

橋脚井筒の弾性動揺振動におよぼすセン断効果¹⁾

正員 後 藤 尚 男*

ON THE EFFECT OF SHEARING FORCE ON THE ELASTIC AND ROCKING VIBRATION OF BRIDGE PIERS AND WELL CONSTRUCTIONS

(Trans. of JSCE, No. 29, Dec. 1955)

Hisao Gotō, C.E. Member

Synopsis The vibration characteristics of the bridge piers and well constructions are, as the author proposed hitherto, explained by the elastic and rocking vibration phenomena. In this respect, a shearing effect on the above-mentioned phenomena was investigated theoretically as the following three types: (1) bending and shearing vibration, (2) bending vibration, (3) shearing vibration. Applying these solutions to the actual bridge piers and well constructions, the numerical computation was carried out carefully. The result obtained was that the shearing effect is negligible small to the vibration characteristics of bridge piers and well constructions in spite of their dumpy forms.

要 旨 橋脚井筒は基礎地盤の影響をうけて、弾性動揺振動を行うことを著者はすでに確認したが、本研究は引続いてこの振動におよぼすセン断効果について詳細な考究を進めたものである。この場合弾性動揺振動を 1) 曲げセン断振動, 2) 曲げ振動, 3) セン断振動の三者として理論的な解析を行い、実在橋脚井筒を例にとつて詳細な数値計算を実施した。この結果道路橋の橋軸に直角方向のように、長さに対して横断寸法がかなり大きいいわゆる太くかつ短かい寸法の橋脚井筒で、弾性動揺振動のいちじるしい特性としてセン断効果は非常に小さく、事実上これを無視してもよいという注目すべき成果を収めることができた。

1. 緒 言

著者はここ数年來橋脚地盤の基礎係数值 $K(x_1)$ を採用した橋脚井筒の振動性状を研究してきたが、いずれの場合でも橋脚井筒は太くかつ短かい形状をもっているにもかかわらず、セン断の影響は比較的小さいものとして無視し、振動性状をもつぱら曲げ振動的に取扱つてきた²⁾。しかし道路橋の下部構造として建設されている井筒基礎をもつ橋脚の橋軸に直角方向の振動を対象とするときには、一般に橋脚躯体の長さ h とその振動方向の中 c_2 との比 c_2/h 及び井筒におけるこの比 c_1/d (図-1(1)) がいずれも 1 の前後のことが多い (たとえば図-4(1))。こうした場合にも果してセン断の影響は小さいとして無視してもよいであろうかという当然の疑念がおこる。本研究では特にこの点を直接解明しようとするものである。

セン断及び回転慣性を考慮したハリの振動に関する基礎方程式はよく知られているとおり、Timoshenko によつて導かれ、彼は同時に単純バリの解を簡単に示している³⁾。また戸部俊美、大野 豊氏等は他のハリにも拡張しているが、両氏等の境界条件のとり方には少なからざる疑点がある⁴⁾。そのうち酒井忠明教授は中空円筒片持バリのセン断曲げ振動⁵⁾を、石崎澄雄助教授は片持バリのセン断曲げ振動及び高層ビル(地下、地上の2区間)のセン断振動⁶⁾といずれも戸部、大野氏等と異なるセン断角を重視した合理的な境界条件を用いて解明している。しかし酒井教授が地表面で完全固定と考えた単なる片持バリに言及している点、石崎助教授が2区間振動ではセン断のみを対象とし、しかも基礎方程式中で地盤の基礎反力による項を慣性項と異符号と考えた点⁷⁾等はいずれも本文にはそのまま適用することができない。そこで本文では正しいと思われる酒井教授、石崎助教授の境界条件の表示法を引用して、橋脚井筒の2区間(地上部及び地中部)の曲げセン断の各動揺振動を解明したわけである。

著者はすでに弾性動揺振動の意義を独自の立場から強調したが⁸⁾、本研究の結果さらにその本質を明確にすることができた。実際に理論を進めるに当つては弾性動揺振動として最低次の振動数のみを取り、かつセン断効果を究明するという命題からそれないと思われる範囲内で、次の仮定ないし簡易的な取扱ひ法を採ることにした。1) 振動はすべて均一断面のハリ理論に従う、2) 回転慣性の影響は一応考慮しない、3) 基礎係数值は根入深さ方向に一定と仮定して $K(x_1) = K_0$ とおく、4) 井筒底面の上向反力を無視する、5) 数値計算に当つては上部構造による載荷重量 W を除外する。

2. 曲げセン断振動に関する基礎方程式

図-1(1), (2) の根入区間 AB (井筒: 添字 1 を付す) を Timoshenko と同様に、曲げ: b , セン断: s , 回転慣性: r に分けて考え、これに地盤の基礎反力 k_1 (図-1(4)) を追加するとまず次式がかかる。

* 京都大学助教授, 工学部土木工学教室

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_{1b} + y_{1s} + y_{1r}, \quad p_1 = b_1 K(x_1) y_1, \\
 \varphi_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \varphi_{1b} + \varphi_{1s} + \varphi_{1r}, \quad M_1 = -E_1 I_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (\varphi_{1b} + \varphi_{1r}), \\
 S_1 &= k_1' a_1 G_1 \varphi_{1s}, \quad \text{かつ} \quad S_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x_1}
 \end{aligned} \tag{1}$$

ここに y_1, φ_1, M_1, S_1 : 変位, 傾斜, 曲げモーメント, セン断力, $E_1 I_1$: 曲げ剛性, G_1 : セン断弾性係数, k_1' : セン断力に関する断面形状係数, a_1 : 断面積, b_1 : 奥行き。

図-1 (4) に着目すると回転及び直線運動として,

$$\left. \begin{aligned}
 S_1 dx_1 - \frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx_1 &= \frac{I_1 w_1}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varphi_{1b} + \varphi_{1r}) dx_1, \\
 \frac{\partial S_1}{\partial x_1} dx_1 - p_1 dx_1 &= \frac{w_1 a_1}{g} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} dx_1
 \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

がえられる。いうまでもなく w_1 : 単位体積の重量, g : 重力の加速度。式 (2) に式 (1) を代入して式 (3) をうる。

$$\left. \begin{aligned}
 E_1 I_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\varphi_{1b} + \varphi_{1r}) + k_1' a_1 G_1 (\varphi_1 - \varphi_{1b} - \varphi_{1r}) &= \frac{I_1 w_1}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varphi_{1b} + \varphi_{1r}), \\
 k_1' a_1 G_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (\varphi_1 - \varphi_{1b} - \varphi_{1r}) - b_1 K(x_1) y_1 &= \frac{w_1 a_1}{g} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}
 \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

式 (3) から $\varphi_{1b} + \varphi_{1r} = \varphi'$ を消去するため, 式 (3)₂ から $\partial \varphi_1' / \partial x_1$ を繰り出し, これから $\partial^2 \varphi_1' / \partial x_1^2$ を作り, これらを $\partial / \partial x_1 \cdot [$ 式 (3)₁ $]$ に代入すると回転慣性を考慮した場合の次の基礎方程式をうる。

$$\begin{aligned}
 E_1 I_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^4} - \frac{b_1 K(x_1) E_1 I_1}{k_1' a_1 G_1} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} - \frac{I_1 w_1}{g} \left(1 + \frac{E_1}{k_1' G_1} \right) \frac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^2 \partial t^2} \\
 + b_1 K(x_1) y_1 + \frac{w_1 a_1}{g} \left(1 + \frac{I_1 b_1 K(x_1)}{k_1' a_1^2 G_1} \right) \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \frac{I_1 w_1^2}{k_1' G_1 g^2} \frac{\partial^4 y_1}{\partial t^4} = 0 \tag{4}
 \end{aligned}$$

地上部 BC については式 (4) で $K(x_1) = 0$ とおき, かつ添字 1 をすべて添字 2 に改めると, 当然 Timoshenko と同一の結果として式 (5) をうる。

$$E_2 I_2 \frac{\partial^4 y_2}{\partial x_2^4} - \frac{I_2 w_2}{g} \left(1 + \frac{E_2}{k_2' G_2} \right) \frac{\partial^4 y_2}{\partial x_2^2 \partial t^2} + \frac{w_2 a_2}{g} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + \frac{I_2 w_2^2}{k_2' G_2 g^2} \frac{\partial^4 y_2}{\partial t^4} = 0 \tag{5}$$

式 (4), (5) を連立に解くと, 図-1 に対する自由振動の解が求まる。ここで緒言に述べたように回転慣性を無視して式 (1), (2), (3) で $\varphi_{1r} = 0$ とおき, かつ $K(x_1) = K_0$ とおくと曲げセン断振動に関する基礎方程式 (6) 及び (7) をうる。

$$E_1 I_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^4} - \frac{E_1 I_1 b_1 K_0}{k_1' a_1 G_1} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} - \frac{E_1 I_1 w_1}{k_1' G_1 g} \frac{\partial^4 y_1}{\partial x_1^2 \partial t^2} + b_1 K_0 y_1 + \frac{w_1 a_1}{g} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

$$E_2 I_2 \frac{\partial^4 y_2}{\partial x_2^4} - \frac{E_2 I_2 w_2}{k_2' G_2 g} \frac{\partial^4 y_2}{\partial x_2^2 \partial t^2} + \frac{w_2 a_2}{g} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0 \tag{7}$$

3. 振動数方程式及び正規函数

(1) 基礎方程式の一般解 図-1 で AB と BC とが一体となつて振動すると考えると, 両区間共通の振動数 n と位相角 ϕ とを用いて式 (8) がかける。

$$y_1 = u_1 \cos (nt + \phi), \quad y_2 = u_2 \cos (nt + \phi) \tag{8}$$

ここに u_1, u_2 はいうまでもなく AB, BC に対する振動形状を与える正規函数である。式 (8) を式 (6), (7) に代入して時間函数 $\cos (nt + \phi)$ を消去すると,

$$\frac{d^4 u_1}{dx_1^4} - \frac{1}{k_1' a_1 G_1} \left(b_1 K_0 - \frac{w_1 a_1 n^2}{g} \right) \frac{d^2 u_1}{dx_1^2} + \frac{1}{E_1 I_1} \left(b_1 K_0 - \frac{w_1 a_1 n^2}{g} \right) u_1 = 0 \tag{9}$$

$$\frac{d^4 u_2}{dx_2^4} + \frac{w_2 n^2}{k_2' G_2 g} \frac{d^2 u_2}{dx_2^2} - \frac{w_2 a_2 n^2}{E_2 I_2 g} u_2 = 0 \tag{10}$$

式 (9) を解くのに $(b_1 K_0 - w_1 a_1 n^2 / g) >, =, < 0$ が問題となる。ところが本研究で対象としている振動数 n はその最小値 n_{\min} である。簡単のため $n_{\min} = n_1$ とかくと, 著者の前論文から $(b_1 K_0 - w_1 a_1 n_1^2 / g) > 0$ であること

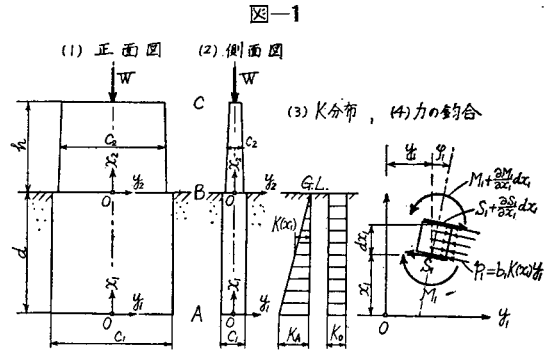


図-1

が証明できる⁹⁾。しからば式(9)の一般解は A を積分常数として式(11)で与えられる¹⁰⁾。

$$u_1 = (A_1 e^{\tau_1 x_1} + A_2 e^{-\tau_1 x_1}) \cos \delta_1 x_1 + (A_3 e^{\tau_1 x_1} + A_4 e^{-\tau_1 x_1}) \sin \delta_1 x_1, \quad \left. \begin{aligned} \text{ここに,} \\ \tau_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\beta_1 + \frac{\alpha_1}{2}})}, \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\beta_1 - \frac{\alpha_1}{2}})}, \\ \alpha_1 = \frac{1}{k_1' a_1 G_1} \left(b_1 K_0 - \frac{w_1 a_1 n_1^2}{g} \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{E_1 I_1} \left(b_1 K_0 - \frac{w_1 a_1 n_1^2}{g} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

式(10)の一般解は B を積分常数として次式でかける。

$$u_2 = B_1 \cosh \delta_2 x_2 + B_2 \sinh \delta_2 x_2 + B_3 \cos \tau_2 x_2 + B_4 \sin \tau_2 x_2, \quad \left. \begin{aligned} \text{ここに,} \\ \tau_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha_2^2 + 4\beta_2} + \alpha_2)}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha_2^2 + 4\beta_2} - \alpha_2)}, \\ \alpha_2 = \frac{w_2 n_2^2}{k_2' G_2 g}, \quad \beta_2 = \frac{w_2 a_2 n_2^2}{E_2 I_2 g} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

(2) 振動数方程式 式(1)及び式(8)から、

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_{1b} + y_{1s} = (u_{1b} + u_{1s}) \cos(nt + \phi) = u_1 \cos(nt + \phi), \\ \varphi_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \left(\frac{du_{1b}}{dx_1} + \frac{du_{1s}}{dx_1} \right) \cos(nt + \phi) = \frac{du_1}{dx_1} \cos(nt + \phi), \\ M_1 &= -E_1 I_1 \frac{\partial^2 y_{1b}}{\partial x_1^2} = -E_1 I_1 \left(\frac{d^2 u_{1b}}{dx_1^2} - \frac{d^2 u_{1s}}{dx_1^2} \right) \cos(nt + \phi), \text{ かつ式(2)}_2: \\ &\quad \frac{\partial S_1}{\partial x_1} - b_1 K_0 y_1 = \frac{w_1 a_1}{g} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \text{ より } \frac{d^2 u_{1s}}{dx_1^2} = d_1 u_1, \alpha_1: \text{式(11)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

従つて M_1, S_1 は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -E_1 I_1 \left(\frac{d^2 u_1}{dx_1^2} - \alpha_1 u_1 \right) \cos(nt + \phi), \\ S_1 &= \frac{\partial M_1}{\partial x_1} = -E_1 I_1 \left(\frac{d^3 u_1}{dx_1^3} - \alpha_1 \frac{du_1}{dx_1} \right) \cos(nt + \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

一方地上部 BC は $K_0 = 0$ であることを考慮して、

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= -E_2 I_2 \left(\frac{d^2 u_2}{dx_2^2} + \alpha_2 u_2 \right) \cos(nt + \phi), \\ S_2 &= -E_2 I_2 \left(\frac{d^3 u_2}{dx_2^3} + \alpha_2 \frac{du_2}{dx_2} \right) \cos(nt + \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

次に境界条件及び接続条件は 図-1 から、

$$\left. \begin{aligned} 1) \text{ 最下端 A, } x_1 = 0: M_1 = 0, S_1 = 0, \\ 2) \text{ 地盤面 B, } x_1 = d \text{ かつ } x_2 = 0: \\ \quad y_1 = y_2, \varphi_1 = \varphi_2, M_1 = M_2, S_1 = S_2 \\ 3) \text{ 頂部 C, } x_2 = h: M_2 = 0, S_2 = -\frac{W}{g} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

である。式(8), (11), (12)の y, u から式(13), (14), (15)の φ, M, S を算出し、これらを式(16)の8個の条件式に代入すると、式(11), (12)の A, B 8個の積分常数を消去することができる。この計算を遂行して整理すると結局次の振動数方程式をうる。

$$\begin{aligned} F(n_1) &= \{ \lambda_1 (\delta_2^2 + \alpha_2) \cosh \delta_2 h + \lambda_2 (\delta_2^2 + \alpha_2) \sinh \delta_2 h - \lambda_3 (\tau_2^2 - \alpha_2) \cos \tau_2 h - \lambda_4 (\tau_2^2 - \alpha_2) \sin \tau_2 h \} \\ &\quad \times \left[\mu_1 \{ \delta_2 (\delta_2^2 + \alpha_2) \sinh \delta_2 h + W_n \cosh \delta_2 h \} + \mu_2 \{ \delta_2 (\delta_2^2 + \alpha_2) \cosh \delta_2 h + W_n \sinh \delta_2 h \} \right] \\ &\quad - \{ \mu_3 \{ \tau_2 (\tau_2^2 - \alpha_2) \sin \tau_2 h + W_n \cos \tau_2 h \} + \mu_4 \{ -\tau_2 (\tau_2^2 - \alpha_2) \cos \tau_2 h + W_n \sin \tau_2 h \} \} \\ &\quad - \{ \mu_1 (\delta_2^2 + \alpha_2) \cosh \delta_2 h + \mu_2 (\delta_2^2 + \alpha_2) \sinh \delta_2 h - \mu_3 (\tau_2^2 - \alpha_2) \cos \tau_2 h - \mu_4 (\tau_2^2 - \alpha_2) \sin \tau_2 h \} \\ &\quad \times \left[\lambda_1 \{ \delta_2 (\delta_2^2 + \alpha_2) \sinh \delta_2 h + W_n \cosh \delta_2 h \} + \lambda_2 \{ \delta_2 (\delta_2^2 + \alpha_2) \cosh \delta_2 h + W_n \sinh \delta_2 h \} \right] \\ &\quad + \lambda_3 \{ \tau_2 (\tau_2^2 - \alpha_2) \sin \tau_2 h + W_n \cos \tau_2 h \} + \lambda_4 \{ -\tau_2 (\tau_2^2 - \alpha_2) \cos \tau_2 h + W_n \sin \tau_2 h \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= A_1 \{ j(\tau_2^2 - \alpha_2) + e_i I \}, & \lambda_2 &= A_3 \{ e_i m + k(\tau_2^2 - \alpha_2) \}, \\ \lambda_3 &= A_1 \{ j(\delta_2^2 + \alpha_2) - e_i I \}, & \lambda_4 &= A_2 \{ k(\delta_2^2 + \alpha_2) - e_i m \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= A_1 \{j'(r_2^2 - \alpha_2) + e_i l'\}, & \mu_2 &= A_3 \{e_i m' + k'(r_2^2 - \alpha_2)\}, \\
 \mu_3 &= A_1 \{j'(\delta_2^2 + \alpha_2) - e_i l'\}, & \mu_4 &= A_2 \{k'(\delta_2^2 + \alpha_2) - e_i m'\}, \\
 A_1 &= 1/\sqrt{\alpha_2^2 + 4\beta_2}, & A_2 &= A_1/r_2, & A_3 &= A_1/\delta_2, \\
 j, j' &= e^{\pm r_1 a} \cos \delta_1 d + \frac{\sin \delta_1 d}{4 r_1 \delta_1} (\alpha_1 \sinh r_1 d \pm 4 r_1^2 \cosh r_1 d), \\
 k, k' &= \pm e^{\pm r_1 a} (r_1 \cos \delta_1 d \mp \delta_1 \sin \delta_1 d) \\
 &+ \frac{1}{4 r_1 \delta_1} \{r_1 (\alpha_1 \sin \delta_1 d \pm 4 r_1 \delta_1 \cos \delta_1 d) \cosh r_1 d + (\alpha_1 \delta_1 \cos \delta_1 d \pm 4 r_1^3 \sin \delta_1 d) \sinh r_1 d\}, \\
 l, l' &= \frac{1}{8 r_1 \delta_1} \left\{ 4 \alpha_1 r_1 (\delta_1 \cos \delta_1 d \mp r_1 \sin \delta_1 d) \cosh r_1 d \right. \\
 &\left. - (\alpha_1^2 \sin \delta_1 d \mp 16 r_1^3 \delta_1 \cos \delta_1 d) \sinh r_1 d - 4 r_1 \delta_1 e^{\pm r_1 a} (\alpha_1 \cos \delta_1 d \pm 4 r_1 \delta_1 \sin \delta_1 d) \right\}, \\
 m, m' &= \pm \frac{1}{4 r_1 \delta_1} \\
 &\times \left\{ \delta_1 (\alpha_1^2 + 2\beta_1 - 4\alpha_1 r_1^2) \cosh r_1 d \cos \delta_1 d + r_1 (\alpha_1^2 - 2\beta_1 - 4\alpha_1 r_1^2) \sinh r_1 d \sin \delta_1 d \right. \\
 &\left. + 2\sqrt{\beta_1} \delta_1 e^{\pm r_1 a} (\alpha_1 \cos \delta_1 d - 2r_1^2 \cos \delta_1 d \mp 2r_1 \delta_1 \sin \delta_1 d) + \alpha_1 \sqrt{\beta_1} e^{\pm r_1 a} (\delta_1 \cos \delta_1 d \mp r_1 \sin \delta_1 d) \right\},
 \end{aligned} \tag{17}$$

ただし複号同順, $e_i = E_1 I_1 / E_2 I_2$, $W_n = W n_1^2 / (E I_2 g)$,

$$\alpha_1, \beta_1, r_1, \delta_1 = f_1(n_1) : \text{式 (11)}, \quad \alpha_2, \beta_2, r_2, \delta_2 = f_2(n_1) : \text{式 (12)}$$

式 (17) を満足する n_1 が曲げセン断動揺の振動数である。

(3) 正規函数 振動形状を決定する正規函数 u 及び u_2 は式 (16) の条件式を用いて式 (11), (12) の積分常数 A, B 相互間の比を決定することにより次式をうる。

$$u_1 = A_1 [(e^{r_1 x_1} - s e^{-r_1 x_1}) \cos \delta_1 x_1 + \{(i - si') e^{r_1 x_1} + (si - i') e^{-r_1 x_1}\} \sin \delta_1 x_1],$$

$$\begin{aligned}
 \text{ここに,} \\
 i, i' &= (\alpha_1 \pm 4 r_1^2) / 8 r_1 \delta_1, \quad s = \Sigma_1 / \Sigma_3, \\
 \Sigma_1 &= \lambda_1 (\delta_2^2 + \alpha_2) \cosh \delta_2 h + \lambda_2 (\delta_2^2 + \alpha_2) \sinh \delta_2 h - \lambda_3 (r_2^2 - \alpha_2) \cos r_2 h - \lambda_4 (r_2^2 - \alpha_2) \sin r_2 h, \\
 \Sigma_3 &= \mu_1 (\delta_2^2 + \alpha_2) \cosh \delta_2 h + \mu_2 (\delta_2^2 + \alpha_2) \sinh \delta_2 h - \mu_3 (r_2^2 - \alpha_2) \cos r_2 h - \mu_4 (r_2^2 - \alpha_2) \sin r_2 h
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$u_2 = A_1 \{(\lambda_1 - s \mu_1) \cosh \delta_2 x_2 + (\lambda_2 - s \mu_2) \sinh \delta_2 x_2 + (\lambda_3 - s \mu_3) \cos r_2 x_2 + (\lambda_4 - s \mu_4) \sin r_2 x_2\} \dots \tag{19}$$

式 (19) の s は式 (18), 式 (18), (19) の λ, μ 等は式 (17) に示した値である。

4. 曲げおよびセン断動揺振動

(1) 曲げ動揺振動 この場合は回転慣性及びセン断の影響を無視するので、式 (1) で $y_r = y_s = 0$ かつ $\varphi_r = \varphi_s = 0$ とおくと、式 (6), (7) に相当して次の基礎方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^4 y_{1b}}{\partial x_1^4} + \frac{b_1 K_0}{E_1 I_1} y_{1b} + \frac{w_1 a_1}{E_1 I_1 g} \frac{\partial^2 y_{1b}}{\partial t^2} &= 0, \\
 \frac{\partial^4 y_{2b}}{\partial x_2^4} + \frac{w_2 a_2}{E_2 I_2 g} \frac{\partial^2 y_{2b}}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots \tag{20}$$

一方曲げ振動では $\varphi_s = 0$ であることから、 $G = S/\varphi_s a = S/0 \rightarrow \infty$ となるので、式 (6), (7) で $G_1 \rightarrow \infty, G_2 \rightarrow \infty$ とおくと、直接に式 (20) の結果をうることができる。

さて式 (8) と同様におき、これを式 (20) に代入して時間函数を消去すると、式 (9), (10) に相当して次式をうる。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^4 u_{1b}}{dx_1^4} + \frac{1}{E_1 I_1} \left(b_1 K_0 - \frac{w_1 a_1}{g} n_b^2 \right) u_{1b} &= 0, \\
 \frac{d^4 u_{2b}}{dx_2^4} - \frac{w_2 a_2 n_b^2}{E_2 I_2 g} u_{2b} &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots \tag{21}$$

ここで 3. (1) の場合と同様に $(b_1 K_0 - w_1 a_1 n_b^2 / g) > 0$ であることに注意すると、式 (21) の一般解は式 (22) で与えられる¹¹⁾。

$$\begin{aligned}
 u_{1b} &= \frac{1}{2} \{ (A_1 e^{\beta_{1b} x_1} + A_2 e^{-\beta_{1b} x_1}) \cos \beta_{1b} x_1 + (A_3 e^{\beta_{1b} x_1} + A_4 e^{-\beta_{1b} x_1}) \sin \beta_{1b} x_1 \}, \\
 u_{2b} &= B_1 \cosh \beta_{2b} x_2 + B_2 \sinh \beta_{2b} x_2 + B_3 \cos \beta_{2b} x_2 + B_4 \sin \beta_{2b} x_2
 \end{aligned} \tag{22}$$

ここに,

$$\beta_{1b} = \sqrt[4]{\frac{1}{4 E_1 I_1} \left(b_1 K_0 - \frac{w_1 a_1}{g} n_b^2 \right)} = \sqrt[4]{\frac{1}{4} \beta_1},$$

$$\beta_{2b} = \sqrt{\frac{w_2 a_2 n_b I_2}{E_2 I_2 g}} = \sqrt{\beta_2}, \quad \beta_1: \text{式 (11)}, \quad \beta_2: \text{式 (12)}$$

しかるに $M = -E_1 I_1 \cdot \partial^2 y_b / \partial x^2$, $S = \partial M / \partial x$ であるので, 式 (16) の条件式からただちに式 (22) の積分常数 A, B を消去することができる。この計算を進めると結局次の振動数方程式がえられる。

$$\begin{aligned} F(n_{b1}) = & (\lambda_{1b} \cosh \beta_{2b} h + \lambda_{2b} \sinh \beta_{2b} h - \lambda_{3b} \cos \beta_{2b} h - \lambda_{4b} \sin \beta_{2b} h) \\ & \times \left\{ \begin{aligned} & \mu_{1b} \sinh \beta_{2b} h + W_n \cosh \beta_{2b} h + \mu_{2b} (\cosh \beta_{2b} h + W_n \sinh \beta_{2b} h) \\ & + \mu_{3b} (\sin \beta_{2b} h + W_n \cos \beta_{2b} h) - \mu_{4b} (\cos \beta_{2b} h - W_n \sin \beta_{2b} h) \end{aligned} \right\} \\ & - (\mu_{1b} \cosh \beta_{2b} h + \mu_{2b} \sinh \beta_{2b} h - \mu_{3b} \cos \beta_{2b} h - \mu_{4b} \sin \beta_{2b} h) \\ & \times \left\{ \begin{aligned} & \lambda_{1b} (\sinh \beta_{2b} h + W_n \cosh \beta_{2b} h) + \lambda_{2b} (\cosh \beta_{2b} h + W_n \sinh \beta_{2b} h) \\ & + \lambda_{3b} (\sin \beta_{2b} h + W_n \cos \beta_{2b} h) - \lambda_{4b} (\cos \beta_{2b} h - W_n \sin \beta_{2b} h) \end{aligned} \right\} \\ = & 0 \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned} \lambda_{1b}, \lambda_{3b} = & \frac{1}{2} (e^{\beta_{1b} d} \cos \beta_{1b} d + \cosh \beta_{1b} d \sin \beta_{1b} d) \\ & \mp e_i \beta^2 (e^{\beta_{1b} d} \sin \beta_{1b} d - \sinh \beta_{1b} d \cos \beta_{1b} d), \\ \lambda_{2b}, \lambda_{4b} = & \frac{\beta}{2} \{ e^{\beta_{1b} d} (\cos \beta_{1b} d - \sin \beta_{1b} d) + \cosh \beta_{1b} d \cos \beta_{1b} d + \sinh \beta_{1b} d \sin \beta_{1b} d \} \\ & \mp e_i \beta^2 \{ e^{\beta_{1b} d} (\cos \beta_{1b} d + \sin \beta_{1b} d) - \cosh \beta_{1b} d \cos \beta_{1b} d + \sinh \beta_{1b} d \sin \beta_{1b} d \}, \\ \mu_{1b}, \mu_{3b} = & \frac{1}{2} (e^{-\beta_{1b} d} \cos \beta_{1b} d - \cosh \beta_{1b} d \sin \beta_{1b} d) \\ & \pm e_i \beta^2 (e^{-\beta_{1b} d} \sin \beta_{1b} d - \sinh \beta_{1b} d \cos \beta_{1b} d), \\ \mu_{2b}, \mu_{4b} = & -\frac{\beta}{2} \{ e^{-\beta_{1b} d} (\cos \beta_{1b} d + \sin \beta_{1b} d) + \cosh \beta_{1b} d \cos \beta_{1b} d + \sinh \beta_{1b} d \sin \beta_{1b} d \} \\ & \pm e_i \beta^2 \{ e^{-\beta_{1b} d} (\cos \beta_{1b} d - \sin \beta_{1b} d) - \cosh \beta_{1b} d \cos \beta_{1b} d + \sinh \beta_{1b} d \sin \beta_{1b} d \}, \end{aligned} \tag{23}$$

複号同順, $e_i = E_1 I_1 / E_2 I_2$, $W_n = W n_b I_1 / (E_2 I_2 \beta_{2b}^3 g)$,

$$\beta = \beta_{1b} / \beta_{2b}, \quad \beta_{1b}, \beta_{2b}: \text{式 (22)}$$

なお式 (17) で式 (20) の下にかいたとおり, $G_1 \rightarrow \infty, G_2 \rightarrow \infty$ とおくと, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, r_1 = \delta_1 = \beta_{1b}, r_2 = \delta_2 = \beta_{2b}$ となつて式 (23) となることはいうまでもない。

次に 3. (3) と同様に式 (22) の積分常数 A, B 相互間の比を式 (16) から決定できる。この結果正規函数として次式が算出される。

$$\begin{aligned} u_{1b} = & \frac{A_1}{2} \{ (e^{\beta_{1b} x_1} - s_b e^{-\beta_{1b} x_1}) \cos \beta_{1b} x_1 + (1 + s_b) \cosh \beta_{1b} x_1 \sin \beta_{1b} x_1 \}, \\ u_{2b} = & \frac{A_1}{2} \{ (\lambda_{1b} - s_b \mu_{1b}) \cosh \beta_{2b} x_2 + (\lambda_{2b} - s_b \mu_{2b}) \sinh \beta_{2b} x_2 \\ & + (\lambda_{3b} - s_b \mu_{3b}) \cos \beta_{2b} x_2 + (\lambda_{4b} - s_b \mu_{4b}) \sin \beta_{2b} x_2 \}, \end{aligned} \tag{24}$$

ここに, $s_b = \Sigma_{1b} / \Sigma_{3b}$,

$$\begin{aligned} \Sigma_{1b} = & \lambda_{1b} \cosh \beta_{2b} h + \lambda_{2b} \sinh \beta_{2b} h - \lambda_{3b} \cos \beta_{2b} h - \lambda_{4b} \sin \beta_{2b} h, \\ \Sigma_{3b} = & \mu_{1b} \cosh \beta_{2b} h + \mu_{2b} \sinh \beta_{2b} h - \mu_{3b} \cos \beta_{2b} h - \mu_{4b} \sin \beta_{2b} h \end{aligned}$$

(2) セン断動揺振動 この場合は式 (1) で y_s または φ_s のみをとるので, 基礎方程式は容易に次のとおりかける。

$$\left. \begin{aligned} k_1' a_1 G_1 \frac{\partial^2 y_{1s}}{\partial x_1^2} - b_1 K_0 y_{1s} - \frac{w_1 a_1}{g} \frac{\partial^2 y_{1s}}{\partial t^2} = 0, \\ k_2' G_2 \frac{\partial^2 y_{2s}}{\partial x_2^2} - \frac{w_2}{g} \frac{\partial^2 y_{2s}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

またセン断振動では曲げ変形 $y_b = 0$ であるので長さ x 方向のヒズミ dI/I は起らない。従つて $E = Pl / (a d I) = Pl / 0 \rightarrow \infty$, すなわち式 (6), (7) で直接 $E_1 \rightarrow \infty, E_2 \rightarrow \infty$ とおくことによつても式 (25) が容易にえられる*。次に式 (8) と同様においてこれを式 (25) に代入して, 時間函数を消去すると式 (26) となる。

* 式 (6), (7) をそれぞれ $E_1 I_1, E_2 I_2$ で除したのち $E_1 \rightarrow \infty, E_2 \rightarrow \infty$ とすることはいうまでもない。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_{1s}}{dx_1^2} - \frac{1}{k_1' a_1 G_1} \left(b_1 K_0 - \frac{w_1 a_1}{g} n_{s1}^2 \right) u_{1s} &= 0, \\ \frac{d^2 u_{2s}}{dx_2^2} + \frac{w_2 n_{s1}^2}{k_2' G_2 g} u_{2s} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここで 3. (1), 4. (1) と同様に $(b_1 K_0 - w_1 a_1 n_{s1}^2 / g) > 0$ であることに注意すると、式 (26) の一般解は式 (27) で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u_{1s} &= A_1 \cosh \alpha_{1s} x_1 + A_2 \sinh \alpha_{1s} x_1, \\ u_{2s} &= B_1 \cos \alpha_{2s} x_2 + B_2 \sin \alpha_{2s} x_2, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1s} &= \sqrt{\frac{1}{k_1' a_1 G_1} \left(b_1 K_0 - \frac{w_1 a_1}{g} n_{s1}^2 \right)} = \sqrt{\alpha_1}, \\ \alpha_{2s} &= \sqrt{\frac{w_2 n_{s1}^2}{k_2' G_2 g}} = \sqrt{\alpha_2}, \quad \alpha_1: \text{式 (11)}, \quad \alpha_2: \text{式 (12)} \end{aligned} \right\}$$

境界条件及び接続条件は $S = k' a G \partial y_s / \partial x$ であることに留意すると、図-1 から式 (16) と同様に、

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad A, \quad x_1 = 0: \quad S_1 = 0, \quad 2) \quad B, \quad x_1 = d \text{ かつ } x_2 = 0: \quad u_{1s} = u_{2s}, \quad S_1 = S_2, \\ 3) \quad C, \quad x_2 = h: \quad S_2 = -(W/g) \cdot \partial^2 y_{2s} / \partial t^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

である。この4条件から式 (27) の A, B 4個の積分常数を消去すると、振動数方程式として式 (29) をうる。

$$F(n_{s1}) = \alpha_{1s} (\alpha_{2s} \cos \alpha_{2s} h - W_n \sin \alpha_{2s} h) \tanh \alpha_{1s} d - \alpha_{2s} (\alpha_{2s} \sin \alpha_{2s} h + W_n \cos \alpha_{2s} h) = 0, \dots\dots (29)$$

ここに、 $W_n = W n_{s1}^2 / (k_2' a_2 G_2 g)$, α_{1s}, α_{2s} : 式 (27)

次に正規関数は式 (27) の A, B 間の比を式 (28) の条件式によつて決定することにより次式で求まる。

$$\left. \begin{aligned} u_{1s} &= A_1 \cosh \alpha_{1s} x_1, \\ u_{2s} &= A_1 \cosh \alpha_{1s} d \left(\cos \alpha_{2s} x_2 + \frac{\alpha_{2s} \sin \alpha_{2s} h + W_n \cos \alpha_{2s} h}{\alpha_{2s} \cos \alpha_{2s} h - W_n \sin \alpha_{2s} h} \sin \alpha_{2s} x_2 \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

5. 固有周期に関する近似計算法

3. 及び 4. の振動数方程式、式 (17), (23) 及び (29) から振動数 n_1 を算出することはかなり煩雑であるので、周知の Rayleigh 法により近似計算を試みる。便宜上 図-2 のように橋脚頂部に水平集中荷重 $b_2 P$ (b_2 : 橋脚頂部奥行巾) を作用させた場合の静変位曲線 η_1, η_2 を振動曲線 y_1, y_2 に相似であると仮定する。

(1) 曲げ動揺振動 図-2 (1) の η_{1b}, η_{2b} は式 (22) の u_{1b}, u_{2b} で $n_{b1} \rightarrow 0$ とおけばよい。この η_{1b}, η_{2b} を用いた固有周期 T_{Rb} は著者がすでに算出しているとおりに次式で与えられる¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned} T_{Rb} &= 2\pi \sqrt{\frac{1}{\eta_{cb} b_2 P g} \left(w_1 a_1 \int_0^d \eta_{1b}^2 dx_1 + w_2 a_2 \int_0^h \eta_{2b}^2 dx_2 + W \eta_{cb}^2 \right)}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

詳細は参考文献欄 12), 式 (8), (8)₁ 参照。

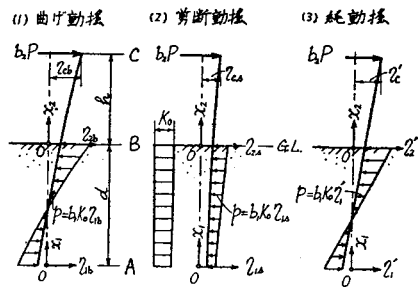
(2) セン断動揺振動 図-2 (2) の η_{1s}, η_{2s} は式 (27) の u_{1s}, u_{2s} で $n_{s1} \rightarrow 0$ とおき、式 (28) の条件を満足するように積分常数を決定すると次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_{1s} &= \frac{b_2 P}{\alpha_0 k_2' a_2 G_2 \sinh \alpha_0 d} \cosh \alpha_0 x_1, \\ \eta_{2s} &= \frac{b_2 P}{k_2' a_2 G_2} x_2 + \frac{\coth \alpha_0 d}{\alpha_0 k_2' a_2 G_2} b_2 P, \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{b_1 K_0}{k_1' a_1 G_1}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

式 (32) を用いた固有周期 T_{Rs} は式 (33) となる。

$$\left. \begin{aligned} T_{Rs} &= 2\pi \sqrt{\frac{1}{\eta_{cs} b_2 P g} \left(w_1 a_1 \int_0^d \eta_{1s}^2 dx_1 + w_2 a_2 \int_0^h \eta_{2s}^2 dx_2 + W \eta_{cs}^2 \right)}, \\ \eta_{cs} &= \frac{b_2 P}{k_2' a_2 G_2} \left(h + \frac{\coth \alpha_0 d}{\alpha_0} \right), \\ \int_0^d \eta_{1s}^2 dx_1 &= \frac{w_1 a_1}{2 \alpha_0^3} \left(\frac{b_2 P}{k_2' a_2 G_2} \right)^2 \left(\coth \alpha_0 d + \frac{\alpha_0 d}{\sinh^2 \alpha_0 d} \right), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

図-2 振動曲線形の仮定



$$\int_0^h \eta_{2s}^2 dx_2 = h \left(\frac{b_2 P}{k_2' a_2 G_2} \right)^2 \left(\frac{h^2}{3} + \frac{h}{\alpha_0} \coth \alpha_0 d + \frac{1}{\alpha_0^2} \coth^2 \alpha_0 d \right)$$

(3) 曲げセン断動揺振動 5 (1), (2) と同様に式 (11) 及び (12) で $n \rightarrow 0$ とおけばよいが, η_1, η_2 自身及びその自乗の定積分を新しく計算することは必ずしも簡単でないで, ここでは便宜上 $\eta_1 = \eta_{1b} + \eta_{1s}, \eta_2 = \eta_{2b} + \eta_{2s}$ として上記 (1), (2) の結果を合成することにする。すると固有周期 T_R は次のようにかき表わされる。

$$T_R = 2\pi \sqrt{\frac{1}{(\eta_{Cb} + \eta_{Cs}) b_2 P g} (\nu_b + \nu_s + 2\nu_{bs})}$$

ここに,

$$\nu_b = w_1 a_1 \int_0^d \eta_{1b}^2 dx_1 + w_2 a_2 \int_0^h \eta_{2b}^2 dx_2 + W \eta_{Cb}^2 : \text{式 (31)}$$

$$\nu_s = w_1 a_1 \int_0^d \eta_{1s}^2 dx_1 + w_2 a_2 \int_0^h \eta_{2s}^2 dx_2 + W \eta_{Cs}^2 : \text{式 (33)}$$

$$\nu_{bs} = w_1 a_1 \int_0^d \eta_{1b} \eta_{1s} dx_1 + w_2 a_2 \int_0^h \eta_{2b} \eta_{2s} dx_2 + W \eta_{Cb} \eta_{Cs}$$

$$\int_0^d \eta_{1b} \eta_{1s} dx_1 = \frac{b_2 P}{4 \alpha_0 k_2' a_2 G_2 \sinh \alpha_0 d} \left\{ \frac{1}{\beta_0^2 + \tau_0^2} f(\beta_0, \tau_0) + \frac{1}{\beta_0^2 + \delta_0^2} f(\beta_0, \delta_0) \right\}, \dots\dots\dots (34)$$

$$f(\beta_0, \tau_0) = \tau_0 \cos \beta_0 d (A_1 e^{\tau_0 d} - A_2 e^{-\tau_0 d}) + \beta_0 \sin \beta_0 d (A_1 e^{\tau_0 d} + A_2 e^{-\tau_0 d}) - \tau_0 (A_1 - A_2) + 2 A_3 (\tau_0 \sin \beta_0 d \sinh \tau_0 d - \beta_0 \cos \beta_0 d \cosh \tau_0 d + \beta_0)$$

$$f(\beta_0, \delta_0) = \delta_0 \cos \beta_0 d (A_2 e^{\delta_0 d} - A_1 e^{-\delta_0 d}) + \beta_0 \sin \beta_0 d (A_2 e^{\delta_0 d} + A_1 e^{-\delta_0 d}) + \delta_0 (A_1 - A_2) + 2 A_3 (\delta_0 \sin \beta_0 d \sinh \delta_0 d - \beta_0 \cos \beta_0 d \cosh \delta_0 d + \beta_0)$$

$$\int_0^h \eta_{2b} \eta_{2s} dx_2 = \frac{h b_2 P}{k_2' a_2 G_2} \left\{ \frac{h(B_1 h^3/5 + B_2 h^2/4 + B_3 h/3 + B_4/2)}{\alpha_0} + \frac{\coth \alpha_0 d}{\alpha_0} (B_1 h^3/4 + B_2 h^2/3 + B_3 h/2 + B_4) \right\}$$

$$\eta_{Cb} \eta_{Cs} = \frac{b_2 P}{k_2' a_2 G_2} \left(h + \frac{1}{\alpha_0} \coth \alpha_0 d \right) (B_1 h^3 + B_2 h^2 + B_3 h + B_4)$$

$A_1 \sim A_4, B_1 \sim B_4$ には P を含む参考文献欄 12) pp 59-60 の表-1 から決定される。

(4) 純動揺振動 この場合は橋脚井筒を完全な剛体と考えるので, 図-2 (3) の静曲線 η_1', η_2' は当然直線となる。これに対する固有周期 $T_{R'}$ は著者の式¹³⁾で $K(x_1)$ の分布指数 $n=0$ とおけばよい ($\therefore K(x_1) = K_A (1 - x_1/d)^n$ で $n=0 \therefore K(x_1) = K_A \rightarrow K_0$)。そうすると $T_{R'}$ は $h/d = \delta_0$ とおいて容易に次式でかける。

$$T_{R'} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{|b_1 K_0 g} \frac{w_1 a_1 (3 \delta_0^2 + 3 \delta_0 + 1) + w_2 a_2 \delta_0 (12 \delta_0^4 + 30 \delta_0^3 + 33 \delta_0^2 + 18 \delta_0 + 4)}{3 \delta_0^2 + 3 \delta_0 + 1}} \dots\dots\dots (35)$$

6. 数値計算例

本文の理論解はかなり複雑であるので, これを定性的に数値計算することは非常に多くの労力を要する。そこでここでは実在橋脚井筒のうちから a) 比較的セン断効果の小さいと思われる中角橋脚: 図-3 (1) 及び b) 比較的セン断効果の大きいと思われる九頭龍橋脚井筒: 図-4 (1) の2個を代表的に選んだ。なお簡単のため 1. 末尾にかいたとおり W を除外した。

図-3 正規函数形 u の計算結果 (中角橋脚)

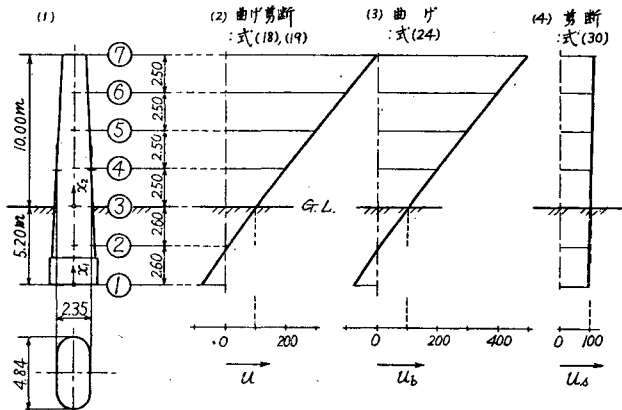
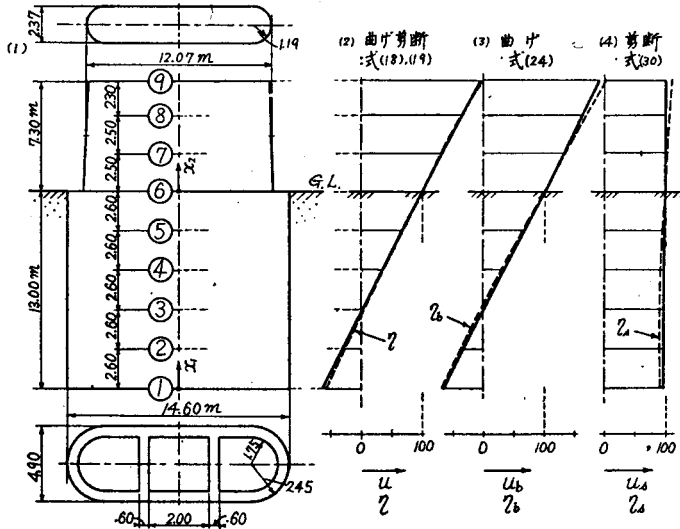


図-4 正規函数形 u の計算結果 (九頭竜橋脚井筒)



(1) 計算資料 a) 中角橋 No.5 橋脚: 橋軸に平行方向: 図-3 (1). 根入部, 地上部共通に平均断面をとる。 $w_1 a_1 = w_2 a_2 = 2.3 \times 10.20^2 \text{ t/m}$, $b_1 = b_2 = 4.84 \text{ m}$, $h, d = 10.00, 5.20 \text{ m}$, $E_1 I_1 = E_2 I_2 = 2.1 \times 10^6 \times 4.19 \text{ t/m}^2$, $G_1 = G_2 = 0.9 \times 10^6 \text{ t/m}^2$, $k_1' = k_2' = 0.710$, $K_0 = 6000 \text{ t/m}^3$ (振動実験よりの推定値¹⁴⁾), $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$.

b) 九頭竜橋 No.3 橋脚井筒 橋軸に直角方向: 図-4 (1)。 $w_1 a_1, w_2 a_2 = 2.4 \times 40.64, 2.4 \times 27.33 \text{ t/m}$, $b_1, b_2 = 4.90, 2.37 \text{ m}$, $h, d = 7.30, 13.00 \text{ m}$, $E_1 I_1, E_2 I_2 = 2.1 \times 10^6 \times 671.92, 2.1 \times 10^6 \times 306.04 \text{ t/m}^2$, $K_0 = 5000 \text{ t/m}^3$ (振動実験よりの推定値¹⁵⁾), $G_1 = G_2, g$: a) と同値。

(2) 固有周期 T 上記両橋脚に対して式 (17) で曲げせん断, 式 (23) で曲げ, 式 (29) でせん断の各振動数方程式を試算法によつて厳密に算出した固有周期 T_F をそれぞれ表-1 及び表-2 に示した。なお Rayleigh 法による近似計算値 T_R , 純動揺周期 T_R' を算出し, これら相互間の比率ないし精度を一括して同表上に示した。

(3) 正規函数形 u (2) の計算で厳密に決定した振動数 n_1 を用いて式 (18), (19) で曲げせん断, 式 (24) で曲げ, 式 (30) でせん断の各正規函数形を計算し, 地盤面 B における値を 100 として表-3 及び表-4 に一括表示し, かつこれらの結果を図-3 及び図-4 に図示した。なお図-4 には参考のため Rayleigh 法に採用した図

表-1 固有周期計算値 (中角橋脚)

	曲げせん断		曲げ		比率 (%)	
	式 T(sec)	式 T_b (sec)	式 T_s (sec)	T_b/T	T_s/T	
振動数式 T_F (17)	0.4585	0.4565	0.1001	99.56	21.83	
Rayleigh 法 T_R (34)	0.4604	0.4540	0.0957	98.61	20.79	
精度 T_R/T_F (%)	100.41	99.45	95.60			

純動揺振動: 式 (35) $T_R = 0.4379 \text{ (sec)}$, $T_R/T_F = 95.51 \text{ (%)}$, $T_R/T_b = 95.93 \text{ (%)}$

表-3 正規函数形計算値 (中角橋脚)

座標 (m)	距離 (m)	四-3 (1)	曲げせん断		曲げ (24)	せん断 (30)	比率 (%)	
			U-式 (18)(19)	U_b -式 (24)			U_s/U	U_b/U
x_2	10.00	⑦	492.44	489.12	107.71	99.33	21.87	
	7.50	⑥	392.39	389.67	107.19	99.31	27.32	
	5.00	⑤	292.73	290.62	105.76	99.28	36.13	
	2.50	④	194.72	193.60	103.35	99.42	53.08	
	0	③	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	
x_1	2.60	②	8.22	8.11	97.05	98.66	1180.66	
	0	①	-79.65	-79.76	96.07	100.14	-120.62	

表-2 固有周期計算値 (九頭竜橋脚井筒)

	曲げせん断		曲げ		比率 (%)	
	式 T(sec)	式 T_b (sec)	式 T_s (sec)	T_b/T	T_s/T	
振動数式 T_F (17)	0.2625	0.2614	0.1442	99.58	54.93	
Rayleigh 法 T_R (34)	0.2715	0.2607	0.1227	96.02	45.19	
精度 T_R/T_F (%)	103.42	99.73	85.09			

純動揺振動: 式 (35) $T_R = 0.2604 \text{ (sec)}$, $T_R/T_F = 99.20 \text{ (%)}$, $T_R/T_b = 99.62 \text{ (%)}$

表-4 正規函数形計算値 (九頭竜橋脚井筒)

座標 (m)	距離 (m)	四-4 (1)	曲げせん断		曲げ (24)	せん断 (30)	比率 (%)	
			U-式 (18)(19)	U_b -式 (24)			U_s/U	U_b/U
x_2	7.30	⑨	195.51	193.96	101.52	99.21	51.69	
	5.00	⑧	165.53	164.32	101.37	99.27	61.24	
	2.50	⑦	132.80	133.14	100.85	100.26	75.94	
	0	⑥	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	
	13.00	⑤	66.28	66.71	99.02	100.65	149.40	
x_1	7.80	④	33.15	33.52	98.27	101.12	296.44	
	5.20	③	0.36	0.44	97.73	122.22	549.25	
	2.60	②	-32.38	-32.63	97.40	100.77	-300.80	
	0	①	-65.34	-65.67	97.30	100.51	-148.91	

—2の仮定静曲線 η を同じく地盤面を 100 として点線で示した。

(4) 基礎係数値 K_0 と周期 T との関係 (2) から $T \cong T_b > T_s$, (3) から $u \cong u_b \neq u_s$ であるのでセン断効果はほとんど認められない。ところが図—4(1)の地盤面 G. L. で完全固定すなわち $K_0 = \infty$ とすると、セン断効果が非常に大きいことが考えられる。事実 $K_0 = \infty$ に対する周期の計算値は図—5中左下の表に示したとおり $T > T_b > T_s$ である。したがって同一寸法の橋脚において $T_b \cong T_s$ を支配するものはもつぱら K_0 の大きさであることがわかる。そこで $K_0 - T, T_b, T_s$ の関係を計算したが、その一例を図—5に示した。ただし表—1, 2 で T_F と T_R , 図—4で u と η とが大差ないことから、図—5の結果はすべて η を用いた T_R を算出したものである。しかし T_R を計算することはなおかなりの手数を必要とするので、 T_R の代りに図—2の η_c を計算して図—5上に K_0 に対して図示した。何となれば η_c は橋脚井筒全体を頂部Cに置換した場合のパネ常数の逆数を表わすので¹⁶⁾、 $T - K_0$ の代りに $\eta_c - K_0$ からセン断効果大小の概略を推察することができるからである。

7. 計算結果とセン断効果とに関する考察

(1) 計算結果 1) 固有周期 T について 表—1, 2 の T_F は 5~7 回の試算でえた厳密値である。両表から $T > T_b > T_s$ かつ $T \cong T_b$ でセン断効果はいうまでもなく正である。 T_R は曲げに対して 99.5%, 曲げセン断に対して 100~103% 程度の高精度を有するが、セン断では 85~95% となつている。これは図—2(2)の η_s を式(32)で表わしたが、この場合セン断力形状係数 k' はさらに厳密に取扱わねばならないであろうことが原因であると考えられる¹⁷⁾。また T_R' が 95~99% の高精度を有していることは剛体回転ないし変位が圧倒的に弾性変形が少ないことを示している。なお一般には $T_R < T_F$ であるが、曲げセン断に関してのみむづかではあるが、 $T_R > T_F$ となつている原因については明らかでない。

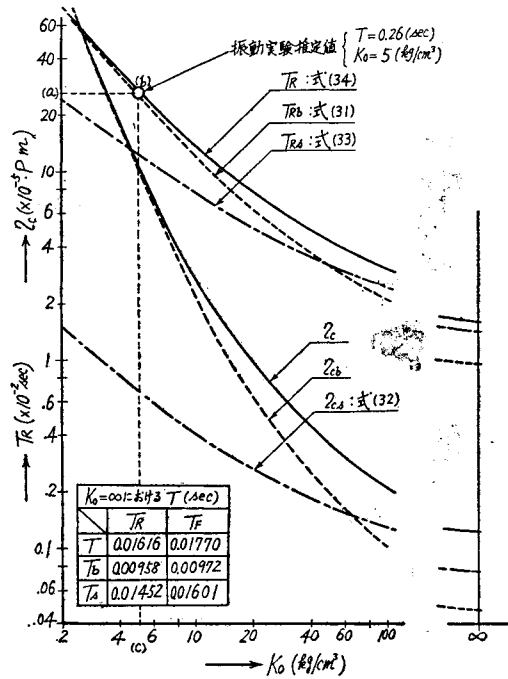
2) 正規函数 u の形状について 図—3, 4 から u は直線に近くかつ $u \cong u_b$ である。これから弾性変形とセン断効果とはともに少いことがわかる。図—4で u と η とが酷似しているが、 η の方が若干彎曲しているのは η の仮定上当然である(図—2 参照)。なお図—3, 4, 表—3, 4 から u_s が u 及び u_b からかなりかけ離れた形状を示している点が注目される。

3) T に及ぼす基礎係数値 K_0 の影響 図—5のうちでその左上に示した点 (b) は現地の振動実験から推定した T 及び K_0 の値を示す¹⁸⁾。すなわち実験値 T は点直線 (a) — (b) 上、実験値 K_0 は点直線 (b) — (c) 上にあることになる。図—5から (b) — (c) 近傍では前述したとおり $T > T_b > T_s$ かつ $T \cong T_b$ である。 K_0 がこれよりかなり大きい値となるとセン断効果が次等に顕著に現われ、 $T_b = T_s$ となるのはほぼ $K_0 = 50 \text{ kg/cm}^2$ 付近である。これらのことは近似的ではあるが、 η_c からもおおよそ推察できる。

(2) セン断効果 1) T に対するセン断効果は $(T_F/T_b) - 1$ で表わされるが、その値は表—1, 2 からそれぞれ +0.44, +0.42% にすぎない。2) u に対しても同様で井筒底部 A, 橋脚頂部 C を代表的にとると、表—3, 4 からそれぞれ $(u_A/u_{Ab}) - 1 = -0.14, -0.47\%$ 及び $(u_c/u_{cb}) - 1 = +0.68, +0.80\%$ でいずれも 1% 以下である。3) ところが 1), 2) は $K_0 = 5$ および 6 kg/cm^2 に対する結果で、 K_0 がこれより大きくなると図—5から明らかとなっており、セン断効果は増加するが、井筒基礎が採用されるような橋脚地盤ではおのずから K_0 の値に一定の限界がある¹⁹⁾。上記 1), 2), 3) からセン断効果は 1% 程度であつて、実際問題としてはこれを無視してもさしつかえないということが結論できる。

(3) 本文における仮定その他の検討 1) 式(9), (21), (26) で $(b_i K_0 - w_i a_i n_i^2/g) > 0$ であることが弾性動揺振動のいちじるしい特長であつて、 $() < 0$ は一般に弾性振動、 $() = 0$ は根入部のみを考慮した場合の純動揺振動を与える(参考文献欄 9) 参照)。本文では第1次のみ取扱つたが、さらに完全のためには高次までとつて集計す

図—5 基礎係数値 K_0 と T_R, η_c の関係 (九頭竜橋脚井筒)



べきである。しかし第1次が決定的であろうことは容易に考えられる²⁰⁾。2) 緒言の終りにかいた仮定ないし簡易的な取扱いはセン断効果を解明しようとする命題からはむしろ妥当である。しかもこれらが本文の結論に大きな支障を及ぼすことはまず考えられない。3) 剛体変位ないし回転が圧倒的で弾性変形が少いという結果をえたが、これは橋脚井筒の剛に対して地盤が柔であることが主原因であり、これがまた動揺振動が生じてセン断効果が小さいということの大きな原因をなしているものと考えられる。しかしながらこのようにセン断効果は小さいとしても、回転慣性の影響は無視しうるかどうかは改めて検討してみたい。4) 図-5で K_0 が大きくなるとセン断効果は増加するが、 I_1/d 、 I_2/h が大となつても同一の傾向が考えられる。しかしこれらのことは定性的に考えられても、橋脚井筒を対象とするかぎり實際上セン断効果が定量的に問題となるということはないと思われる。5) セン断効果を判定する一近似法として図-5のとおり T_R の代りに τ_c を用いたが、さらに簡単のためには式(11)で $\sqrt{\beta_1} \gg \alpha_1/2$ 、式(12)で $4\beta_2 \gg \alpha_2$ ならばセン断の影響は無視しても差支えないということがわかつた。

(4) 本文の結論 橋脚井筒の振動に関する限りその構造寸法に振動方向とにかかわらず、セン断効果は定量的には1%程度であるので、実際上これを無視しても差支えないというのが本文の結論である。この結果著者がこれまで考究してきた曲げ振動的な取扱いでよいということが厳密な意味において証明されたわけである。

終りに臨み終始御指導を仰いだ京大教授小西博士に対して深謝する次第である。

参考文献その他

- 1) 後藤：橋脚井筒の耐震計算法に関する2,3の考察，土木学会第11回年次学術講演会（昭.30.5.29）で本文の概要を講演。
- 2) 後藤：土木学会誌 38—4, 38—6, 39—7, 土木学会論文集 6, 24, その他
- 3) ティモシェンコ原著：工業振動学，pp 283—284, pp 286—287.
- 4) 戸部俊美：回転慣性およびせん断力の影響を考慮せる均一断面はりの横振動について，日本機械学会論文集 17—57, pp 14—19, 昭.26, 大野 豊：線型かく乱力の作用するはりの振動について，同上 17—57, pp 5—7. 戸部，大野両氏は単に $\varphi = \partial y / \partial x$, $M = -EI \partial^2 y / \partial x^2$, $S = \partial M / \partial x$ として，境界条件にセン断角を考慮しないようである。
- 5) 酒井忠明：中空円筒殻体の強制振動による応力の一般解式及び実用解式，土木学会論文集 18, pp 62—63, 昭.28.9.
- 6) 石崎澄雄：剪断曲げ振動について，日本建築学会研究報告 22, pp 47—48, 昭.28.5, 同氏：地下室を有する高層ビルの振動について，同上 24, pp 189—190, 昭.28.10.
- 7) 上掲 6) 第2論文の式(1)と著者の本文式(25)とを比較すると，基礎反力係数 K_0 を含む項の符号が逆となつているが，著者の表示法が正しいことは容易に証明できる。
- 8) 後藤：橋脚井筒構造の動的耐震計算法について，土木学会論文集 24, その第1節で言及。
- 9) $(b_1 K_0 - w_1 a_1 n^2 / g) = 0$ を満足する n は $T = 2\pi / \sqrt{w_1 a_1 / g b_1 K_0}$ を与える。この T は図-1のBC及びWが全くないABのみの純動揺周期である（上掲 8) 式(2)と同一）。W, BCの載荷作用，BCの片持バリ作用（ただし支持点はうごく）の結果上記の T より大きくなるので当然 $() > 0$ である。実際に本文 6.の数値計算その他でも例外なく $() > 0$ であつた。
- 10) 式(9)は弾性基礎上にあるハリが引張力をうけたときの式に相当するので，その解はたとえば K. Hayashi: Theorie des Trägers auf Elastischer Unterlage, 1921, S. 35, Gl.(61), (64).
- 11) 式(21)₁は弾性基礎上にあるハリと同一の式であるので，その解はたとえば上掲 10) S. 12, Gl. (13)₁.
- 12) 後藤：土木学会論文集 6, pp 60—61, 式(8), (8)₁及び pp 59—60 表—1.
- 13) 後藤：土木学会誌 39—7, p. 17, 式(21)。ただし同式中 $d \alpha^2 / 6 []$, $h \alpha^2 / 6 []$ とあるのはそれぞれ $d \alpha^2 / 3 []$, $h \alpha^2 / 3 []$ と訂正する。
- 14) 上掲 (2), p 66.
- 15) 当橋脚井筒のみが新設されかつトラスが架設される直前に ($W=0$)，起振器実施を行つたところ共振周期 $T_r = 0.170 \text{ sec}$ をえた（昭.25.5.24）。ところが一方上掲 13) 式(21)で底面反力の影響を式(19)の β で表わし，これを考慮に入れると $K_0 = 5 \text{ kg/cm}^3$ に対して $T = 0.178 \text{ sec}$ となつた。この事実から $K_0 = 5 \text{ kg/cm}^3$ は十分妥当な値であるということが明言できる。
- 16) 後藤：土木学会誌 40—1. p 18, 式(2)の下に記入： $b_2 / \eta_c' = b_2 P / \eta_e =$ バネ常数 k 。
- 17) たとえば福田武雄，構造力学（昭.18），p 210, 式(50.2)の κ 及び日本ポルトランドセメント同業会，コンクリート要覧（昭.14），p 243, 式(65)の k 等を使用すべきであると思うが，橋脚井筒断面ではこの κ , k の算出が困難となつたので便宜上 k' を用いた。
- 18) 上掲 15) から $K_0 = 5 \text{ kg/cm}^3$, $T_r = 0.170 \text{ sec}$ であるが，本計算では図-4(1)の井筒底面に作用するかなり大きな上向反力を無視したので $T = 0.261 \text{ sec}$ が算出された。従つて本文の場合にはこの 0.261 sec を実験周期と考えてもさしつかえないことになる。
- 19) たとえば本文 図-1(3)の K_A に対しては上掲 16), p. 19, 表—4に示したとおり， $K_A (\text{kg/cm}^3) \cong d (\text{m})$ であり，かつ $K_0 \leq \frac{1}{2} K_A$ と考えられるので， $K_0 (\text{kg/cm}^3) \leq \frac{1}{2} d (\text{m})$, d : 根入長，という一定の限界があることになる。
- 20) 上掲 8) 図-4及び表—5参照。 (昭. 30. 4. 25)