\partial p}{\partial y_0}$  の値で境界値が与えられていることである。すなわち複合境界値問題であつて、一様な透水係数を持つ場合のほかは等角写像法を利用するわけにはゆかない。そこで直接解法で問題を解くことが必要になる。

(2) 特解の誘導 特解を  $p=e^{\pm i\alpha x}\varphi(y_0)$  と仮定して (3) に代入すれば、 $\varphi$  についての常微分方程式がえられこれを解けば<sup>3)</sup>

$$\varphi = y_0^{\frac{1-m}{2}} z_{1-\frac{m}{2}}(y_0 i \alpha)$$

ただし  $z_{1-\frac{m}{2}}(y_0 i \alpha)$  は  $\frac{1-m}{2}$  次の Bessel 微分方程式の解である。さらに境界条件 (6) 及び現象が  $x$  の奇函数で表わされることを考慮すれば

$$p = a \sin \alpha x \cdot y_0^\nu I_{-\nu}(\alpha y_0); \nu = \frac{1-m}{2} \dots\dots\dots (7)$$

従つてこのような特解  $a$  について重ね合わせた解

$$p = \int_0^\infty a(\alpha) \sin \alpha x \cdot y_0^\nu I_{-\nu}(\alpha y_0) d\alpha \dots\dots\dots (8)$$

につき、 $a(\alpha)$  なる任意函数を残つた境界条件 (4), (5) を満足するよう求めれば問題は解決する。

(3) Fourier 積分表示  $y_0=h$  では前に述べた性質より  $-a < x < a$  の範囲で圧力  $p$  の値をアプリアリに知ることはできない。従つてその範囲の圧力分布は未定のまま (4) の代りに

$$y_0=h; -a < x < a, p = -f(x) \dots\dots\dots (9)$$

ただし  $f(0)=0; f(\pm a) = \pm \frac{\Delta p}{2} \dots\dots\dots (10)$

とおき、あらためて (5) 及び (9) で示される境界条件を満足する解を求めることにする (図-2 参照)。

このような解はつきに示す境界条件を満足する二つの解  $p_1$  及び  $p_2$  の和として求められる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} y_0=h; 0 < x < a, p_1 = -\frac{\Delta p}{2}; p_2 = \frac{\Delta p}{2} - f(x) \\ a < x < \infty, p_1 = -\frac{\Delta p}{2}; p_2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ただし  $p_1, p_2$  は  $x$  の奇函数

(11) を満足する解は (8) を基礎とし、Dirichlet 及び Fourier 積分を用いて

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\frac{\Delta p}{\pi} \left(\frac{y_0}{h}\right)^\nu \int_0^\infty \frac{I_{-\nu}(\alpha y_0)}{I_{-\nu}(\alpha h)} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha \\ p_2 &= -\frac{\Delta p}{\pi} \left(\frac{y_0}{h}\right)^\nu \int_0^\infty d\alpha \int_0^a \frac{I_{-\nu}(\alpha y_0)}{I_{-\nu}(\alpha h)} \left\{ \frac{\Delta p}{2} - f(\lambda) \right\} \sin \alpha x \sin \alpha \lambda d\lambda \end{aligned} \right\}$$

従つて両者を加えさらに (10) を考えれば

$$p = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{y_0}{h}\right)^\nu \int_0^\infty \frac{I_{-\nu}(\alpha y_0)}{I_{-\nu}(\alpha h)} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \int_0^a f'(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda d\alpha \dots\dots\dots (12)$$

特別な場合として透水係数が一様なときを考えれば  $m=0$  すなわち  $\nu = \frac{1}{2}$  となるので、上式より

$$p = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{ch \alpha y_0}{ch \alpha h} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \int_0^a f'(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda d\alpha \dots\dots\dots (13)$$

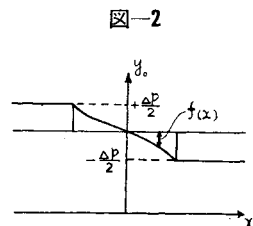
さらに不滲透層の深さが無限に深い場合には  $h \rightarrow \infty$  ならしめることにより

$$p = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{\alpha y} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \int_0^a f'(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda d\alpha \dots\dots\dots (14)$$

滲透流量を  $Q$  とすれば

$$Q = - \int_0^h \left( k \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} dy_0$$

与えられるから (1) 及び (12) を代入して積分をおこなえば無次元化した単位 Potential drop 当りの流量は



$$\frac{Q}{k_0 \Delta p} = \frac{2}{\pi \Delta p} \int_0^\infty \frac{I_{1-\nu}(\alpha h)}{\alpha I_{-\nu}(\alpha h)} \int_0^a f'(\lambda) \cos \alpha \lambda d \lambda d \alpha \dots\dots\dots (15)$$

で与えられる。前と同様に特別な場合として透水係数が一様の場合には  $\nu = \frac{1}{2}$  とおくことにより

$$\frac{Q}{k_0 \Delta p} = \frac{2}{\pi \Delta p} \int_0^\infty \frac{\tanh \alpha h}{\alpha} \int_0^a f'(\lambda) \cos \alpha \lambda d \lambda d \alpha \dots\dots\dots (16)$$

(4) 不滲透層が十分深い場合の近似解 不滲透層が無限に深ければ(1)より透水係数は一様とみてよい。従つてそのときの圧力分布は(14)で与えられるが、一方この場合の堤体下部の圧力分布は周知のように  $p = -\frac{\Delta p}{\pi} \sin^{-1} \frac{x}{a}$  であるから(9)より

$$f(\lambda) = \frac{\Delta p}{\pi} \sin^{-1} \frac{\lambda}{a} \dots\dots\dots (17)$$

(14)に代入すれば

$$p = -\frac{\Delta p}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{\alpha y} J_0(\alpha a) \sin \alpha x}{\alpha} d \alpha \dots\dots\dots (18)$$

をうる。これは明らかに基礎方程式 ( $k=k_0=\text{const}$ ) を満足すると同時に  $y=0$  では Weber の積分<sup>57</sup>であつて境界条件(4),(5)を同時に満足している。従つてこの解は不滲透層が無限に深い場合の厳密解を無限積分表示したものである。この事実から十分に不滲透層が深くて、堤体下部の圧力分布(17)をそれほど乱さないと思はれる範囲では(12),(13)に(17)を代入することにより、 $p$ に対する近似解としてそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{\Delta p}{\pi} \left(\frac{y_0}{h}\right)^\nu \int_0^\infty \frac{I_{-\nu}(\alpha y_0)}{I_{-\nu}(\alpha h)} \frac{J_0(\alpha a) \sin \alpha x}{\alpha} d \alpha \\ p &= -\frac{\Delta p}{\pi} \int_0^\infty \frac{ch(\alpha y_0) J_0(\alpha a) \sin \alpha x}{ch(\alpha h)} \frac{d \alpha}{\alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

滲透流量に対しても同様に(17)を(15),(16)に代入してそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q}{k_0 \Delta p} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_{1-\nu}(\alpha h) J_0(\alpha a)}{I_{-\nu}(\alpha h) \alpha} d \alpha \\ \frac{Q}{k_0 \Delta p} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tanh(\alpha h) J_0(\alpha a)}{\alpha} d \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

等が得られる。上述の解は一様な透水係数を持ち不滲透層が無限に深い場合の  $f(\lambda)$  の函数形が既知であつたので、それを基礎にして近似解を導いたのであるが、一般の場合には  $f(\lambda)$  がアプリアリにはわからないのでそれを決定する手段としてつぎのような方法をとる。

(5) 変分条件 現象は  $x$  の奇函数で与えられるのであるから、領域の右半分だけを考えれば十分である。図-3のごとく境界を表わせば  $S_1', S_1''$  上では  $\frac{\partial p}{\partial n}$  の値、 $S_2, S_3$  上では  $p$  の値が与えられている。領域  $A$  を流れる滲透流の単位時間に失うエネルギーは

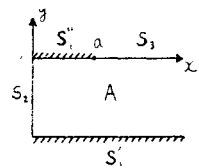


図-3

$$H_1(p) = \frac{1}{2} \int_A k \left\{ \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

で与えられるが、最小仕事の原理から圧力  $p$  は上式を最小ならしめると同時に境界上では(4),(5)より

$$\left. \begin{aligned} S_1 = S_1' + S_1'' \text{ 上で} &\dots\dots\dots \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots \lambda \\ S_2 &\dots\dots\dots p = 0 \dots\dots\dots \mu_1 \\ S_3 &\dots\dots\dots p = -\frac{\Delta p}{2} \dots\dots\dots \mu_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

を満足する必要がある。従つて上に示す  $\lambda, \mu_1, \mu_2$  なる乗数を各条件に施して、つぎに示すような積分の値を最小ならしめる  $p$  の値を求めることができれば目的を果しうる。

$$\begin{aligned} H_2(p, \lambda, \mu_1, \mu_2) &= \frac{1}{2} \int_A k \left\{ \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \int_{S_1} \lambda \frac{\partial p}{\partial n} ds \\ &+ \int_{S_2} \mu_1 p ds + \int_{S_3} \mu_2 \left( p + \frac{\Delta p}{2} \right) ds \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

上式の変分を求めれば、

$$\begin{aligned} \delta H_2 = & - \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right\} \delta p \, dx \, dy \\ & + \int_{S_1} \lambda \delta \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right) ds + \int_{S_1} k \frac{\partial p}{\partial n} \delta p \, ds + \int_{S_1} \delta \lambda \frac{\partial p}{\partial n} ds \\ & + \int_{S_2} \mu_1 \delta p \, ds + \int_{S_2} k \frac{\partial p}{\partial n} \delta p \, ds + \int_{S_2} \delta \mu_1 p \, ds \\ & + \int_{S_3} \mu_2 \delta p \, ds + \int_{S_3} k \frac{\partial p}{\partial n} \delta p \, ds + \int_{S_3} \delta \mu_2 \left( p + \frac{\Delta p}{2} \right) ds \end{aligned}$$

ゆえに  $\delta H_2 = 0$  と置けば

$$A \text{ 内で } \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0$$

$$S_1 \text{ 上 } \lambda = 0 ; k \frac{\partial p}{\partial n} = 0 ; \frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

$$S_2 \text{ 上 } \mu_1 + k \frac{\partial p}{\partial n} = 0 ; p = 0$$

$$S_3 \text{ 上 } \mu_2 + k \frac{\partial p}{\partial n} = 0 ; p = -\frac{\Delta p}{2}$$

第1式は明らかに領域内  $A$  で  $p$  の満足すべき基礎微分方程式であり、以下3式の右側はそれぞれ上から順に  $S_1, S_2, S_3$  上の境界条件を示す。また左側は施した乗数  $\lambda, \mu_1, \mu_2$  のそれぞれとるべき条件を表わすものである。

前述の積分 (22) に上記の  $\lambda, \mu_1, \mu_2$  を代入すれば

$$H_3(p) = \frac{1}{2} \int_A k \left\{ \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right\} dx \, dy - \int_{S_2} k \frac{\partial p}{\partial n} p \, ds - \int_{S_3} k \frac{\partial p}{\partial n} \left( p + \frac{\Delta p}{2} \right) ds$$

をうる。さらに Green の定理で積分すれば

$$\begin{aligned} H_3(p) = & - \frac{1}{2} \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right\} dx \, dy + \frac{1}{2} \int_{S_1'} k \frac{\partial p}{\partial n} p \, ds + \frac{1}{2} \int_{S_1''} k \frac{\partial p}{\partial n} p \, ds \\ & - \frac{1}{2} \int_{S_2} k \frac{\partial p}{\partial n} p \, ds - \frac{1}{2} \int_{S_3} k \frac{\partial p}{\partial n} (p + \Delta p) ds \end{aligned}$$

さてここで (3) において用意した解 (12) を代入すれば、(12) は基礎方程式を満足しさらに  $S_1', S_2, S_3$  上の境界条件をも満足しているのので、 $H_3(p)$  の第1項、第2項、第4項はなくなりつぎのようになる。

$$H_4(p) = \frac{1}{2} \int_{S_1'} k \frac{\partial p}{\partial n} p \, ds + \frac{1}{2} \int_{S_3} k \frac{\partial p}{\partial n} p \, ds$$

しかるに  $S_1'', S_3$  は地表面であつて  $k = k_0, ds = dx, \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial y_0}$  であるから書きおなせば

$$H_4(p) = \frac{k_0}{2} \left[ \int_0^a p \frac{\partial p}{\partial y_0} dx + \int_a^\infty p \frac{\partial p}{\partial y_0} dx \right] \dots \dots \dots (23)$$

従つて問題は  $H_4(p)$  を最小ならしめるように (12) のうちに含まれる  $f(\lambda)$  の函数形を規定することができれば、最後まで残つた境界条件 (4) をも満足する解が求められることになる。

$$\text{そこで例えば } f(\lambda) = \frac{\Delta p}{2} \sum C_i \left( \frac{\lambda}{a} \right)^i \dots \dots \dots (24)$$

と仮定すれば (12) に代入し積分をすることにより形式的には

$$p = \sum C_i \phi_i(x, y)$$

とおくことができる。もちろん (24) のように仮定しなくとも適当な  $f(\lambda)$  に対する展開式を与えれば、とにかく形式的に上のようにおくことができる。上式を (23) に代入すれば積分記号内では必ず  $C_i$  に関する二次型式をうるので  $\delta H_4 = 0$  ならしめる条件として

$$\frac{\partial H_4}{\partial C_1} = \frac{\partial H_4}{\partial C_2} = \dots \dots \dots = \frac{\partial H_4}{\partial C_n} = 0 \dots \dots \dots (25)$$

で示される  $C_i$  についての連立一次方程式が求まる。

従つて  $C_i$  について解けば  $f(\lambda)$  の形式が合理的に決定され、圧力分布や滲透流量等を知ることができる。このさい (29) の項数を多くとればとるほど厳密解に一致してゆくことは明らかである。

(6)  $C_i$  の決定 計算の便宜上

$$a\alpha = \beta, \quad \frac{h}{a} = r, \quad \frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{y_0}{a} = \eta_0 \dots\dots\dots (26)$$

$$S(\beta) = \frac{2}{4p \cdot a} \int_0^a f'(\lambda) \frac{\cos \alpha \lambda}{\alpha} d\lambda \dots\dots\dots (27)$$

とおいて (12) を書きなおせば

$$p = -\frac{4p}{\pi} \left( \frac{\eta_0}{r} \right)^{\nu} \int_0^{\infty} \frac{I_{1-\nu}(\beta \eta_0)}{I_{-\nu}(\beta r)} \sin \beta \xi S(\beta) d\beta \dots\dots\dots (28)$$

同時に (15) を書きなおせば

$$\frac{Q}{k_0 4p} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{I_{1-\nu}(\beta r)}{I_{-\nu}(\beta r)} S(\beta) d\beta \dots\dots\dots (29)$$

$S(\beta)$  の値は (27) に示すように  $f(\lambda)$  すなわち堤体下部の圧力分布状態によつて決定されるもので、本文では (24) のように仮定した結果を採用した。(24) は  $\frac{\lambda}{a}$  のべき級数であるから (27) は容易に積分ができ、一般に級数の項数をいくらか多くとつてもそれぞれに対応する  $S(\beta)$  の値を求めることができる。

例えば  $f(\lambda) = \frac{4p}{2} \frac{\lambda}{a}$

なる直線分布とすれば

$$S(\beta) = \frac{\sin \beta}{\beta^2} \dots\dots\dots (30)$$

また  $f(\lambda)$  は奇函数であることを考え

$$f(\lambda) = \frac{4p}{2} \left\{ C_1 \frac{\lambda}{a} + C_2 \left( \frac{\lambda}{a} \right)^3 \right\} \dots\dots\dots (31)$$

とおけば (10) より  $C_1 + C_2 = 1 \dots\dots\dots (32)$

よつて  $C_1 = C$  とおいて  $S(\beta)$  を求めれば

$$S(\beta) = 3 \left[ \frac{\sin \beta}{\beta^2} + 2 \frac{\cos \beta}{\beta^3} - 2 \frac{\sin \beta}{\beta^4} \right] - 2C \left[ \frac{\sin \beta}{\beta^2} + 3 \frac{\cos \beta}{\beta^3} - 3 \frac{\sin \beta}{\beta^4} \right] \dots\dots\dots (33)$$

しかしながら (24) で示す級数の項数を多くとれば以後の計算がいたづらに繁雑になるので、本文では (31) で示される三次の展開式に止め、従つて  $S(\beta)$  には (33) を用いた。このようにすれば未定係数は  $C$  1個だけとなるので (25) より  $C$  を決定するには、

$$\frac{\partial H_i}{\partial C} = 0$$

あるいは (26) を考慮すれば上式は

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial p}{\partial C} \frac{\partial p}{\partial y_0} + p \frac{\partial^2 p}{\partial C \partial y_0} \right\}_{y_0=h} d\xi + \int_1^{\infty} \left\{ \frac{\partial p}{\partial C} \frac{\partial p}{\partial y_0} + p \frac{\partial^2 p}{\partial C \partial y_0} \right\}_{y_0=h} d\xi = 0 \dots\dots\dots (34)$$

この式を計算するにあたり (31), (32) および境界条件 (5) を考慮すれば

$$0 < \xi < 1$$

$$\left. \begin{aligned} (p)_{y_0=h} &= -\frac{4p}{2} \{ \xi^3 - C(\xi^3 - \xi) \} \\ \left( \frac{\partial p}{\partial C} \right)_{y_0=h} &= -\frac{4p}{2} (\xi - \xi^3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

$$1 < \xi < \infty$$

$$\left. \begin{aligned} (p)_{y_0=h} &= -\frac{4p}{2} \\ \left( \frac{\partial p}{\partial C} \right)_{y_0=h} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

一方 (33) を (28) に代入し  $y_0$  で偏微分すれば

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial p}{\partial y_0} \right)_{y_0=h} &= -\frac{4p}{\pi a} \int_0^{\infty} \frac{I_{1-\nu}(\beta r)}{I_{-\nu}(\beta r)} \left[ 3 \left\{ \frac{\sin \beta}{\beta} + 2 \frac{\cos \beta}{\beta^2} - 2 \frac{\sin \beta}{\beta^3} \right\} \right. \\ &\quad \left. - 2C \left\{ \frac{\sin \beta}{\beta} + 3 \frac{\cos \beta}{\beta^2} - 3 \frac{\sin \beta}{\beta^3} \right\} \right] \sin \beta \xi d\beta \end{aligned}$$

従つて

$$0 < \xi < 1 \quad 1 < \xi < \infty$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{I_{1-\nu}(\beta r)}{I_\nu(\beta r)} \frac{\sin \beta \sin \beta \xi}{\beta} d\beta &= I_1 \quad ; \quad I_1' \\ \int_0^\infty \frac{I_{1-\nu}(\beta r)}{I_\nu(\beta r)} \frac{\cos \beta \sin \beta \xi}{\beta^2} d\beta &= I_2 \quad ; \quad I_2' \\ \int_0^\infty \frac{I_{1-\nu}(\beta r)}{I_\nu(\beta r)} \frac{\sin \beta \sin \beta \xi}{\beta^3} d\beta &= I_3 \quad ; \quad I_3' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

とおけば  $0 < \xi < 1$  に対し

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial p}{\partial y_0} \right)_{y_0=h} &= -\frac{\Delta p}{\pi a} \{3(I_1 + 2I_2 - 2I_3) - 2C(I_1 + 3I_2 - 3I_3)\} \\ \left( \frac{\partial p}{\partial C \partial y_0} \right)_{y_0=h} &= \frac{\Delta p}{\pi a} 2(I_1 + 3I_2 - 3I_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

$1 < \xi < \infty$  に対しては上式の  $I_i$  の代りに  $I_i'$  としたものとなる。従つて (35), (36), (38) を (34) に代入すれば結局  $C$  に関する一次式をうるので、 $C$  を求めれば

$$C = 1 - \frac{\int_0^1 \{\xi(I_1 + 6I_2 - 6I_3) + \xi^3 I_1\} d\xi + 2 \int_1^\infty (I_1' + 3I_2' - 3I_3') d\xi}{4 \int_0^1 (\xi - \xi^3)(I_1 + 3I_2 - 3I_3) d\xi} \dots\dots\dots (39)$$

上式の計算を行うにはまづ (37) の各積分を求める必要がある。しかしながら Mittag-Leffler の定理<sup>6)</sup> を用いれば

$$\left. \frac{I_{1-\nu}(\beta r)}{I_\nu(\beta r)} = \frac{2}{r} \sum_{n=1}^\infty \frac{\beta}{k_n^2 + \beta^2} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

ただし  $k_n$  は  $J_\nu(kr) = 0$

の根を小さい方から順にとつた  $k$  の値である。

(37), (40) より

$$\int_0^\infty \frac{I_{1-\nu}(\beta r)}{I_\nu(\beta r)} \frac{\sin \beta \sin \beta \xi}{\beta} d\beta = \frac{2}{r} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{\sin \beta \sin \beta \xi}{k_n^2 + \beta^2} d\beta$$

のように展開できるので

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{\pi}{r} \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-k_n} \sinh \xi k_n}{k_n}, \quad I_1' = \frac{\pi}{r} \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{\xi k_n} \sinh k_n}{k_n} \\ I_2 &= \frac{\pi}{r} \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-k_n} \sinh \xi k_n}{k_n^2}, \quad I_2' = \frac{\pi}{r} \sum_{n=1}^\infty \frac{1 - e^{-\xi k_n} \cosh k_n}{k_n^2} \\ I_3 &= \frac{\pi}{r} \sum_{n=1}^\infty \left( \frac{\xi}{k_n^2} - \frac{e^{-k_n} \sinh \xi k_n}{k_n^3} \right), \quad I_3' = \frac{\pi}{r} \sum_{n=1}^\infty \left( \frac{1}{k_n^2} - \frac{e^{-\xi k_n} \sinh k_n}{k_n^3} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)^{7)}$$

(41) を (39) へ代入して  $\xi$  につき積分すれば結局  $C$  を求める最終式がつぎのようになる。

$$C = 1 - \frac{\sum_{n=1}^\infty \left[ \frac{1 - e^{-2k_n}}{k_n^3} - \frac{3(1 + e^{-2k_n})}{k_n^4} + \frac{3(1 - e^{-2k_n})}{k_n^5} \right]}{4 \sum_{n=1}^\infty \left[ \frac{1}{5k_n^2} + \frac{e^{-2k_n} - 1}{2k_n^3} + \frac{3e^{-2k_n}}{k_n^4} + \frac{3(1 + 5e^{-2k_n})}{2k_n^5} + \frac{9e^{-2k_n}}{k_n^6} + \frac{9(e^{-2k_n} - 1)}{2k_n^7} \right]} \dots\dots\dots (42)$$

上式の計算は、 $J_n$  の 0 点が函数表にのつているのと比較的収斂が早いのでそれほど困難ではない。 $C$  が決定されれば (33) より  $S(\beta)$  が求まり、(28) の積分を遂行することにより任意点の圧力がわかるはずであるが、実際問題としては堤体下の圧力分布だけ知ればよいのであるから (35) に代入すればただちに求められる。厳密に考えれば 1 個だけの  $C$  の値では不十分のようにも思われるが、このような透水係数の変化による堤体下の圧力分布の変動はむしろ小さく、またこのような方法を透水係数一樣な場合に適用して計算を行い等角写像法による厳密解と比較したところ非常に近似度がよいことから、この程度の計算で十分であると思われる。

むしろ透水係数の変化で大きく変動するのは滲透流量である。滲透流量を求めるには (29) の積分を行えばよい。(29) に (40) を代入しさらに (33) を代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{Q}{k_0 \Delta p} &= \frac{2}{r \pi} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{\beta S(\beta)}{k_n^2 + \beta^2} d\beta \\ &= \frac{2}{r \pi} \sum_{n=1}^\infty \left\{ (3 - 2C) \int_0^\infty \frac{\sin \beta}{(k_n^2 + \beta^2)\beta} d\beta + 6(1 - C) \int_0^\infty \frac{\beta \cos \beta - \sin \beta}{(k_n^2 + \beta^2)\beta^2} d\beta \right\} \end{aligned}$$

しかるに

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta}{(k_n^2 + \beta^2)\beta} d\beta = \frac{\pi}{2k_n^2} (1 - e^{-k_n})$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta - \beta \cos \beta}{(k_n^2 + \beta^2)\beta^3} d\beta = \frac{\pi}{4k_n^2} + \frac{\pi}{2k_n^3} e^{-k_n} + \frac{\pi}{2k_n^4} (e^{-k_n} - 1)$$

従つて滲透流量を与える最終式はこれらを前式に代入し

$$\frac{Q}{k_0 \Delta p} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^\infty \left[ \frac{C}{k_n^2} - \frac{(3-2C)}{k_n^2} e^{-k_n} - 3(1-C) \left\{ \frac{e^{-k_n}}{k_n^3} - \frac{1}{k_n^4} (1 - e^{-k_n}) \right\} \right] \dots\dots\dots (43)$$

のように求められる。上式の計算は未定係数  $C$  を計算するときすでに使用したものが大部分であるので速やかに求めることができる。

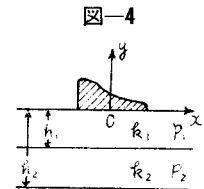
特別な場合として透水係数が一様であれば

$$\left[ \frac{I_{1-\nu}(\beta r)}{I_{-\nu}(\beta r)} \right]_{\nu=1/2} = \tanh \beta r = \frac{2}{r} \sum_{n=1}^\infty \frac{\beta}{k_n^2 + \beta^2}$$

と展開したとき、 $k_n$  は  $J_{-1/2}(k_n r) = 0$ , すなわち  $\cos k_n r = 0$  の根となるので  $k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2r}$  となる。

III. 相異なる二つの透水係数を持つ場合の解法

(1) 基礎方程式及び境界条件 図-4に示すように相異なる2つの透水係数  $k_1$  及び  $k_2$  を持つ透水層があり、それぞれの層の厚さを  $h_1$  及び  $h_2 - h_1$ , 圧力を  $p_1$  及び  $p_2$  とする。具体的な例としては堤体が砂層と砂利層からなる互層の上に置かれている場合である。基礎方程式は



$$\left. \begin{aligned} -h_1 < y < 0; \quad \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} &= 0 \\ -h_2 < y < h_1; \quad \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

境界条件は

$$y = 0; \quad -a < x < a, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} a < x < \infty, \quad p_1 &= -\frac{\Delta p}{2} \\ -\infty < x < -a, \quad p_1 &= +\frac{\Delta p}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$y = -h_1; \quad p_1 = p_2, \quad k_1 \frac{\partial p_1}{\partial y} = k_2 \frac{\partial p_2}{\partial y} \dots\dots\dots (4)$$

$$y = -h_2; \quad \frac{\partial p_2}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

すなわち地表面では前節と全く同一の境界条件であり、相異なる層の切触面では圧力及び法線方向の速度が連続であり、また深さ  $h_2$  では不透透層と接していることを表わしている。各層については一様な透水層であるけれども、全体として考えた場合には等角写像法を用いて巧妙に解くというわけにはゆかない。そこで前節と全く同様な方法で解法を進める。

(2) 特解の誘導 特解を

$$p_1(x, y) = \int_0^\infty \{A_1(\alpha)e^{\alpha y} + B_1(\alpha)e^{-\alpha y}\} \sin \alpha x d\alpha$$

$$p_2(x, y) = \int_0^\infty \{A_2(\alpha)e^{\alpha y} + B_2(\alpha)e^{-\alpha y}\} \sin \alpha x d\alpha$$

と仮定すれば、 $p_1$  及び  $p_2$  はそれぞれ基礎方程式 (1) の第1式及び第2式を満足し、かつ  $x$  についての奇関数で表わされている。そこでこれらを (3), (4), (5) に代入し任意関数  $A_1(\alpha)$   $A_2(\alpha)$ ,  $B_1(\alpha)$ ,  $B_2(\alpha)$ , 相互の関係を決定すれば、任意関数の数は4, 条件の数は3であるから、未定の任意関数  $\alpha(\lambda)$  一つを残して他はすべてつぎのように求まる。

$$\left. \begin{aligned} p_1(x, y) &= \int_0^\infty a(\alpha) [ch \alpha(y+h_1) + \kappa th \alpha(h_2-h_1) sh \alpha(y+h_1)] \sin \alpha x d\alpha \\ p_2(x, y) &= \int_0^\infty a(\alpha) \frac{ch \alpha(h_2-h_1)}{ch \alpha(y+h_2)} \sin \alpha x d\alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ただし  $\kappa = \frac{k_2}{k_1}$

(3) **Fourier 積分表示** 前式 (6) で未定の任意函数  $a(\alpha)$  は  $y=0$  の条件で求められるべきであるが、前節と全く同様な理由から  $-a < x < a$  の範囲の圧力分布は未定のままとし、その他の部分  $|x| > a$  では所定の圧力を与えるようにする。すなわち

$$\left. \begin{aligned} y=0; & -a < x < a, p_1 = -f(x) \\ f(0)=0, & f(\pm a) = \pm \frac{\Delta P}{2} \\ -\infty < x < -a, & p_1 = \frac{\Delta p}{2} \\ a < x < \infty, & p_1 = -\frac{\Delta p}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となるような Fourier 積分表示は前節の結果より

$$p_1(x, 0) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \alpha x dx \int_0^a f'(\lambda) \frac{\cos \alpha \lambda}{\alpha} d\lambda$$

上式と (6) の第 1 式より

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{\int_0^\infty f'(\lambda) \frac{\cos \alpha \lambda}{\alpha} d\lambda}{ch \alpha h_1 + \kappa th \alpha (h_2 - h_1) sh \alpha h_1} \dots\dots\dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore p_1(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{ch \alpha (y+h_1) + \kappa th \alpha (h_2 - h_1) sh \alpha (y+h_1)}{ch \alpha h_1 + \kappa th \alpha (h_2 - h_1) sh \alpha h_1} \sin \alpha x \int_0^a f'(\lambda) \frac{\cos \alpha \lambda}{\alpha} d\lambda d\alpha \\ p_2(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{ch \alpha (y+h_2) \sin \alpha x}{ch \alpha (h_2 - h_1) \{ch \alpha h_1 + \kappa th \alpha (h_2 - h_1) sh \alpha h_1\}} \int_0^a f'(\lambda) \frac{\cos \alpha \lambda}{\alpha} d\lambda d\alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

滲透流量  $Q$  は

$$Q = -k_2 \int_{-h_2}^{-h_1} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x} \right)_{x=0} dy - k_1 \int_{-h_1}^0 \left( \frac{\partial p_1}{\partial x} \right)_{x=0} dy \dots\dots\dots (10)$$

であるから、(9) を (10) に代入して整理すれば

$$\frac{Q}{k_1 \Delta p} = \frac{2}{\pi \Delta p} \int_0^\infty \frac{sh \alpha h_1 + \kappa th \alpha (h_2 - h_1) ch \alpha h_1}{ch \alpha h_1 + \kappa th \alpha (h_2 - h_1) sh \alpha h_1} \int_0^a f'(\lambda) \frac{\cos \alpha \lambda}{\alpha} d\lambda d\alpha \dots\dots\dots (11)$$

(4) **不滲透層及び切触面が十分深い時の近似解** 前節の所論から、 $h_2, h_1$  が十分に大きい場合には  $f(\lambda) = \frac{\Delta p}{\pi} \sin^{-1} \frac{\lambda}{a}$  とおけるので、(9), (11) に代入すれば圧力並びに滲透流量に対する近似解として

$$\left. \begin{aligned} p_1(x, y) &= -\frac{\Delta p}{\pi} \int_0^\infty \frac{ch \alpha (y+h_1) + \kappa th \alpha (h_2 - h_1) sh \alpha (y+h_1)}{ch \alpha h_1 + \kappa th \alpha (h_2 - h_1) sh \alpha h_1} \frac{\sin \alpha x J_0(\alpha a)}{\alpha} d\alpha \\ p_2(x, y) &= -\frac{\Delta p}{\pi} \int_0^\infty \frac{ch \alpha (y+h_2)}{ch \alpha (h_2 - h_1) \{ch \alpha h_1 + \kappa th \alpha (h_2 - h_1) sh \alpha h_1\}} \frac{\sin \alpha x J_0(\alpha a)}{\alpha} d\alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

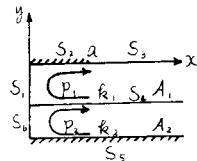
$$\frac{Q}{k_1 \Delta p} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{sh \alpha h_1 + \kappa th \alpha (h_2 - h_1) ch \alpha h_1}{ch \alpha h_1 + \kappa th \alpha (h_2 - h_1) sh \alpha h_1} \frac{J_0(\alpha a)}{\alpha} d\alpha \dots\dots\dots (13)$$

とおくことができる。

図-5

(5) **変分条件** 図-5 のように境界を表わし、各境界に施すべき乗数をつぎのうにおく。

$$\begin{aligned} S_1 \dots\dots \mu_1, S_2 \dots\dots \lambda_1, S_3 \dots\dots \mu_2 \\ S_4 \dots\dots \lambda_2, \mu_3, S_5 \dots\dots \lambda_3, S_6 \dots\dots \mu_4 \end{aligned}$$



そのときは前と同様に

$$\begin{aligned} H_1(p_1, p_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) &= \frac{1}{2} \int_{A_1} k_1 \left\{ \left( \frac{\partial p_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p_1}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \frac{1}{2} \int_{A_2} k_2 \left\{ \left( \frac{\partial p_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p_2}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ &+ \int_{S_1} \mu_1 p_1 dx + \int_{S_2} \lambda_1 \frac{\partial p_1}{\partial y} dx + \int_{S_3} \mu_2 \left( p_1 + \frac{\Delta p}{2} \right) dx - \int_{S_4} \mu_3 (p_1 - p_2) dx \\ &- \int_{S_4} \lambda_2 \left( k_1 \frac{\partial p_1}{\partial y} - k_2 \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) dx - \int_{S_5} \lambda_3 \frac{\partial p_2}{\partial y} dx + \int_{S_6} \mu_4 p_2 dx \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

なる積分を考える。ただし線積分は矢印の方向を正とする。ここで  $H_1$  を最小ならしめるような  $p_1$  及び  $p_2$  の



値を求めればよい。しかしながらもし(9)で示されるような解を仮定するならば、すでに全境界条件のうち(3), (4), (5)で示される条件は満足しているので  $S_1, S_3, S_4, S_5, S_6$  上の線積分は考える必要がない。

従つて上式の第1, 第2, 第4項だけを残したのに対し全く前節と同様に  $\delta H_1 = 0$  なる条件を求めると

$$\left. \begin{aligned} A_1 \text{ 内で} \quad & \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} = 0 \\ A_2 \text{ 内で} \quad & \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} = 0 \\ A_1 \text{ の境界上で} \quad & \int_{S_1+S_2+S_3+S_4} k_1 \frac{\partial p_1}{\partial n_1} ds = 0 \\ A_2 \text{ の境界上で} \quad & \int_{S_5+S_6+S_4} k_2 \frac{\partial p_2}{\partial n_2} ds = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

特に  $S_2$  上で  $\frac{\partial p_1}{\partial y} = 0, \lambda_1 = 0 \dots\dots\dots (3)$

①は基礎方程式, ②は連続の条件を示し, ③の第1式は  $S_1$  上での境界条件, 第2式は乗数  $\lambda_1$  のとるべき条件を示すものである。ただし  $n_1$  及び  $n_2$  はそれぞれ領域  $A_1$ , 及び  $A_2$  の外向き法線の方向を示す。③の第2式を考慮すれば(14)の第4項を考える必要がなくなる。

従つて

$$H_2(p_1, p_2) = \frac{1}{2} \int_{A_1} k_1 \left\{ \left( \frac{\partial p_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p_1}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \frac{1}{2} \int_{A_2} k_2 \left\{ \left( \frac{\partial p_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p_2}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

を最小ならしめる  $p_1, p_2$  を求めればよくなる。上式に Green の定理を施せば

$$2 H_2(p_1, p_2) = - \int_{A_1} k_1 r^2 p_1 dx dy - \int_{A_2} k_2 r^2 p_2 dx dy + \int_{S_1+S_2+S_3+S_4} k_1 \frac{\partial p_1}{\partial n_1} p_1 ds + \int_{S_5+S_6+S_4} k_2 \frac{\partial p_2}{\partial n_2} p_2 ds \dots\dots\dots (15)$$

しかしながら(9)で示される解  $p_1, p_2$  はそれぞれ  $r^2 p_1 = 0, r^2 p_2 = 0$  を満足し, かつ  $S_2$  上以外の境界条件は全部満足している。従つて  $S_1, S_6$  上では  $p_1 = 0, S_5$  上では  $\frac{\partial p_2}{\partial n_2} = 0$  であるから

$$\int_{S_1} k_1 \frac{\partial p_1}{\partial n_1} p_1 ds = 0 ; \int_{S_5+S_6} k_2 \frac{\partial p_2}{\partial n_2} p_2 ds = 0 \dots\dots\dots (16)$$

また  $\int_{S_4} k_1 \frac{\partial p_1}{\partial n_1} p_1 ds = - \int_0^\infty k_1 \frac{\partial p_1}{\partial y} p_1 dx ; \int_{S_4} k_2 \frac{\partial p_2}{\partial n_2} p_2 ds = \int_0^\infty k_2 \frac{\partial p_2}{\partial y} p_2 dx$

となるので, (4)を考慮すれば

$$\int_{S_4} k_1 \frac{\partial p_1}{\partial n_1} p_1 ds + \int_{S_4} k_2 \frac{\partial p_2}{\partial n_2} p_2 ds = 0 \dots\dots\dots (17)$$

ゆえに(15)の第1項, 第2項はなくなりかつ(16), (17)を(15)に代入すれば

$$H_3(p_1) = \frac{1}{2} \int_{S_2+S_3} k_1 \frac{\partial p_1}{\partial n_1} p_1 ds$$

で示される積分  $H_3(p_1)$  を最小ならしめればよい。しかるに  $S_2, S_3$  は地表面,  $ds = dx, \frac{\partial p_1}{\partial n_1} = \frac{\partial p_1}{\partial y}$  であるから, 前節の(23)と全く形式的に同一な積分

$$H_3(p_1) = \frac{k_1}{2} \left[ \int_0^a p_1 \frac{\partial p_1}{\partial y} dx + \int_a^\infty p_1 \frac{\partial p_1}{\partial y} dx \right] \dots\dots\dots (18)$$

が求められる。従つて前と同様に  $f(\lambda)$  に II の(37)のごとき仮定をすれば未定常数  $C$  は

$$\frac{\partial H_3}{\partial C} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

によつて求められる。

(6)  $C$  の決定 便宜上やはり

$$\left. \begin{aligned} a \alpha &= \beta, & \frac{x}{a} &= \xi, & \frac{h_1}{a} &= r_1 \\ \frac{h_2}{a} &= r_2, & \frac{y}{a} &= \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

$$S(\beta) = \frac{2}{d p \cdot a} \int_0^a f'(\lambda) \frac{\cos \alpha \lambda}{\alpha} d \lambda \dots\dots\dots (21)$$

とおいて (9) を書きなおせば

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\frac{4p}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau_0(\beta, \eta)}{\tau_1(\beta)} S(\beta) \sin \beta \xi d\beta \\ p_2 &= -\frac{4p}{\pi} \int_0^\infty \frac{ch \beta (\eta + r_2)}{ch \beta (r_2 - r_1) \tau_1(\beta)} S(\beta) \sin \beta \xi d\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{Q}{k_1 4p} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau(\beta) S(\beta) d\beta \dots\dots\dots (23)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \tau_1(\beta) &= ch \beta r_1 + \kappa th \beta (r_2 - r_1) sh \beta r_1 \\ \tau_0(\beta, \eta) &= ch \beta (\eta + r_1) + \kappa th \beta (r_2 - r_1) sh \beta (\eta + r_1) \\ \tau_2(\beta) &= sh \beta r_1 + \kappa th \beta (r_2 - r_1) ch \beta r \\ \tau(\beta) &= \frac{\tau_2(\beta)}{\tau_1(\beta)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

(18) は前節の (29) と形式的に同一であることから (19) の条件は前節の (34) において  $p$  の代りに  $p_1, y_0$  の代りに  $y$ , さらに  $y_0 = h$  の代りに  $y = 0$  とおいたものとなる。また  $f(\lambda)$  に対しても前節 (31) と同一にとれ  $(p_1)_{y=0}, \left(\frac{\partial p_1}{\partial C}\right)_{y=0}$  に対しては前節の (35), (36) がそのまま使用できる。  $S(\beta)$  に対しても II. の (33) と同一になるので、これを (22) に代入し  $y$  について偏微分すれば

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{4p}{\pi a} \int_0^\infty \tau(\beta) \left[ 3 \left\{ \frac{\sin \beta}{\beta} + 2 \frac{\cos \beta}{\beta^2} - 2 \frac{\sin \beta}{\beta^3} \right\} - 2 \left\{ \frac{\sin \beta}{\beta} + 3 \frac{\cos \beta}{\beta^2} - 3 \frac{\sin \beta}{\beta^3} \right\} \right] \sin \beta \xi d\beta$$

従つて  $0 < \xi < 1 \quad 1 < \xi < \infty$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \tau(\beta) \frac{\sin \beta \sin \beta \xi}{\beta} d\beta &= I_1 \quad ; \quad I_1' \\ \int_0^\infty \tau(\beta) \frac{\cos \beta \sin \beta \xi}{\beta^2} d\beta &= I_2 \quad ; \quad I_2' \\ \int_0^\infty \tau(\beta) \frac{\sin \beta \sin \beta \xi}{\beta^3} d\beta &= I_3 \quad ; \quad I_3' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

とおけば  $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y=0}, \left(\frac{\partial^2 p}{\partial C \partial y}\right)_{y=0}$  に対しては II. の (38) と同一の式となる。ただし内容的に異なるのは式中の積分  $I_1, I_2, I_3; I_1', I_2', I_3'$  が本節の場合は (25) で示されるに反し前節では (37) で示されることである。

ここで函数  $\tau(z)$  の性質を函数論的に調べてみると  $\tau(z)$  は  $z$  の偶函数であるから  $\tau(z)$  の 0 点を  $z_n$  とすれば  $-z_n$  もまた 0 点となる。さらに  $\tau(z)$  は  $\pm z_1, \pm z_2, \dots$  において無数に数多くの 1 位の極をもっているので、 $\tau(z)$  を  $z_n$  の廻りに展開した際の展開式の主部は  $\frac{C_n}{z - z_n}$  のようなものとなり

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \tau(z) dz = \frac{\tau_2(z_n)}{\tau_1'(z_n)} \dots\dots\dots (26)$$

従つて Mittag-Leffler の定理より

$$\tau(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z + z_n} \right] C_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z C_n}{z^2 - z_n^2} \dots\dots\dots (27)$$

さらに  $\tau_1(z) = ch z r_1 + \kappa th z (r_2 - r_1) sh z r_1$  の 0 点は  $\kappa, r_2 - r_1, r_1$  が正の実数であることを考慮すれば必ず純虚数で、 $z = k_n i$  において上式へ代入すれば  $k_n$  は

$$1 - \kappa \tan k(r_2 - r_1) \tan k r_1 = 0 \dots\dots\dots (28)$$

の根を小さい方から順にとつたものとなる。

一方 (24) より

$$\frac{\tau_2(z_n)}{\tau_1'(z_n)} = \frac{1}{r_1 \left\{ 1 + \frac{\kappa(r_2 - r_1)}{r_1} \right\} \left( \frac{\cos^2 k_n r_1}{\kappa^2} + \sin^2 k_n r_1 \right)} = \frac{g(k_n)}{r_1} \dots\dots\dots (29)$$

となるので (26), (27), (28), (29) より  $\tau(\beta)$  は

$$\tau(\beta) = \frac{2}{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(k_n) \beta}{k_n^2 + \beta^2} \dots\dots\dots (30)$$

のように展開できることがわかる。前節の (40) と比較すれば  $g(k_n)$  なる係数がついているだけ異なる。

従つて (25) で示された積分の値は形式的には前節の (41) とよく似ていて、ただ  $r$  の代りに  $r_1$  とし、さら

に各項に  $g(k_n)$  なる係数をかけたものに等しくなる。

これらの積分の値をIIの(39)に代入すればCを求める最終式は

$$C=1-\frac{\sum_{n=1}^{\infty} g(k_n) \left[ \frac{1-e^{-2k_n}}{k_n^3} - \frac{3(1+e^{-2k_n})}{k_n^4} + \frac{3(1-e^{-2k_n})}{k_n^5} \right]}{4 \sum_{n=1}^{\infty} g(k_n) \left[ \frac{1}{5k_n^2} + \frac{e^{-2k_n}-1}{2k_n^3} + \frac{3e^{-2k_n}}{k_n^4} + \frac{3(1+5e^{-2k_n})}{k_n^5} + \frac{9e^{-2k_n}}{k_n^6} + \frac{9(e^{-2k_n}-1)}{2k_n^7} \right]} \dots\dots\dots (31)$$

ただし  $k_n$  は (28) の根を小さい方から順にとつたものである。また  $g(k_n)$  の値は (29) により与えられるものである。(31) を前節の (42) と比較すれば、現象の相違にもかかわらず非常に類似した形式であることが認められる。すなわち分母、分子の [ ] 内の数式は、単一透水層でも透水係数が変化する場合でもさらに二重透水層の場合でもことごとく同一の形式で示されることはまことに注目値する。またこの式の特性は  $f(\lambda)$  を仮定する函数形式によつて決つてくるのであり、 $g(k_n)$  は透水層が一重の場合には透水係数が変化してもしなくても1となる。これらの事項は結局任意函数が Mittag-Liffler の定理で同様な形式に展開されることと、変分条件が三者とも同一形式となることに由来する。内容的に異なるのは  $k_n$  の値で、それぞれの境界条件、透水係数の性質により II. (40) または III. (28) により求められる。従つてこれらはそれぞれの場合の固有値算定方程式である。

滲透流量については (23), (30) より

$$\frac{Q}{k_1 d p} = \frac{2}{r_1 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{g(k_n) \beta S(\beta)}{k_n^2 + \beta^2} d\beta$$

となるので、 $S(\beta)$  は前節と同様であることを考慮すれば II. (43) と比較することによりただちに

$$\frac{Q}{k_1 d p} = \frac{1}{r_1 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} g(k_n) \left[ \frac{C}{k_n^2} - \frac{(3-2C)}{k_n^2} e^{-k_n} - 3(1-C) \left\{ \frac{e^{-k_n}}{k_n^3} - \frac{1}{k_n^4} (1-e^{-k_n}) \right\} \right] \dots\dots\dots (32)$$

(31), (32) の計算をするにあつて一番収斂の悪い項は  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(k_n)}{k_n^2}$  であるが、これは適当な積分路に沿つてつぎの函数  $\frac{\tau(z)}{z^2}$  を複素積分とすれば

$$\oint \frac{\tau(z)}{z^2} dz = 0$$

より

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} g(k_n) \frac{1}{k_n^2} &= \frac{r_1^2(1+\kappa\nu)}{2} \\ \text{ただし} \quad \kappa &= \frac{k_1}{k_2}; \quad \nu = \frac{r_2-r_1}{r_1} = \frac{h_2-h_1}{h_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

のように総和が求められる。3次以上の級数は収斂が早いので割合楽に (31), (32) は計算できる。

なお不滲透層が十分に深い場合の滲透流量を与える式は II. (2,) 及び III. (13) で示されているが、これらの値を求めるには前述の Mittag-Leffler の定理を用いるといずれの場合に対しても形式的に

$$\frac{Q}{k_1 d p} = \frac{2}{r_1 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{g(k_n) J_n(\beta)}{k_n^2 + \beta^2} d\beta \dots\dots\dots (34)$$

とおける。ただし II. の場合には上式の  $k_1$  の代りに  $k_0$ ,  $r_1$  の代りに  $r$ ,  $g(k_n)=1$  とおけばよい。

しかるに Bessel 函数の性質<sup>6)</sup>より

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(\beta)}{k_n^2 + \beta^2} d\beta = \frac{\pi}{2k_n} \{I_0(k_n) - L_0(k_n)\}$$

ただし

$$I_0(k_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}k_n\right)^{2m}}{m!\Gamma(m+1)}; \quad L_0(k_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}k_n\right)^{2m-1}}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}$$

よつてこれらの結果を (34) に代入すれば

$$\frac{Q}{k_1 d p} = \frac{1}{r_1 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} g(k_n) \frac{I_0(k_n) - L_0(k_n)}{k_n} \dots\dots\dots (35)$$

(35) は不滲透層が十分深いとみなした場合の滲透流量を与える近似解である。

VI. 数値計算結果

(1) 本方法による精度 精度は結局  $f(\lambda)$  に対する仮定の式 II. (24) の項数を多くとればとるほど限りなく

精度をよくすることができる筈であるが、前記のCの誘導によつてもわかるように、相当に複雑な計算となるので、実用的にこれ以上項数を多くとることは無理である。しかしながら II.(31) のような簡単な仮定を与え一様な透水係数をもつ滲透流量に関して数値計算した結果と、等角写像法による厳密解とを比較した結果は  $w/h=1$  に対しては誤差が約 +2%、 $w/h>2.5$  の範囲では+1%以下となる。

また  $w/h$  の小さい場合には不透透層が十分に深い場合として求めた近似解がよい精度を与えるはずであり、厳密解との比較において  $w/h=2$  に対しては誤差が約-3%、 $w/h<1.5$  の範囲では-1%以下となる。

従つて  $1.5<w/h<2.5$  の範囲内ではいづれの方法でも最大2~3%の誤差は生ずるが、その他の範囲では1%以下であることから本方法を一般の場合に適用しても非常に精度のよいものであることが推定される。

ただし  $w/h$  は堤体巾と透水層の厚さとの比である。

(2) 数値計算結果 図-6 は透水係数が連続的に変化する場合に対し  $\frac{Q}{k_0 \Delta p}$  と  $w/h$  との関係を図示したものであり、II.(1) で示される  $m$  の値を変数にとつている。 $m=0$  はちょうど透水係数が一様な場合に相当している。この曲線と厳密解から求めた曲線とを比較してみることにより前述の精度の検定を行つたものである。

$m$  の値が大きくなるほど下にゆくにつれ土砂の詰まりかたが急になることを意味しているので、滲透流量は透水係数が一様なときに比較して小さくなる。

図-7, 8, 9 は二重の透水層をもつ場合であつて  $\frac{Q}{k_1 \Delta p}$  と  $\frac{w}{h_1}$  との関係をそれぞれ  $\nu = \frac{h_2 - h_1}{h_1}$  の値が3,

図-6

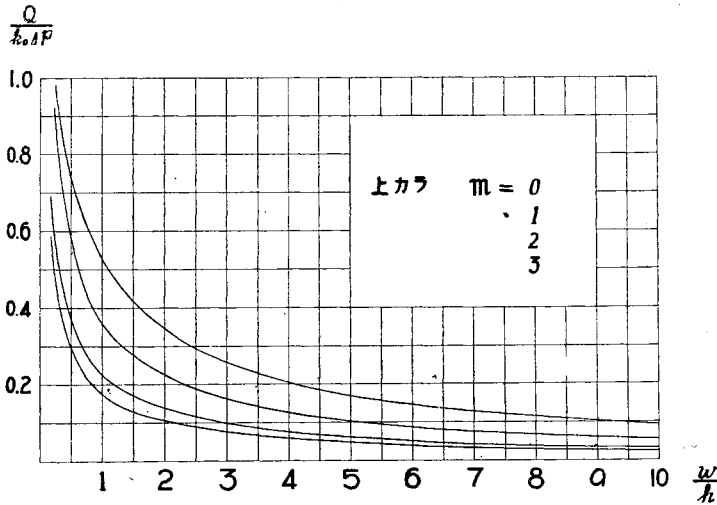
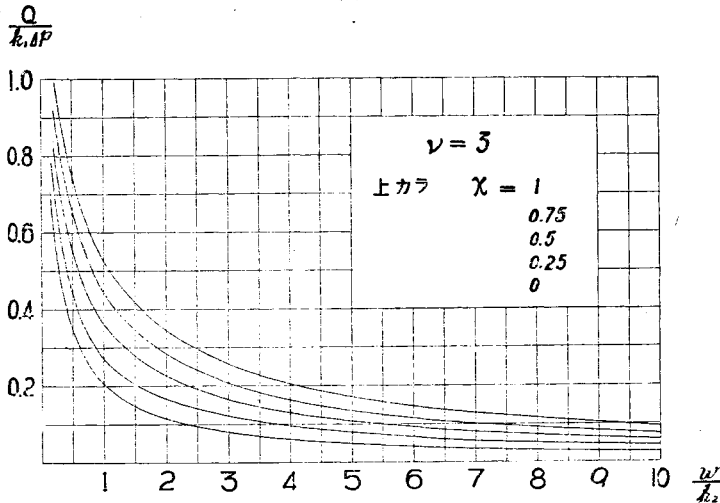


図-7



1,  $\frac{1}{3}$  の場合に対して  $\kappa = \frac{k_2}{k_1}$  の値を変数にとつて図示したものである。

$\kappa=0$  とは下側の透水層がないときで  $h_1$  なる深さの様な透水層に相当し,  $\kappa=1$  とは上下の透水係数が等しく  $h_2$  なる深さの様な透水層に相当する。従つて  $\kappa$  が大きくなるにつれて滲透流量が大きくなる傾向となる。また上述の 図-7~9 を比較すれば  $\nu$  値が小さいほど  $\kappa$  の値の変化による滲透流量の変化が小さくなつてゐる。このことは下側の透水層が上側の透水層に比して薄くなればなるほど, 滲透流量に影響を及ぼさなくなることを示すものである。換言すれば流線の密度は地表面に近いほど密になつてゐることを示している。また当然のことながら, 堤巾  $w$  に比して透水層の深さ  $h_1$  が大きくなるほど滲透流量は増加する。

図-8

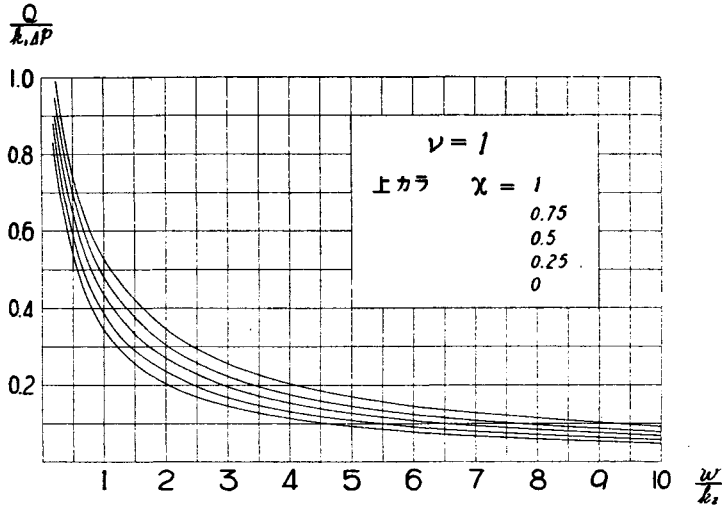
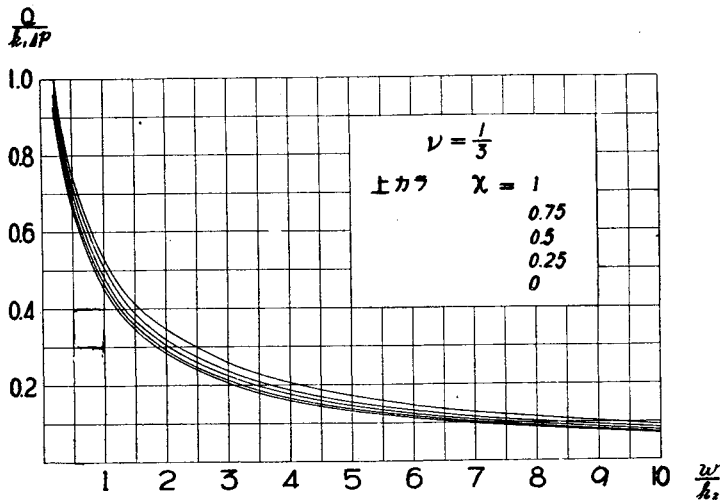


図-9



いま二重透水層の滲透流量と同一の滲透流量を与える単一透水層の深さ, すなわち有効深さを  $\bar{h}$  で示すものとする。ただしおきかえた単一透水層は  $k_1$  なる透水係数をもつとする。この  $\bar{h}$  の値が  $\kappa, \nu$  の値によつてどう変化するかを示したものが 図-10 である。

図-10では  $\frac{\bar{h}}{h_2}$  を縦軸,  $\kappa = \frac{k_2}{k_1}$  を横軸にとり  $\nu = \frac{h_2 - h_1}{h_1}$  を変数にとつてある。従つて  $\nu=0$  すなわち  $h_2 = h_1$  のときは「 $\kappa$  のいかにかわらず  $\frac{\bar{h}}{h_2} = 1$ ,  $\kappa=0$  では下側の層は透水しないので  $\nu = \frac{1}{3}$ , 1, 3 の値に従つてそれぞれ  $\frac{\bar{h}}{h_2} = \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  となる。また  $\kappa=1$  では上下層とも実質的には単一の透水層であるので  $\nu$  のいかにかわ

ならず  $\frac{\bar{h}}{h_2} = 1$  となる。従つてもし有効深さを

$$\bar{h} = h_1 + \frac{k_2}{k_1}(h_2 - h_1)$$

すなわち

$$\frac{\bar{h}}{h_2} = \frac{1 + \kappa \nu}{1 + \nu}$$

と仮定すれば 図-10 に示すような直線群となる。しかしながら実際に滲透流量を計算して有効深さを求めると図の丸印となり、このような仮定では大体の傾向はよいが少し不十分であることがわかる。

## V. 結 言

複合境界条件を有する微分方程式の解法は等角写像法が使用できないような場合にははなはだ困難である。このようなときには変分法が非常に有効な武器となるのであるが、この方法だけで解を求めようとすれば結局は多元連立一次方程式を解く必要上数多くの行列式の計算を行わねばならず、またその結果級数解の収斂などが問題となつたりして通常非常に多くの労力を要するものである。しかしながら本研究ではア priori に決定できない条件を除いたすべての境界条件を満足する解を用意しておいて、この解に対して変分法を適用するという解析的な方法との併用で、非常にわずかな項数を用いただけで精度のよい解をうることができた。未定係数  $C_i$  や滲透流量を求める際に現われる無限積分は、被積分函数がすべて無数に多くの一位の極をもつ性質に注目し Mittag-Leffler の定理を用いることにより統一に求めることができた。その結果として現われる無限級数は一様収斂することは明らかであり、さらに  $\sum \frac{1}{k_n^2}$  以外の収斂は非常に早い。しかしその級数も (33) を用いればすぐにその和が求まつてしまうので数値計算は見かけほど労力を要しない。

さらにこの方法は  $w/h < 1$  では精度が悪いので、そのような範囲では不滲透層が十分に深いとした近似解で補つた。

実際の堤体では通常  $w/h > 1$  とみなされるので、結局変分法で導いた解が有効である。さらに  $w/h > 10$  となれば  $f(x)$  は直線分布とにおいて十分であることが判明した。

この研究は昭和 29 年度文部省科学試験研究費による研究の一部であり、終始御指導をいただいた東京大学本間 仁教授、この種の問題に対する専門的な御教示を賜つた東京大学大島信徳助教授、数値計算に協力された大学院学生日野幹雄君に対して深く感謝する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) Muskat : The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media P. 192  
本間, 浜田 : 土木学会誌, 昭和 26 年 3 月  
嶋 : 土木学会誌, 昭和 26 年 3 月
- 2) Courant, Hilbert : Methoden der Mathematischen Physik I. p. 202
- 3) Kármán, Biot : Mathematical Method in Engineering P. 66
- 4) Muskat : 前出, P. 192
- 5) Gray, Mathews : a Treatise on Bessel Functions and their Applications to Physics p. 65  
佐野静雄 : 応用数学, P. 428
- 6) 竹内端三 : 函数論上巻, P. 349  
Gray, Mathews : 前出, P. 85
- 7) Haan : Nouvelle Tables D'intégrales Définies.
- 8) Watson : Theory of Bessel Function P. 425

(昭.30.5.23)

図-10

