

- 4) E. Hongnestad: "Inelastic Behavior in Tests of Eccentrically Loaded Short Reinf. Conc. Columns", ACI, 1952
- 5) H.J. Cowan: "Ultimate Strength Design of Rectangular Reinf. Conc. Beams with Compr. Steel", CE & PWR, 1952
- 6) 著者: "鉄筋コンクリート梁の破壊強度並びに許容設計に関する研究", 土木学会論文集 19号, 1954

応用力学, 軌道

## 軌道の振動特性についての理論解

正員 佐藤 裕\*

### SOME THEORETICAL SOLUTIONS ON THE VIBRATIONAL PROPERTY OF RAILWAY TRACK

(Trans. of J.S.C.E No. 29 Dec. 1955)

Yutaka Satō, C.E. Member

**Synopsis** The purpose of this paper is to examine the vibrational response of railway track and to know about principal factors controlling its property on the track-model as much simplified as possible within such limits that the property is essentially retained. Some theoretical solutions are derived by means of transfer function and stiffness matrix.

**要 旨** 軌道の振動特性をその本質を失わぬ限度でできるだけ簡単化した模型について求めることおよびその特性を制御するためのおもな因子について知ることを目的として伝達函数および剛さマトリックスを用いて得られた理論解を示したものである。

#### 1. 緒 言

軌道はまくら木、道床および路盤などの力学的性質の明らかでないものから構成されているので、これについて動力学の理論解を求めるためには大きい仮定を入れて理想化を行わねばならない。軌道についてはこの理想化された模型が実際とへだたる度合が他の構造物の場合より大きいので、常に応力解析の実験によりつつ理論を組み立ててゆかねばならない。

理論は現象を制御するために必要な指針を示すのが第一の任務であるから、われわれは軌道のいかなる性質を制御しようとするかをまづ決めなければならない。軌道の動力学の問題の一つは車輪がレールをたたく衝撃力についてであつて、おもに接触点付近の衝撃波を扱わねばならない。他の一つは軌道各部に誘起される振動の成因と防振の問題であつて、ここで扱うのはもつぱら後者についてである。

#### 2. 伝達函数による振動特性の解

**2.1 連続弾性支持のレールのタワミ** レールが連続的に分布した線型バネで支持されたものとするのが軌道を扱うときの従来の模型である。これの解はよく知られているように次のとおりである。

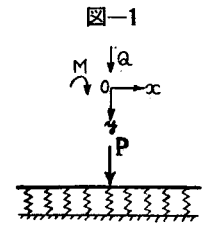
図-1 に示すように座標をとり  $x$  軸上にあるレール上で原点に  $y$  軸方向の外力が作用したときのレールのタワミの方程式は

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + ky = 0 \dots \dots \dots (1)$$

となる。ここで

$EI$ : レールの曲げ剛さ,  $k$ : 支持のバネ係数,  $P$ : 外力, とする。無限長レールについての境界条件からタワミ  $y$ , 傾斜  $\theta$ , モーメント  $M$  およびせん断力  $Q$  は

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{P}{8EI\beta^3} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), \quad \theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{4EI\beta^2} e^{-\beta x} \sin \beta x \\ M &= -EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x), \quad Q = EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$



\* 国有鉄道技師, 鉄道技術研究所軌道研究室

ここに  $\beta = \sqrt[4]{k/(4EI)}$

また半無限長レールの端に外力が作用したときの境界条件から  
 タワミ  $y'$ , 傾斜  $\theta'$ , モーメント  $M'$ , およびせん断力  $Q'$  は

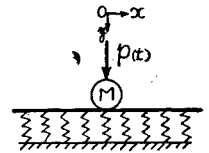
$$\left. \begin{aligned} y' &= \frac{P}{2EI\beta^3} e^{-\beta x} \cos \beta x, \theta' = -\frac{P}{2EI\beta^2} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ M' &= -\frac{P}{\beta} e^{-\beta x} \sin \beta x, Q' = P e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

となる。これらについては S. Timoshenko が数表を作つている<sup>1)</sup>。

**2.2 連続弾性支持のレールのタワミ振動** 前と同様な模型で原点に質量  $M$  があるときの振動特性を求める。一般に複雑な振動系の動力特性を函数的に表現することは容易でないので、この系が正弦波入力に対して示す周波数応答特性を周波数伝達函数と呼ばれる複素量で表わし、その絶対値は振巾特性を、またその偏角は位相特性を示すのでこれらを図式に表現して各種の動力特性を推定する方法が有効である<sup>2)</sup>。 図-2

図-2 の場合の振動方程式は回転慣性の項は微小であるから省略すれば、

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho a \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + d \frac{\partial y}{\partial t} + ky = 0 \dots\dots\dots (4)$$



となる。ここで

$\rho a$ : レールの単位長さの質量,  $d$ : 支持の減衰係数,  $p(t)$ : 外力,

いま  $t=0$  で  $y = \frac{dy}{dx} = 0$  として上式を Laplace 変換すれば

$$EI \frac{d^4 Y}{dx^4} + (\rho a s^2 + ds + k) Y = 0$$

となる。ここで  $Y(x, s) = \int_0^\infty y e^{-st} dt$

無限長レールについての境界条件の  $x=0$  における  $2EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(t), \frac{\partial y}{\partial x} = 0$  は  $2EI \frac{d^3 Y}{dx^3} + Ms^2 Y = P(s), \frac{dY}{dx} = 0$  となるから  $(\rho a s^2 + ds + k)$  が正の実数であれば解は (2) 式と同様に

$$Y(x, s) = \frac{P(s)}{8EI\beta_1^3 + Ms^2} e^{-\beta_1 x} (\cos \beta_1 x + \sin \beta_1 x) \dots\dots\dots (5)$$

となる。ここで  $\beta_1 = \sqrt[4]{(\rho a s^2 + ds + k)/(4EI)}$

いま  $G(s) = \frac{1}{8EI\beta_1^3 + Ms^2} \dots\dots\dots (6)$

とおいて  $G(s)$  を外力作用点の伝達函数と呼び、 $G(j\omega)$  は複素量となつて周波数伝達函数となる。

また半無限長レールの端に外力が作用するときは (3) 式と同様に

$$Y'(x, s) = \frac{P(s)}{2EI\beta_1^3 + Ms^2} e^{-\beta_1 x} \cos \beta_1 x \dots\dots\dots (7)$$

$$G'(s) = \frac{1}{2EI\beta_1^3 + Ms^2} \dots\dots\dots (8)$$

となる。そして  $|G(j\omega)|, \angle G(j\omega)$  はそれぞれ外力作用点の振巾特性および位相特性を示す。また  $Y(x, j\omega), Y'(x, j\omega)$  は  $p(t) = P_0 e^{j\omega t}$  に対する定常解となる。

次に  $\beta_1$  が実数とならない場合を  $d=0$  について考える。

外力  $P_0 e^{j\omega t}$  が作用したとき (4) 式の解は

$$y = e^{j\omega t} (Ae^{-\tau_1 x} + Be^{-j\tau_1 x} + Ce^{\tau_1 x} + De^{j\tau_1 x})$$

となる。ここで  $\tau_1 = \sqrt[4]{(\rho a \omega^2 - k)/EI}$  とする。

このとき積分常数は境界条件から決まらないから定常振動は存在しない。第2項は進行波、第4項は退行波であり、また無限遠のタワミは有限であるから  $x$  の正軸のみについては次の解が成り立つ。

$$y = e^{j\omega t} (Ae^{-\tau_1 x} + Be^{-j\tau_1 x})$$

無限長レールについての境界条件からタワミは

$$y = - \frac{4 EI r_1^3 + M \omega^2 - j M \omega^2}{(4 EI r_1^3 + M \omega^2)^2 + (M \omega^2)^2} P_0 e^{j \omega t} (e^{-\tau_1 x} + j e^{-j \tau_1 x}) \dots \dots \dots (9)$$

となる。

したがって外力作用点の周波数伝達函数は

$$G(j \omega) = - \frac{4 EI r_1^3 + 2 M \omega^2 + j 4 EI r_1^3}{(4 EI r_1^3 + M \omega^2)^2 + (M \omega^2)^2} \dots \dots \dots (10)$$

外力  $P_0 \cos \omega t$  に対して

$$y = - \frac{P_0}{(4 EI r_1^3 + M \omega^2)^2 + (M \omega^2)^2} [(4 EI r_1^3 + M \omega^2) \cos \omega t + M \omega^2 \sin \omega t] e^{-\tau_1 x} + (2 EI r_1^3 + M \omega^2) \sin(r_1 x - \omega t) + M \omega^2 \cos(r_1 x - \omega t) \dots \dots \dots (11)$$

の進行波が発生し原点より離れたところでは定常的になっている。その進行速度  $V$  および波長  $L$  は次のとおりとなる。

$$V = \frac{\omega}{\tau_1} = \omega \cdot \sqrt[4]{\frac{EI}{\rho a \omega^2 - k}}, \quad L = \frac{2\pi}{\tau_1} = 2\pi \sqrt[4]{\frac{EI}{\rho a \omega^2 - k}} \dots \dots \dots (12)$$

半無限長レールについては同様に

$$y' = - \frac{EI r_1^3 + 2 M \omega^2 + j EI r_1^3}{(EI r_1^3 + 2 M \omega^2)^2 + (EI r_1^3)^2} P_0 e^{j \omega t} (e^{-\tau_1 x} + e^{-j \tau_1 x}) \dots \dots \dots (13)$$

$$G'(j \omega) = -2 \frac{EI r_1^3 + 2 M \omega^2 + j EI r_1^3}{(EI r_1^3 + 2 M \omega^2)^2 + (EI r_1^3)^2} \dots \dots \dots (14)$$

外力  $P_0 \cos \omega t$  に対する進行波

$$y' = - \frac{P_0}{(EI r_1^3 + 2 M \omega^2)^2 + (EI r_1^3)^2} [(EI r_1^3 + 2 M \omega^2) \cos \omega t - EI r_1^3 \sin \omega t] e^{-\tau_1 x} + (EI r_1^3 + 2 M \omega^2) \cos(r_1 x - \omega t) + EI r_1^3 \sin(r_1 x - \omega t) \dots \dots (15)$$

進行速度および波長は (12) 式と同様である。

**2.3 連続弾性質量支持のレールのタワミ振動** レール支持のバネは質量を持つている。これを 図-3 に示す模型に理想化して考える。最初のバネの  $k_1$  はまくら木の圧縮弾性を、質量  $m$  はまくら木、道床および路盤のそれが集中したものとし、下のバネの  $k_2$  は道床と路盤の弾性を示すものとし連続的に分布されていると仮定する。

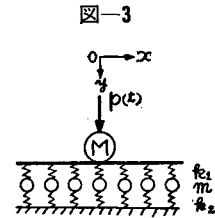


図-3

レールの変位を  $y_1$ 、質量  $m$  の変位を  $y_2$  とすれば振動方程式は

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + \rho a \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + d_1 \frac{\partial (y_1 - y_2)}{\partial t} + k_1 (y_1 - y_2) &= 0 \\ m \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + d_1 \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial t} + k_1 (y_2 - y_1) + k_2 y_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

となる。ここで

- $k_1$ : まくら木の圧縮バネ係数,                       $d_1$ :  $k_1$  バネの減衰係数
- $k_2$ : 道床路盤のバネ係数,                       $d_2$ :  $k_2$  バネの減衰係数

$m$ : 支持の振動質量, 以上すべてレール単位長さ当りの値とする。上式を Laplace 変換すれば

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{d^4 Y_1}{dx^4} + \rho a s^2 Y_1 + d_1 s (Y_1 - Y_2) + k_1 (Y_1 - Y_2) &= 0 \\ m s^2 Y_2 + d_1 s (Y_2 - Y_1) + k_1 (Y_2 - Y_1) + k_2 Y_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

となり、これから

$$EI \frac{d^4 Y_1}{dx^4} + \left\{ \rho a s^2 + d_1 s + k_1 - \frac{(d_1 s + k_1)^2}{m s^2 + d_1 s + k_1 + k_2} \right\} Y_1 = 0$$

となる。いま

$$\beta_2 = \sqrt[4]{\left\{ \rho a s^2 + d_1 s + k_1 - \frac{(d_1 s + k_1)^2}{m s^2 + d_1 s + d_2 s + k_1 + k_2} \right\} \frac{1}{4 EI}} \quad \text{とおき}$$

$\beta_2$  が正の実数のときは (5), (6), (7) および (8) 式の  $\beta_1$  に  $\beta_2$  を入れ換えた式が成り立つ。

$\beta_2$  は  $\omega$  に対して  $\beta_1$  と異なり  $d_1=d_2=0$  で考えれば2つの0点  $z_1, z_2$  および一つの無限大点  $z_3$  があつてこれに対して次のとおりとなる。

i)  $z_1 < z_2 < z_3$  のとき

$\omega < z_1$	(5), (6), (7), (8).....定常振動	}.....(18)
$z_1 < \omega < z_2$	(9), (10), (11), (12), (13), (14), (15).....進行波	
$z_2 < \omega < z_3$	(5), (6), (7), (8)	
$z_3 < \omega$	(9), (10), (11), (12), (13), (14), (15)	

ii)  $z_1 < z_3 < z_2$  のとき

$\omega < z_1$	定常振動	}.....(19)
$z_1 < \omega < z_3$	進行波	
$z_3 < \omega < z_2$	定常振動	
$z_2 < \omega$	進行波	

iii)  $z_3 < z_1 < z_2$  のとき

$\omega < z_3$	定常振動	}.....(20)
$z_3 < \omega < z_1$	進行波	
$z_1 < \omega < z_2$	定常振動	
$z_2 < \omega$	進行波	

となり前節の (5)~(15) の各式に  $\beta_1 \rightarrow \beta_2$

$$r \rightarrow r_2 = \sqrt[4]{\frac{\rho a \omega^2 - \frac{k_1(k_2 - m\omega^2)}{k_1 + k_2 - m\omega^2}}{EI}}$$

と入れ換えた式が成り立つ。

$y_2$  については (17) 式から

$$Y_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2 + ms^2} Y_1 \dots\dots\dots (21)$$

したがつて

$$G_2(s) = \frac{k_1 G_1(s)}{k_1 + k_2 + ms^2} \dots\dots\dots (22)$$

となつて同様にそれぞれの場合について振巾特性および位相が求められる。

3. 剛さマトリックスによる振動特性の解

3.1 等間隔弾性支持のレールのタワミ 軌道のレール支持はある間隔で行われているので、これを連続的に均等に分布されていると仮定することは検討を要するから、ある間隔で支持された模型について考える。これについては剛さマトリックスを用いる解法が有効である<sup>3), 4)</sup>。

一般に線型バリのタワミに対しては一点に作用する外力(力  $P$ , モーメント  $M$ ) とその点に生ずる変位(タワミ  $w$ , 傾斜  $\theta$ ) との間には

$$\left. \begin{aligned} P &= k_{11}w + k_{12}\theta \\ M &= k_{21}w + k_{22}\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

の形の関係が成立つ。ここで  $k_{ij}$  はハリの支持条件、曲げ剛さおよび外力の位置などによつてきまる定数であり、また線型系に対する相反作用の法則から  $k_{12} = k_{21}$  である。

(23) 式の関係性をマトリックスで表示すれば

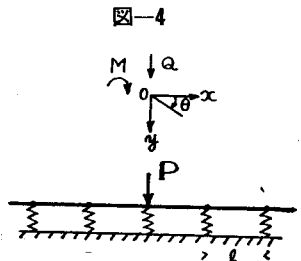
$$\begin{pmatrix} P \\ M \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} w \\ \theta \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

となり、 $K$  をこの系の剛さマトリックスと称する。

図-4 の系で外力および外的拘束を受けていない1スパンすなわちレール支持バネの中間のレールについてはそのタワミの方程式は

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \dots\dots\dots (25)$$

であつて一般解は



$$\left. \begin{aligned} y &= c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4, \quad \theta = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \\ Q &= EI \frac{d^3 y}{dx^3} = EIC_1, \quad M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -EI(c_1 x + c_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

で表わされる。

いま  $\eta' = \theta, \eta''' = Q/EI, \eta'' = M/EI$  とおけば (26) の関係はマトリックスで次のように表わされる。

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ \eta''' \\ \eta'' \end{pmatrix} = F_x \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}, \quad F_x = \begin{pmatrix} \frac{x^3}{6} & \frac{x^2}{2} & x & 1 \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

ここで  $F_x$  は解マトリックスと呼ばれる。

$\eta(x=0) = \eta_0, F_x(x=0) = F_0$  などと記せば

$$\begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_0' \\ \eta_0''' \\ \eta_0'' \end{pmatrix} = F_0 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ \eta''' \\ \eta'' \end{pmatrix} = F_x F_0^{-1} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_0' \\ \eta_0''' \\ \eta_0'' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \eta_l \\ \eta_l' \\ \eta_l''' \\ \eta_l'' \end{pmatrix} = F_l F_0^{-1} \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_0' \\ \eta_0''' \\ \eta_0'' \end{pmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

上の関係式で右端の境界値を知ればその単位系の全区間のタワミがわかる。ここで  $l$  はスパンの長さである。

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ から } F_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これから

$$G = \begin{pmatrix} G_A & G_B \\ G_C & G_D \end{pmatrix} = F_l F_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{l^3}{6} & \frac{l^2}{2} & l & 1 \\ \frac{l^2}{2} & l & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -l & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l & \frac{l^3}{6} & -\frac{l^2}{2} \\ 0 & 1 & \frac{l^2}{2} & -l \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -l & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

境界値伝達の関係をつぎつぎに接続する単位系, すなわち  $i$  番目と  $i+1$  番目のスパンについて表わせば

$$\begin{pmatrix} \eta_{i+1,0} \\ \eta_{i+1,0}' \\ \eta_{i+1,0}''' \\ \eta_{i+1,0}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{i,l} \\ \eta_{i,l}' \\ \eta_{i,l}''' \\ \eta_{i,l}'' \end{pmatrix} = G_i \begin{pmatrix} \eta_{i,0} \\ \eta_{i,0}' \\ \eta_{i,0}''' \\ \eta_{i,0}'' \end{pmatrix}$$

これから

$$\begin{pmatrix} \eta_{i+1,0} \\ \eta_{i+1,0}' \end{pmatrix} = G_A \begin{pmatrix} \eta_{i,0} \\ \eta_{i,0}' \end{pmatrix} + G_B \begin{pmatrix} \eta_{i,0}''' \\ \eta_{i,0}'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \eta_{i+1,0}''' \\ \eta_{i+1,0}'' \end{pmatrix} = G_C \begin{pmatrix} \eta_{i,0} \\ \eta_{i,0}' \end{pmatrix} + G_D \begin{pmatrix} \eta_{i,0}''' \\ \eta_{i,0}'' \end{pmatrix}$$

ところが  $i+1$  番目のスパンの始点への外力に対する剛さマトリックスを  $K^{i+1}$  とすれば

$$\begin{pmatrix} \eta_{i+1,0}''' \\ \eta_{i+1,0}'' \end{pmatrix} = k^{i+1} \begin{pmatrix} \eta_{i+1,0} \\ \eta_{i+1,0}' \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} \eta_{i,0}''' \\ \eta_{i,0}'' \end{pmatrix} = K^i \begin{pmatrix} \eta_{i,0}' \\ \eta_{i,0} \end{pmatrix}, \quad K^i = (-K^{i+1}G_B + G_D)^{-1}(K^{i+1}G_A - G_C) \dots\dots\dots (30)$$

上式の  $K^i$  は  $i$  番目のスパンに対する剛さマトリックスであつて、これが (30) 式によつて  $K^{i+1}$  から導かれる。すなわち漸化式が成り立つたことになる。内容を具体的に示せば次のとおりとなる。

$$\begin{aligned} k_{11}^i &= (|K^{i+1}|l + k_{11}^{i+1})1/D_i \\ k_{12}^i &= k_{21}^i = \left( |K^{i+1}| \frac{l^2}{2} + k_{11}^{i+1}l + k_{12}^{i+1} \right) 1/D_i \\ k_{22}^i &= \left( |K^{i+1}| \frac{l^3}{3} + k_{11}^{i+1}l^2 + 2k_{12}^{i+1}l + k_{22}^{i+1} \right) \\ D_i &= |K^{i+1}| \frac{l^4}{12} + k_{11}^{i+1} \frac{l^3}{3} + k_{12}^{i+1}l^2 + k_{22}^{i+1}l + 1 \\ |K^{i+1}| &= k_{11}^{i+1}k_{22}^{i+1} - (k_{12}^{i+1})^2 \end{aligned} \dots\dots\dots (31)$$

連続バリのタワミはこれらの式によつて機械的に解かれる。すなわち系の端点から始めて剛さマトリックスの漸化式によつて外力作用点に向つてつきつぎと途中にある支点の弾性拘束のマトリックスを加えてさかのぼつてゆき、ついに作用点の剛さマトリックスを導き問題を解くことができる。スパンが無限個のとき収斂するに十分な個数について計算すればよい。また各スパン長が異なるとき、ハリの曲げ剛さが異なるとき、さらに支持の拘束条件が異なるときも同様に機械的に解くことができる。計算の順序などについては次節に記す。

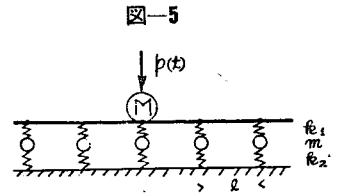
**3.2 等間隔弾性質支持のレールのタワミ振動** 定常的な強制振動の場合も前節と同様に外力と作用点の変位を結び剛さマトリックスは存在し、このときは外力振動数  $\omega$  の函数となつてこれを知れば作用点の振動特性は完全把握される。従つて集中外力による強制振動の問題は剛さマトリックスを具体的に導くことに帰する。なお自由に振動は外力が消えた特別の場合と考えて振動数方程式は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \omega \\ \theta \end{pmatrix} \text{ から } |K|=0$$

の形で求められる。

**A) 剛さマトリックス** 図-5 の模型で考える。前節と同様に外力および外的拘束を受けない1スパンを単位系にとればこの振動方程式は、

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho a \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (32)$$



であつてそのタワミ振巾に対する一般解は

$$\eta(x) = C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi + C_3 \cosh \xi + C_4 \sinh \xi \dots\dots\dots (33)$$

で与えられる。ここで

$$\xi = \frac{\lambda}{l} x, \quad \frac{\lambda}{l} = \sqrt[4]{\frac{\rho a \omega^2}{EI}}$$

これから傾斜  $\theta$ 、せん断力  $Q$  およびモーメント  $M$  に対する一般的表現も

$$\theta = \frac{d\eta}{dx}, \quad Q = EI \frac{d^3\eta}{dx^3}, \quad M = -EI \frac{d^2\eta}{dx^2}$$

の関係から任意常数を含む一次式で得られる。計算の便宜のため

$$\eta' = \frac{\theta}{\left(\frac{\lambda}{l}\right)}, \quad \eta'' = \frac{M}{EI \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2}, \quad \eta''' = \frac{Q}{EI \left(\frac{\lambda}{l}\right)^3}$$

とおいてこれらの関係をマトリックスで表わすときの解マトリックスは  $c = \cos \xi$ ,  $s = \sin \xi$ ,  $C = \cosh \xi$ ,  $S = \sinh \xi$  とすれば

$$F_x = \begin{pmatrix} c & s & C & S \\ -s & c & S & C \\ s & -c & S & C \\ c & s & -C & -S \end{pmatrix} \dots\dots\dots (34)$$

となる。したがつて

$$F_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_0^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$G = \begin{pmatrix} G_A & G_B \\ G_C & G_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c+C), (s+S) & -(s-S), (c-C) \\ -(s-S), (c+C) & -(c-C), -(s+S) \\ (s+S), -(c-C) & (c+C), (s-S) \\ (c-C), (s-S) & -(s+S), (c+C) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (35)$$

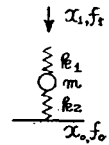
前節と同様に  $K^i$  マトリックス漸化式を導けば<sup>3)</sup>

$$\left. \begin{aligned} k_{11}^i &= \{ (cS + Cs) | K^{i+1} | + 2cCk_{11}^{i+1} + 2(cS - Cs)k_{12}^{i+1} - 2sSk_{22}^{i+1} - (cS + Cs) \} \frac{1}{\Delta_i} \\ k_{12}^i &= \{ sS | K^{i+1} | + (cS + Cs)k_{11}^{i+1} + 2cCk_{12}^{i+1} + (cS - Cs)k_{22}^{i+1} - sS \} \frac{1}{\Delta_i} \\ k_{22}^i &= \{ -(cS - Cs) | K^{i+1} | + 2sSk_{11}^{i+1} + 2(cS + Cs)k_{12}^{i+1} + 2cCk_{22}^{i+1} + (cS - Cs) \} \frac{1}{\Delta_i} \\ \Delta_i &= (1 - cC) | K^{i+1} | - (cS - Cs)k_{11}^{i+1} + 2sSk_{12}^{i+1} + (cS + Cs)k_{22}^{i+1} + (1 + cC) \\ | K^{i+1} | &= k_{11}^{i+1}k_{22}^{i+1} - (k_{12}^{i+1})^2 \end{aligned} \right\} (36)$$

となる。

**B) 支点の剛さマトリックス** 図-6 に示すように支点がバネと質量系の場合は外力点と支持端点の変位および力の間に次の関係が成り立つ。

図-6



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ f_0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 - \frac{m\omega^2}{k_1} & \frac{k_1 + k_2 - m\omega^2}{k_1 k_2} \\ -m\omega^2 & \frac{k_2 - m\omega^2}{k_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ f_0 \end{pmatrix}$$

いま  $x_0 = 0$  のときは

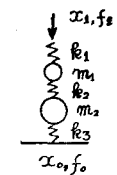
$$x_1 = \frac{k_1 + k_2 - m\omega^2}{k_1 k_2} f_0, \quad f_1 = \frac{k_2 - m\omega^2}{k_2} f_0 \text{ となるから,} \\ f_1 = \frac{k_1(k_2 - m\omega^2)}{k_1 + k_2 - m\omega^2} x_1$$

上記のようなモーメント抵抗のない支点の剛さマトリックスはしたがって

$$K_s' = \begin{pmatrix} \frac{k_1(k_2 - m\omega^2)}{k_1 + k_2 - m\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。ところが計算の便利のため剛さマトリックス  $K$  は  $\eta$  について求めてあつて

図-7



$$\begin{pmatrix} Q \\ M \end{pmatrix} = K' \begin{pmatrix} \eta \\ \theta \end{pmatrix} \text{ であれば}$$

$$\begin{pmatrix} \eta''' \\ \eta'' \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} \text{ の } K \text{ は}$$

$$k_{11} = \frac{k_{11}'}{EI \left( \frac{\lambda}{l} \right)^3}, \quad k_{12} = \frac{k_{12}'}{EI \left( \frac{\lambda}{l} \right)^2}, \quad k_{22} = \frac{k_{22}'}{EI \left( \frac{\lambda}{l} \right)} \text{ となる。}$$

従つて支点の剛さマトリックスは

$$K_s = \begin{pmatrix} \frac{k_1(k_2 - m\omega^2)}{k_1 + k_2 - m\omega^2} \frac{1}{EI \left( \frac{\lambda}{l} \right)^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (37)$$

図-7 のような模型に対しては

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m_2\omega^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k_3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ f_0 \end{pmatrix}$$

として同様に  $K_s = \begin{pmatrix} k_1\{k_2k_3 - k_2(m_1\omega^2 + m_2\omega^2) - k_3m_1\omega^2 + m_1m_2\omega^4\} & 0 \\ k_1k_2 + k_2k_3 + k_1k_3 - k_2(m_1\omega^2 + m_2\omega^2) - k_3m_1\omega^2 + m_1m_2\omega^4 & \frac{1}{EI\left(\frac{\lambda}{l}\right)^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  となる。

C) 外力作用点質量の剛さマトリックス 図-8 のように外力作用点にある質量  $M$  の剛さマトリックスは前と同様に

$$K_M = \begin{pmatrix} -M\omega^2 & \frac{1}{EI\left(\frac{\lambda}{l}\right)^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (38)$$

図-8

図-9



ところが車輪とレール間の変形を近似的に線型バネとすれば<sup>5)</sup>, 図-9 に示すような模型となりこのときは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k_3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -M\omega^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ f_0 \end{pmatrix}$$

で  $f_0=0$  から

$$f_1 = -\frac{k_3M\omega^2}{k_3 - M\omega^2} x_1 \text{ となり}$$

$$K_M = \begin{pmatrix} -\frac{k_3M\omega^2}{k_3 - M\omega^2} & \frac{1}{EI\left(\frac{\lambda}{l}\right)^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (39)$$

D) 振動数方程式 外力作用点の剛さマトリックスおよび振動数方程式は次のようにして求められる。

(i) 無限長レールで外力が支点上にあるとき :

$$K^{i+1} = K_s \text{ として } K^i \text{ を計算する。}$$

$$K^i + K_s \text{ を端の条件として } K^{i-1} \text{ を計算する。}$$

$$K^{i-1} + K_s \text{ を端の条件として } K^{i-1} \text{ を計算する。}$$

このようにして  $K^1$  を計算する。

外力作用点の全剛さマトリックス  $K_p$  は

$$K_p = 2K^1 + K_s + K_M$$

$$\begin{pmatrix} \eta_0''' \\ \eta_0'' \end{pmatrix} = K_p \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_0' \end{pmatrix} \dots\dots\dots (40)$$

で、境界条件  $\eta_0' = 0$  であるから

$$\eta_0 = \frac{\eta_0'''}{k_{p11}}$$

したがって外力  $P_0 e^{j\omega t}$  に対して

$$y_0 = \frac{P_0}{k_{p11} EI \left(\frac{\lambda}{l}\right)^3} e^{j\omega t} \dots\dots\dots (41)$$

また振動数方程式は

$$k_{p11} = 0 \dots\dots\dots (42)$$

(ii) 無限長レールで外力が支点中間にあるとき : 外力作用点と最初の支点との間のスパンを 1 番目とする。前と同様に  $K^2$  まで計算し

$K^1$  は  $K^2 + K_s$  を端の条件としてスパン長を  $l/2$  として計算する。このときの外力作用点の全剛さマトリックスは  $K_p = 2K^1 + K_M$  となり、あとは (40) および (41) 式と同様である。

(iii) 半無限長レールで外力が支点から  $l'$  の距離にあるレール端にあるとき : (ii) と同様にスパン長  $l'$  に対して  $K^1$  を求めて  $K_p = K^1 + K_M$  とする。

(40) 式でこのときの境界条件は  $\eta_0'' = 0$  であるから



$$\eta_0 = \frac{k_{p22}}{|K_p|} \eta_0''''$$

したがって外力  $P_0 e^{i\omega t}$  に対して

$$y_0 = \frac{k_{p22}}{|K_p| EI} P_0 e^{i\omega t} \dots \dots \dots (43)$$

また振動数方程式は

$$|K_p| = 0 \dots \dots \dots (44)$$

任意の点の変位その他も (28) 式によつて求められる。また外力作用点以外にも質量があるときも解くことができる。

#### 4. 結 語

軌道の振動特性を理想化した模型について求める基本式を誘導したがこれらの有用性は数値計算と実験とを対比して検討しなければならない。また軌道を模型化するとき、支持体を半無限弾性体としてレール支持間隔ごとのある面積で位相のずれた外力が作用するとしたものも今後考えなければならない。

3. のマトリックスによる方法は電子計算器を利用でき、欧米のおもに航空機機体力学関係で用いられている例を多く見る。普通の数値計算を行うにははなはだ手間を要するので目下のところ 2. の方法による解と一、二比較を行つたのみである。電子計算器を利用する日を期して解式を整理しておくのも無意味ではないと考える。

#### 文 献

- 1) テモシェンコ：材料力学（片山，北畠訳）p. 251～258
- 2) 高橋秀俊：振動と回路，岩波現代物理学講座
- 3) 高橋利衛：機械振動とその防止，オーム文庫 p. 150～158
- 4) 藤原松三郎：行列及び行列式，岩波全書  
小泉四郎：応用函数論及びマトリックス代数
- 5) A. Chartet：Le contact de deux corps solides, S.F.M. p.9 mais, 1952

土の振動伝播及び圧密について

## 土の振動伝播及び圧密について\*

正 員 後 藤 正 司\*\*

### ON THE PROPAGATION OF VIBRATIONS AND THE CONSOLIDATION OF A SOIL LAYER

(Trans. of JSCE, No. 29, Dec. 1955)

Shōji Gotō, C.E. Member

**Synopsis** The theoretical studies on the propagation of vibrations and the consolidation of a uniform soil layer which is laid on the hard pan are presented in this paper. Author applied the Maxwell's plastic equation for the plastic deformations of the soil.

**要 旨** 一様な性質の土層が基盤の上にある場合に地表面に加えられた一定の荷重及び振動力に対して圧力の分布及び振動振巾の分布を深さに関して求めたものである。この理論的取扱いの基礎として塑性変形について Maxwell の式を用いた。

**序** 土の圧密を最初に理論的に取扱つた K. Terzaghi<sup>1)</sup> は、周知の圧密式により土の圧密変形を説明し、圧密沈下の基礎的解明に貢献した。しかし荷重による脱水のみを圧密のメカニズムとしているために、これだけで土の塑性変形を十分に説明することは困難であると思われる。例えば二次的圧密の問題に当つてたちまち当面することも知られている<sup>2), 3)</sup>。しかしこの究明には土の塑性変形のより本質的な問題にふれなければならないであろう。かつて D. Taylor 及び W. Merchant は塑性変形の仮定を導入して圧密を説明し、さらにその仮定を修正し石井博士<sup>4)</sup> は実験にもかなりよく合致する理論的解明を示された。また山口氏<sup>5)</sup> 京大村山研究室<sup>6)</sup> における圧密解もこの圧密現象への説明についての前進と思われる。筆者がここに取上げたのは土層の圧密と振動伝播との関係を得ようと試みたものではあるが、土の塑性変形の型としては在来の型の一つである Maxwell 型<sup>7), 8)</sup> に従つた。

\* 昭和 29 年 5 月 30 日 第 10 回土木学会年次講演会にて発表

\*\* 早稲田大学助教授，理工学部土木教室