

水理

# 彎曲底面開水路を流れる底面に垂直方向の速度成分を無視できない定常流れ

正員 荒木 正 夫\*

## A SOLUTION OF STEADY FLOW IN OPEN CHANNELS WITH VARIABLE VERTICAL CURVATURE, CONSIDERING THE VELOCITY COMPONENT NORMAL TO BOTTOM SURFACES

(Trans. of JSCE, No. 24, April 1955)

Masao Araki, C.E. Member

**Synopsis** The author's preceding paper, "A Solution of Non-Uniform Steady Flow in Open Channels with Vertical Curvature", was to give only the solutions for rectangular open channels with constant curvature.

In this paper, the author intends to treat the cases for open channels with continuous, variable vertical curvature, considering the velocity component normal to bottom surfaces.

**要 旨** 土木学会誌 39 卷 9 号上に発表した筆者の研究「彎曲底面開水路を流れる不等速定流の一解法」は、底面に垂直な速度成分を無視し、かつ一定の底面曲率を有する開水路の場合のみを取扱つたものである。

そこでさらに一步を進めて、底面曲率が連続的かつ比較的小さく変化する場合について、底面に垂直方向の速度成分を考慮した、より厳密な不等速定流解を誘導してみることにする。

### I. 総 論

筆者はさきに「彎曲底面開水路を流れる不等速定流の一解法」<sup>1)</sup>として、円嚮座標を用いて底面曲率が一定なる二次元断面に適用しうる不等流公式を提示したが、その公式誘導においては、底面曲率の変化の影響及び底面に垂直方向の速度成分は無視した。ところでダム余水路のごとき場合には、円弧以外の曲線形を使用することが多く、かつ底面に垂直方向の速度成分を無視することができない場合も多いので、本論文においては一般直交角座標を用いて、底面曲率の変化の影響及び底面に垂直方向の速度成分を考慮した不等速定流解を誘導してみることにした。ただし底面曲率の変化は小さいものと仮定する。

まず準備として、前報文と同様な方法により一般直交座標を用いて、底面に垂直方向の速度成分を無視した近似解を求めることにする。

### II. 底面に垂直方向の速度成分を無視した近似解の誘導

1. 底面が凸面をなす場合 図-1のごとき場合について、曲つた底面に沿つて  $x$  軸をとり、これに垂直に曲線の凸側に  $y$  軸をとつたものとする。一般直交曲線座標 ( $x, y$  軸) を用いての Euler の運動方程式および連続の式は、流れが定常的であるとすると、次式で表わされる<sup>2)</sup>。

$$\frac{r_0}{r_0+y} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{r_0+y} uv = g \sin \theta$$

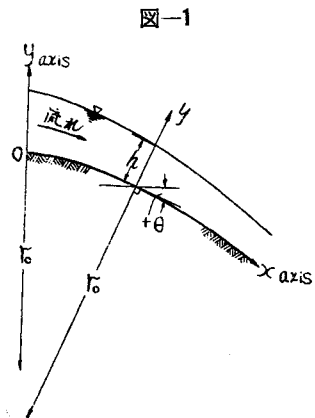
$$-\frac{1}{\rho} \frac{r_0}{r_0+y} \frac{\partial p}{\partial x} \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{r_0}{r_0+y} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{r_0+y} u^2 = -g \cos \theta$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( 1 + \frac{y}{r_0} \right) v \right\} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

また静止の状態から重力の作用のもとに生ずる流れは、非回転的と考えられるから、



\* 建設省土木研究所, 河川構造物研究室

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{r_0 + y} u - \frac{r_0}{r_0 + y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

ただし上各式において、 $u$  は底面に平行、 $v$  は底面に垂直な速度成分である。 $r_0$  は底面の曲率半径、 $\theta$  は底面の切線が水平線となす角であつて、流れの進行方向に向つて底面の切線が水平線の下側にくるときを正とする。 $p$  は流体圧力、 $\rho$  は流体密度、 $g$  は重力加速度、 $\rho g = w$  (単位体積の重量) とおく。

ここで  $v$  は  $u$  に比してきわめて小さいと仮定し、前論文と全く同様に各項のオーダー算定を行い、小さな項を省略すれば (1)~(4) は結局次式となる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \left(1 + \frac{y}{r_0}\right) g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{u^2}{r_0 + y} = g \cos \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(1 + \frac{y}{r_0}\right) v \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{r_0 + y} = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

この4方程式が基本方程式である。ここで  $\frac{\partial r_0}{\partial x}$  は比較的小さく、かつ連続変化をなすものとして以下論ずることとする。 $q$  を水路の単位巾当りの流量、 $h$  を底面に垂直な水深とすると、 $u$  は (8) 式を積分して次式で表わされる。

$$u = \frac{q}{(r_0 + y) \log \left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \quad \dots\dots\dots(9)$$

$h/r_0$  が1に比して小さい場合には、 $V$  を断面平均流速 ( $q/h$ ) とすれば、 $u$  は近似的に次式で表わされる。

$$u = \frac{2r_0 + h - 2y}{2r_0} V \quad \dots\dots\dots(10)$$

(9) 式を (6) 式に代入して、 $p$  を求めれば

$$\frac{p}{w} = (h - y) \cos \theta - \frac{q^2 (h - y) (2r_0 + h + y)}{2g (r_0 + y)^2 (r_0 + h)^2 \log^2 \left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$h/r_0$  が1に比していちじるしく小さい場合には、(11) 式は近似的に次式で表わされる ((50) 式参照)。

$$\frac{p}{w} = (h - y) \cos \theta - \frac{(h - y) (2r_0 - h - 3y)}{r_0^2} \frac{V^2}{2g} \quad \dots\dots\dots(12)$$

(9) 式より  $\frac{\partial u}{\partial x}$  を求めれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = & - \frac{q}{(r_0 + y)(r_0 + h) \log^2 \left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dh}{dx} \\ & + \frac{q \left\{ h(r_0 + y) - r_0(r_0 + h) \log \left(1 + \frac{h}{r_0}\right) \right\}}{r_0(r_0 + y)^2 (r_0 + h) \log^2 \left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dr_0}{dx} \quad \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

(13) 式を (7) 式に代入して  $y$  について積分し、 $y=0$  のとき  $v=0$  なる境界条件により積分常数を定めれば、

$$\begin{aligned} v = & \frac{qr_0 \log \left(1 + \frac{y}{r_0}\right)}{(r_0 + y)(r_0 + h) \log^2 \left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dh}{dx} \\ & + \frac{q \left\{ y(r_0 + h) \log \left(1 + \frac{h}{r_0}\right) - h(r_0 + y) \log \left(1 + \frac{y}{r_0}\right) \right\}}{(r_0 + y)^2 (r_0 + h) \log^2 \left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dr_0}{dx} \quad \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

(9), (14) より  $v/u$  を求めれば

$$\frac{v}{u} = \frac{r_0 \log\left(1 + \frac{y}{r_0}\right)}{(r_0 + h) \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dh}{dx} + \frac{y(r_0 + h) \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right) - h(r_0 + y) \log\left(1 + \frac{y}{r_0}\right)}{(r_0 + y)(r_0 + h) \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dr_0}{dx} \quad (15)$$

(15) 式より  $y=h$  における  $v/u$  を計算し,  $dx$  に対応する水面長を  $dx_s$  とすれば

$$\left[ \frac{v}{u} \right]_{y=h} = \frac{r_0}{r_0 + h} \frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dx_s} \quad (16)$$

となり,  $\frac{dr_0}{dx}$  を含む項は消える。

(9) 式と (13) 式より  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  を求め, (11) 式より  $\frac{\partial p}{\partial x}$  を計算してこれらを (5) 式に代入すれば,  $y$  を含む項は全部消えるから,  $\frac{dh}{dx}$  について整理して

$$\left[ \cos \theta - \frac{q^2 \left\{ 1 + \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right) \right\}}{g(r_0 + h)^3 \log^3\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \right] \frac{dh}{dx} - \left(1 + \frac{h}{r_0}\right) \sin \theta + \frac{q^2 \left\{ h - r_0 \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right) \right\}}{gr_0(r_0 + h)^3 \log^3\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dr_0}{dx} = 0 \quad (17)$$

(17) 式が摩擦抵抗を考慮しない場合の水面形状を定める不等流公式である。次に流速の自乗に比例する摩擦抵抗の影響を考慮することになれば, この影響は高速流においては一般に比較的小さいから, 不等流公式は次式にて表わすことができるものとする。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\left(1 + \frac{h}{r_0}\right) \sin \theta - \frac{q^2 \left\{ h - r_0 \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right) \right\}}{gr_0(r_0 + h)^3 \log^3\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dr_0}{dx} - \frac{q^2}{C^2 h^3}}{\cos \theta - \frac{q^2 \left\{ 1 + \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right) \right\}}{g(r_0 + h)^3 \log^3\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)}} \quad (18)$$

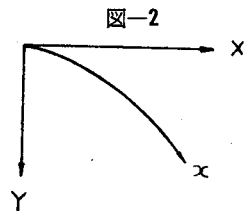
(18) 式が求める不等速定流公式である。ここに  $C$  は摩擦抵抗に関する Chezy の常数である。

$v$  は  $u$  に比して小さいとする基本仮定により,  $h/r_0$  は当然 1 に比して相当小さい場合を取扱っていることとなるが, とくに  $h/r_0 \leq \frac{1}{4}$  とすると, (18) 式は次のような簡単な形にすることができる ((59) 式参照)。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\left(1 + \frac{h}{r_0}\right) \sin \theta - \left(\frac{1}{h} - \frac{2}{r_0}\right) \frac{q^2}{2gr_0^2} \frac{dr_0}{dx} - \frac{q^2}{C^2 h^3}}{\cos \theta - \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{2r_0}\right) \frac{q^2}{gh^2}} \quad (19)$$

底面曲線が図-2 に示すごとく,  $Y=f(X)$  として与えられた場合には, 明らかに

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \frac{\left\{ 1 + \left( \frac{dY}{dX} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 Y}{dX^2}} ; \\ \frac{dr_0}{dx} &= 3 \frac{dY}{dX} - \frac{\left\{ 1 + \left( \frac{dY}{dX} \right)^2 \right\} \frac{d^3 Y}{dX^3}}{\left( \frac{d^2 Y}{dX^2} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$



となるが, 座標の向きは曲率半径を正とする向き  $\left( \frac{d^2 Y}{dX^2} \geq 0 \right)$  にとらなければならない (図-2)。

次に常流から射流に移る支配断面においては  $dh/dx = \%$  となるはずであるから, (18) または (19) 式の分子, 分母をとともに 0 とおくことにより, 支配断面の位置及び限界水深  $h_c$  を求めることができる。(18) 式より限界

Froude 数  $F_c$  を求めれば,  $\cos \theta \doteq 1$  とおくことができるから,

$$F_c = \frac{\left\{ (r_0 + h_c) \log \left( 1 + \frac{h_c}{r_0} \right) \right\}^{3/2}}{h_c^{3/2} \left\{ 1 + \log \left( 1 + \frac{h_c}{r_0} \right) \right\}^{1/2}} \dots\dots\dots (21)$$

(19) 式より  $h/r_0 \leq \frac{1}{4}$  の場合における  $F_c$  を求めれば,

$$F_c = \sqrt{1 + \frac{h_c}{2r_0}} \dots\dots\dots (22)$$

2. 底面が凹面をなす場合

図-3 のごとき場合については, 次の4つの方程式により前と全く同様に求めることができるので, 結果のみかかげることにする。

$$\frac{r_0}{r_0 - y} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{r_0 - y} uv = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{r_0}{r_0 - y} \frac{\partial p}{\partial x} \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{r_0}{r_0 - y} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{r_0 - y} u^2 = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( 1 - \frac{y}{r_0} \right) v \right\} = 0 \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{r_0 - y} u - \frac{r_0}{r_0 - y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (26)$$

$$u = \frac{q}{(r_0 - y) \log \left( \frac{r_0}{r_0 - h} \right)} \dots\dots\dots (27)$$

$$\frac{p}{w} = (h - y) \cos \theta + \frac{q^2 (h - y) (2r_0 - h - y)}{2g (r_0 - y)^2 (r_0 - h)^2 \log^2 \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right)} \dots\dots\dots (28)$$

$h/r_0$  が1に比して小さい場合における  $u, p$  の近似式は

$$u = \frac{2r_0 - h + 2y}{2r_0} V \dots\dots\dots (29)$$

$$\frac{p}{w} = (h - y) \cos \theta + \frac{(h - y) (2r_0 + h + 3y)}{r_0^2} \frac{V^2}{2g} \dots\dots\dots (30)$$

$$v = \frac{-qr_0 \log \left( 1 - \frac{y}{r_0} \right)}{(r_0 - y) (r_0 - h) \log^2 \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right)} \frac{dh}{dx} - \frac{q \left\{ y (r_0 - h) \log \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right) - h (r_0 - y) \log \left( 1 - \frac{y}{r_0} \right) \right\}}{(r_0 - y)^2 (r_0 - h) \log^2 \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right)} \frac{dr_0}{dx} \dots\dots\dots (31)$$

不等流公式は次式で与えられる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\left( 1 - \frac{h}{r_0} \right) \sin \theta + \frac{q^2 \left\{ h + r_0 \log \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right) \right\}}{gr_0 (r_0 - h)^3 \log^3 \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right)} \frac{dr_0}{dx} - \frac{q^2}{C^2 h^3}}{\cos \theta + \frac{q^2 \left\{ 1 + \log \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right) \right\}}{g (r_0 - h)^3 \log^3 \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right)}} \dots\dots\dots (32)$$

とくに  $h/r_0 \leq \frac{1}{5}$  の場合には

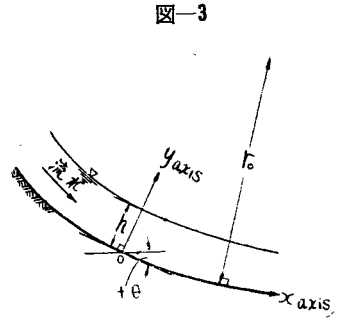


図-3

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\left(1 - \frac{h}{r_0}\right) \sin \theta + \left(\frac{1}{h} + \frac{7}{3r_0}\right) \frac{q^2}{2gr_0^2} \frac{dr_0}{dx} - \frac{q^2}{C^2 h^2}}{\cos \theta - \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2r_0}\right) \frac{q^2}{gh^2}} \quad (33)$$

$r_0$ ,  $\frac{dr_0}{dx}$  の計算式は  $\frac{d^2 Y}{dX^2} \geq 0$  ならしめる直角座標の向きをとれば, (20) 式で与えられる。

限界 Froude 数  $F_c$  は

$$F_c = \frac{\left\{ (r_0 - h_c) \log \left( \frac{r_0}{r_0 - h_c} \right) \right\}^{3/2}}{h_c^{3/2} \left\{ 1 + \log \left( 1 - \frac{h_c}{r_0} \right) \right\}^{1/2}} \quad (34)$$

とくに  $h_c/r_0 \leq \frac{1}{5}$  の場合には

$$F_c = \sqrt{1 - \frac{h_c}{2r_0}} \quad (35)$$

### III. 底面に垂直方向の速度成分を考慮した解の誘導

1. 底面が凸面をなす場合 Boussinesq の渦動粘性係数を一定と仮定して, 定常的な流れに対する運動方程式をかけば次のように表わされる (図-1)。

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{r_0+y} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{r_0+y} uv = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{r_0}{r_0+y} \frac{\partial p}{\partial x} \\ + \frac{\epsilon}{\rho} \left[ \frac{r_0^2}{(r_0+y)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{r_0 y}{(r_0+y)^3} \frac{\partial r_0}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r_0+y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{(r_0+y)^2} u \right. \\ \left. - \frac{r_0}{(r_0+y)^3} \frac{\partial r_0}{\partial x} v + \frac{2r_0}{(r_0+y)^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{r_0+y} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{r_0+y} u^2 = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ + \frac{\epsilon}{\rho} \left[ \frac{r_0^2}{(r_0+y)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{r_0 y}{(r_0+y)^3} \frac{\partial r_0}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r_0+y} \frac{\partial v}{\partial y} \right. \\ \left. - \frac{1}{(r_0+y)^2} v + \frac{r_0}{(r_0+y)^3} \frac{\partial r_0}{\partial x} u - \frac{2r_0}{(r_0+y)^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (37) \end{aligned}$$

連続の方程式は, 前と同様に

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( 1 + \frac{y}{r_0} \right) v \right\} = 0 \quad (38)$$

渦動粘性項は一般にきわめて小さく, 底面近くにおける速度勾配のきわめて大きい層を除くと, 方程式中の他項に比して無視できる程度の大いさと考えられる。このように考えるときは, 渦動粘性項は底面近くのみにおいて考慮すればよいから, 渦動粘性項内の  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $v$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  は  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  に比して無視しうる。また

$v$  は  $u$  に比して小さいと見てよいから,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$  も  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  に較べて無視できる。すなわち (36)

式の渦動粘性項では  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  のみ残り, (37) 式の渦動粘性項は近似的に省略しうるものとする。

連続方程式 (38) 式を (36) 式の左辺に代入して

$$\frac{r_0}{r_0+y} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{r_0+y} uv = -u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -u^2 \frac{\partial (v/u)}{\partial y} \quad (39)$$

同様に (38) 式を (37) 式の左辺に代入して

$$\frac{r_0}{r_0+y} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{r_0+y} u^2 = \frac{-u^2}{r_0+y} \left\{ 1 + \left( \frac{v}{u} \right)^2 - r_0 \frac{\partial (v/u)}{\partial x} \right\} \quad (40)$$

従つて (36), (37) 式は次の形で表わされる。

$$-\left( 1 + \frac{y}{r_0} \right) \frac{u^2}{g} \frac{\partial (v/u)}{\partial y} = \left( 1 + \frac{y}{r_0} \right) \sin \theta - \frac{1}{w} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\epsilon}{w} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( 1 + \frac{y}{r_0} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \quad (41)$$

$$\frac{u^2}{g(r_0+y)} \left\{ 1 + \left( \frac{v}{u} \right)^2 - r_0 \frac{\partial (v/u)}{\partial x} \right\} = \cos \theta + \frac{1}{w} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (42)$$

さてここで、 $u, v$  または  $v/u$  のうち、いずれか一つの  $y$  方向における分布が与えられれば、連続方程式と水面と底面における境界条件とにより  $u, v, v/u$  のすべての  $y$  方向における分布が定められるから、(41), (42) 式を解くことができる。しかしながら現在の彎曲底面上の流れに関する乱流理論の発展段階では、 $u$  の分布を純理論的に求めることはできないから、実験値による検証に頼らなければならない。

Boussinesq は平面底面上を流れる鉛直速度成分を無視できない開水路流れの解においては<sup>3)</sup>、 $v/u = y/h \frac{dh}{dx}$  と仮定したが、これは  $u = \frac{q}{h}$  (一定) なる仮定と連続方程式よりただちに求められ、平面上の開水路流れではこの仮定で十分であろうと思われる。しかしながら彎曲底面上では  $u = q/h$  は成立たず、むしろ近似解における (9) 式のいわゆる非回転的分布の方が、底面のごく近傍を除けば実測値とよく一致することが確かめられている。従つてここでは  $u$  を次のように仮定する。

$$u = \frac{\eta q}{(r_0 + y) \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \dots\dots\dots (43)$$

ここで  $\eta$  は  $y/h$  のある函数であつて、 $[\eta]_{y=0} = 0$  であるが、層流底層の厚さ  $\delta$  の外では ( $\delta \leq y/h \leq 1$ )、ほぼ 1 に近いと考える。

しかるときは連続方程式より  $v/u$  は (15) 式と同様に、次のようにおくことができる。

$$\frac{v}{u} = \frac{r_0 \log\left(1 + \frac{y}{r_0}\right)}{(r_0 + h) \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dh}{dx} + \frac{y(r_0 + h) \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right) - h(r_0 + y) \log\left(1 + \frac{y}{r_0}\right)}{(r_0 + y)(r_0 + h) \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dr_0}{dx} \dots\dots\dots (44)$$

(44) 式の  $v/u$  は底面で 0、水面で  $\frac{dh}{dx_s}$  の境界条件を満足することは明らかである。また  $r_0 \rightarrow \infty$  の場合には、 $\frac{v}{u} = \frac{y}{h} \frac{dh}{dx}$  となつて Boussinesq の仮定と一致する。

(44) 式より

$$\frac{\partial(v/u)}{\partial y} = \frac{r_0}{(r_0 + y)(r_0 + h) \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dh}{dx} + \frac{r_0(r_0 + h) \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right) - h(r_0 + y)}{(r_0 + y)^2 (r_0 + h) \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dr_0}{dx} \dots\dots\dots (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(v/u)}{\partial x} = & \frac{r_0 \log\left(1 + \frac{y}{r_0}\right)}{(r_0 + h) \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{d^2 h}{dx^2} + f_1 \left[ \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 \right] + f_2 \left[ \frac{dh}{dx} \frac{dr_0}{dx} \right] \\ & + f_3 \left[ \left( \frac{dr_0}{dx} \right)^2 \right] + f_4 \left[ \frac{d^2 r_0}{dx^2} \right] \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

最初の仮定により曲率の変化は小さい場合を考えているから、 $\left(\frac{dh}{dx}\right)^2, \frac{dh}{dx} \frac{dr_0}{dx}, \left(\frac{dr_0}{dx}\right)^2, \frac{d^2 r_0}{dx^2}$  の各項は高次の微小量として省略する。(43), (45), (46) 各式を (41), (42) 式に代入し、このうち (42) 式の  $(v/u)^2$  は  $\left(\frac{dh}{dx}\right)^2, \frac{dh}{dx} \frac{dr_0}{dx}, \left(\frac{dr_0}{dx}\right)^2$  の項のみからなるから、高次の微小量として省略すれば、次の 2 式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\eta^2 q^2}{y r_0 (r_0 + y) \log^2\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \left\{ \frac{r_0}{(r_0 + y)(r_0 + h) \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dh}{dx} \right. \\ & \left. + \frac{r_0(r_0 + h) \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right) - h(r_0 + y)}{(r_0 + y)^2 (r_0 + h) \log\left(1 + \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dr_0}{dx} \right\} \\ = & \left(1 + \frac{y}{r_0}\right) \sin \theta - \frac{1}{w} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{w} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(1 + \frac{y}{r_0}\right) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

$$\frac{\tau^2 q^2}{g(r_0+y)^3 \log^2\left(1+\frac{h}{r_0}\right)} \left\{ 1 - \frac{r_0^2 \log\left(1+\frac{y}{r_0}\right)}{(r_0+h) \log\left(1+\frac{h}{r_0}\right)} \frac{d^2 h}{dx^2} \right\} = \cos \theta + \frac{1}{w} \frac{\partial p}{\partial y} \dots (48)$$

(48) 式から圧力分布を与える式が得られる。

(48) 式を  $y$  について、 $y$  から  $h$  まで積分すれば

$$\begin{aligned} \frac{p}{w} = & (h-y) \cos \theta - \frac{\alpha q^2 (h-y)(2r_0+h+y)}{2g(r_0+y)^2 (r_0+h)^2 \log^2\left(1+\frac{h}{r_0}\right)} \\ & + \frac{\beta q^2 r_0^2 \left\{ 2(r_0+h)^2 \log\left(1+\frac{y}{r_0}\right) - 2(r_0+y)^2 \log\left(1+\frac{h}{r_0}\right) + (h-y)(2r_0+h+y) \right\}}{4g(r_0+y)^2 (r_0+h)^3 \log^3\left(1+\frac{h}{r_0}\right)} \frac{d^2 h}{dx^2} \dots (49) \end{aligned}$$

ここに  $\alpha, \beta$  は (49) 式の積分に当つて  $\tau$  を積分外に出すことに対する補正係数であるが、1に近い値と考えられる。(49) 式において  $\frac{d^2 h}{dx^2}$  の項が近似解の (11) 式に対して補正項としてつけ加えられてある。すなわち (49) 式の第一項は静圧分布、第二項は遠心力による圧力、第三項は底面に垂直方向の速度成分による圧力項である。

$\frac{h}{r_0}$  が 1 に比して小さい場合に、(49) 式を  $\frac{h}{r_0}, \frac{y}{r_0}$  について展開すれば

$$\begin{aligned} \frac{p}{w} = & (h-y) \cos \theta - \left\{ 2 - \frac{h+3y}{r_0} + \frac{7h^2+6hy+24y^2}{6r_0^2} - \dots \right\} \frac{(h-y)}{r_0} \frac{\alpha V^2}{2g} \\ & + \left\{ (h+y) - \frac{11h^2+11hy+14y^2}{6r_0} + \frac{33h^3+33h^2y+33hy^2+47y^3}{12r_0^2} \right. \\ & \left. - \dots \right\} \frac{(h-y)}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} \frac{\beta V^2}{2g} \dots (50) \end{aligned}$$

$\frac{h}{r_0} \ll 1$  の場合には、(50) 式より

$$\begin{aligned} \frac{p}{w} \doteq & (h-y) \cos \theta - \frac{(h-y)(2r_0-h-3y)}{r_0^2} \frac{\alpha V^2}{2g} \\ & + \frac{(h-y)\{6r_0(h+y)-11h^2-11hy-14y^2\}}{6r_0h} \frac{d^2 h}{dx^2} \frac{\beta V^2}{2g} \dots (51) \end{aligned}$$

(51) 式において  $y=0$  とすれば底圧  $[p]_{y=0}$  の近似式が得られる。

$$\left[ \frac{p}{w} \right]_{y=0} \doteq h \cos \theta - \frac{h(2r_0-h)}{r_0^2} \frac{\alpha V^2}{2g} + \frac{h(6r_0-11h)}{6r_0} \frac{d^2 h}{dx^2} \frac{\beta V^2}{2g} \dots (52)$$

(50) 式において  $r_0 \rightarrow \infty$  とすれば

$$\frac{p}{w} = (h-y) \cos \theta + \frac{h^2-y^2}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} \frac{\beta V^2}{2g} \dots (53)$$

となつて、 $\cos \theta = 1$  とすれば平面底面上の流れに対する Boussinesq の解と一般する<sup>4)</sup>。

(49) 式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \frac{\partial p}{\partial x} = & \cos \theta \frac{dh}{dx} - \frac{(h-y)}{r_0} \sin \theta + \frac{\alpha q^2}{g(r_0+y)^2 (r_0+h) \log^3\left(1+\frac{h}{r_0}\right)} \frac{dh}{dx} \\ & - \frac{\alpha q^2 \left\{ 1 + \log\left(1+\frac{h}{r_0}\right) \right\}}{g(r_0+h)^3 \log^3\left(1+\frac{h}{r_0}\right)} \frac{dh}{dx} + \frac{\alpha q^2 \left\{ h-r_0 \log\left(1+\frac{h}{r_0}\right) \right\}}{gr_0(r_0+h)^3 \log^3\left(1+\frac{h}{r_0}\right)} \frac{dr_0}{dx} \\ & + \frac{\alpha q^2 \left\{ r_0(r_0+h) \log\left(1+\frac{h}{r_0}\right) - h(r_0+y) \right\}}{gr_0(r_0+y)^3 (r_0+h) \log^3\left(1+\frac{h}{r_0}\right)} \frac{dr_0}{dx} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\beta q^2 r_0^2 \left\{ 2(r_0 + h)^2 \log \left( 1 + \frac{y}{r_0} \right) - 2(r_0 + y)^2 \log \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) + (h - y)(2r_0 + h + y) \right\}}{4 g(r_0 + y)^2 (r_0 + h)^3 \log^3 \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)} \frac{d^3 h}{dx^3} \dots\dots\dots (54)$$

ただし微分係数の積の項は省略した。(54) 式を (47) 式に代入して、 $y$  について 0 から  $h$  まで積分すれば、結局

$$h \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) \sin \theta - h \left[ \cos \theta - \frac{\alpha q^2 \left\{ 1 + \log \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) \right\}}{g(r_0 + h)^3 \log^3 \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)} \right] \frac{dh}{dx} + \frac{\beta q^2 r_0 \left\{ 2r_0(r_0 + 2h) \log \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) - h(2r_0 + 3h) \right\}}{4 g(r_0 + h)^3 \log^3 \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)} \frac{d^3 h}{dx^3} - \frac{\alpha q^2 h \left\{ h - r_0 \log \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) \right\}}{g r_0 (r_0 + h)^3 \log^3 \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)} \frac{dr_0}{dx} + \left. \frac{\varepsilon}{w} \left( 1 + \frac{y}{r_0} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0^h = 0 \dots\dots\dots (55)$$

(55) 式の誘導に当つて、 $\alpha, \beta$  等の係数相互の差すなわち  $(\alpha - \beta)$  等の項は微小量として省略した。また

$$\left. \frac{\varepsilon}{w} \left( 1 + \frac{y}{r_0} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0^h \doteq - \left[ \frac{\varepsilon}{w} \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0}$$

となり、この項は底面の摩擦を意味するから、これを平均流速の自乗に比例するものと仮定すれば  $-\frac{V^2}{C^2}$  で表わされる。従つて (55) 式より

$$\left[ \cos \theta - \frac{\alpha q^2 \left\{ 1 + \log \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) \right\}}{g(r_0 + h)^3 \log^3 \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)} \right] \frac{dh}{dx} - \frac{\beta q^2 r_0 \left\{ 2r_0(r_0 + 2h) \log \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) - h(2r_0 + 3h) \right\}}{4 gh(r_0 + h)^3 \log^3 \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)} \frac{d^3 h}{dx^3} = \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) \sin \theta - \frac{\alpha q^2 \left\{ h - r_0 \log \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) \right\}}{g r_0 (r_0 + h)^3 \log^3 \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right)} \frac{dr_0}{dx} - \frac{q^2}{C^2 h^3} \dots\dots\dots (56)$$

(56) 式が彎曲底面上を流れる、底面に垂直な速度成分を無視できない不等速定流の基本方程式であつて、近似解の (18) 式に比して  $\frac{d^3 h}{dx^3}$  の項が補正のため加えられてある。本式は  $h$  に関して三階の常微分方程式であるから、数値積分法により水面形を定めることができる。

次に  $\frac{h}{r_0} < 1$  の場合について、(56) 式の近似式を求める。(56) 式の各項を  $h/r_0$  について展開すれば、明らかに、

$$\left[ \cos \theta - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{h}{r_0} + \frac{7}{12} \left( \frac{h}{r_0} \right)^3 - \frac{299}{240} \left( \frac{h}{r_0} \right)^4 + \dots\dots\dots \right\} \frac{\alpha q^2}{gh^3} \right] \frac{dh}{dx} + \left\{ 1 - \frac{17}{8} \frac{h}{r_0} + \frac{271}{80} \left( \frac{h}{r_0} \right)^2 - \frac{191}{40} \left( \frac{h}{r_0} \right)^3 + \dots\dots\dots \right\} \frac{\beta q^2}{3 gh} \frac{d^3 h}{dx^3} = \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) \sin \theta - \left\{ 1 - \frac{13}{6} \frac{h}{r_0} + \frac{7}{2} \left( \frac{h}{r_0} \right)^2 - \frac{299}{60} \left( \frac{h}{r_0} \right)^3 + \dots\dots\dots \right\} \times \frac{\alpha q^2}{2 ghr_0^2} \frac{dr_0}{dx} - \frac{q^2}{C^2 h^3} \dots\dots\dots (57)$$

$\frac{h}{r_0} \leq \frac{1}{4}$  とすれば、十分近似的に次式が成立する。



$$\left[ \cos \theta - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{h}{r_0} + \frac{7}{12} \left( \frac{h}{r_0} \right)^3 \right\} \frac{\alpha q^2}{gh^3} \right] \frac{dh}{dx} + \left\{ 1 - \frac{17}{8} \frac{h}{r_0} + \frac{271}{80} \left( \frac{h}{r_0} \right)^2 \right\} \times \frac{\beta q^2}{3gh} \frac{d^3h}{dx^3} = \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) \sin \theta - \left\{ 1 - \frac{13}{6} \frac{h}{r_0} + \frac{7}{2} \left( \frac{h}{r_0} \right)^2 \right\} \frac{\alpha q^2}{2ghr_0^2} \frac{dr_0}{dx} - \frac{q^2}{C^2h^3} \dots (58)$$

$\frac{h}{r_0} \leq \frac{1}{10}$  ではさらに簡単に

$$\left\{ \cos \theta - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{h}{r_0} \right) \frac{\alpha q^2}{gh^3} \right\} \frac{dh}{dx} + \left( 1 - 2 \frac{h}{r_0} \right) \frac{\beta q^2}{3gh} \frac{d^3h}{dx^3} = \left( 1 + \frac{h}{r_0} \right) \sin \theta - \left( 1 - 2 \frac{h}{r_0} \right) \frac{\alpha q^2}{2ghr_0^2} \frac{dr_0}{dx} - \frac{q^2}{C^2h^3} \dots (59)$$

(57) 式において  $r_0 \rightarrow \infty$  とすれば,

$$\left( \cos \theta - \frac{\alpha q^2}{gh^3} \right) \frac{dh}{dx} + \frac{\beta q^2}{3gh} \frac{d^3h}{dx^3} = \sin \theta - \frac{q^2}{C^2h^3} \dots (60)$$

(60) 式は  $\cos \theta \doteq 1$ ,  $\sin \theta \doteq i$  とすれば, 平面底面上の流れに対する Boussinesq の解と一致する。また (59) 式において  $\frac{d^3h}{dx^3}$  を無視すれば, 近似解の (19) 式となる。すなわち (19) 式は  $\frac{d^3h}{dx^3}$  を無視しうる範囲内において成立することがわかる。

2. 底面が凹面をなす場合 この場合も前節と全く同一方法により求めることができるので, 結果のみ掲げることにする (図-3)。

$$\frac{p}{w} = (h-y) \cos \theta + \frac{\alpha q^2 (h-y) (2r_0 - h - y)}{2g(r_0 - y)^2 (r_0 - h)^2 \log^2 \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right)} + \frac{\beta q^2 r_0^2 \left\{ 2(r_0 - y)^2 \log \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right) - 2(r_0 - h)^2 \log \left( 1 - \frac{y}{r_0} \right) + (h-y)(2r_0 - h - y) \right\}}{4g(r_0 - y)^2 (r_0 - h)^3 \log^3 \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right)} \frac{d^3h}{dx^3} \dots (61)$$

$\frac{h}{r_0}$  が 1 に比して小さい場合に, (61) 式を  $\frac{y}{r_0}$ ,  $\frac{h}{r_0}$  について展開すれば

$$\frac{p}{w} = (h-y) \cos \theta + \left\{ 2 + \frac{h+3y}{r_0} + \frac{7h^2+6hy+24y^2}{6r_0^2} + \dots \right\} \frac{(h-y)}{r_0} \frac{\alpha V^2}{2g} + \left\{ (h+y) + \frac{11h^2+11hy+14y^2}{6r_0} + \frac{33h^3+33h^2y+33hy^2+47y^3}{12r_0^2} + \dots \right\} \times \frac{(h-y)}{h} \frac{d^3h}{dx^3} \frac{\beta V^2}{2g} \dots (62)$$

$\frac{h}{r_0} \ll 1$  の場合には, (62) 式より

$$\frac{p}{w} \doteq (h-y) \cos \theta + \frac{(h-y)(2r_0+h+3y)}{r_0^2} \frac{\alpha V^2}{2g} + \frac{(h-y) \{ 6r_0(h+y) + 11h^2 + 11hy + 14y^2 \}}{6r_0h} \frac{d^3h}{dx^3} \frac{\beta V^2}{2g} \dots (63)$$

$$\therefore \left[ \frac{p}{w} \right]_{y=0} \doteq h \cos \theta + \frac{h(2r_0+h)}{r_0^2} \frac{\alpha V^2}{2g} + \frac{h(6r_0+11h)}{6r_0} \frac{d^3h}{dx^3} \frac{\beta V^2}{2g} \dots (64)$$

(62) 式において  $r_0 \rightarrow \infty$  とすれば, (53) 式と一致する。

不等流方程式は次のとおりとなる。

$$\left[ \cos \theta + \frac{\alpha q^2 \left\{ 1 + \log \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right) \right\}}{g(r_0 - h)^3 \log^3 \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right)} \right] \frac{dh}{dx} - \frac{\beta q^2 r_0^2 \left\{ 2r_0(r_0 - h) \log \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right) - h(2r_0 - 3h) \right\}}{4gh(r_0 - h)^3 \log^3 \left( 1 - \frac{h}{r_0} \right)} \frac{d^3h}{dx^3}$$

$$= \left(1 - \frac{h}{r_0}\right) \sin \theta + \frac{\alpha q^2 \left\{ h + r_0 \log \left(1 - \frac{h}{r_0}\right) \right\}}{g r_0 (r_0 - h)^3 \log^3 \left(1 - \frac{h}{r_0}\right)} \frac{dr_0}{dx} - \frac{q^2}{C^2 h^3} \dots (65)$$

$\frac{h}{r_0} < 1$  の場合について、(65) 式の各項を  $\frac{h}{r_0}$  について展開すれば

$$\begin{aligned} & \left[ \cos \theta - \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{h}{r_0} - \frac{7}{12} \left(\frac{h}{r_0}\right)^3 - \frac{299}{240} \left(\frac{h}{r_0}\right)^4 - \dots \right\} \frac{\alpha q^2}{gh^3} \right] \frac{dh}{dx} \\ & + \left\{ 1 + \frac{17}{8} \frac{h}{r_0} + \frac{271}{80} \left(\frac{h}{r_0}\right)^2 + \frac{191}{40} \left(\frac{h}{r_0}\right)^3 + \dots \right\} \frac{\beta q^2}{3gh} \frac{d^3 h}{dx^3} = \left(1 - \frac{h}{r_0}\right) \sin \theta \\ & + \left\{ 1 + \frac{13}{6} \frac{h}{r_0} + \frac{7}{2} \left(\frac{h}{r_0}\right)^2 + \frac{299}{60} \left(\frac{h}{r_0}\right)^3 + \dots \right\} \frac{\alpha q^2}{2ghr_0^2} \frac{dr_0}{dx} - \frac{q^2}{C^2 h^3} \dots (66) \end{aligned}$$

$\frac{h}{r_0} \leq \frac{1}{5}$  の場合には十分近似的に

$$\begin{aligned} & \left[ \cos \theta - \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{h}{r_0} - \frac{7}{12} \left(\frac{h}{r_0}\right)^2 \right\} \frac{\alpha q^2}{gh^3} \right] \frac{dh}{dx} + \left\{ 1 + \frac{17}{8} \frac{h}{r_0} + \frac{271}{80} \left(\frac{h}{r_0}\right)^2 \right\} \frac{\beta q^2}{3gh} \frac{d^3 h}{dx^3} \\ & = \left(1 - \frac{h}{r_0}\right) \sin \theta + \left\{ 1 + \frac{13}{6} \frac{h}{r_0} + \frac{7}{2} \left(\frac{h}{r_0}\right)^2 \right\} \frac{\alpha q^2}{2ghr_0^2} \frac{dr_0}{dx} - \frac{q^2}{C^2 h^3} \dots (67) \end{aligned}$$

$\frac{h}{r_0} \leq \frac{1}{10}$  では次式が成立する。

$$\begin{aligned} & \left\{ \cos \theta - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h}{r_0}\right) \frac{\alpha q^2}{gh^3} \right\} \frac{dh}{dx} + \left(1 + \frac{9}{4} \frac{h}{r_0}\right) \frac{\beta q^2}{3gh} \frac{d^3 h}{dx^3} \\ & = \left(1 - \frac{h}{r_0}\right) \sin \theta + \left(1 + \frac{7}{3} \frac{h}{r_0}\right) \frac{\alpha q^2}{2ghr_0^2} \frac{dr_0}{dx} - \frac{q^2}{C^2 h^3} \dots (68) \end{aligned}$$

(66) 式において  $r_0 \rightarrow \infty$  とすれば、平面底面上の流れに対する (60) 式と一致することは明らかである。

#### IV. 結 語

以上をもつて彎曲底面開水路を流れる定常流れについて、底面に垂直な速度成分を考慮しない解と、考慮した解との誘導を終ることとする。ここで十分に究明を行わず、将来の課題として残したのものには (1) 彎曲底面上の流れの摩擦損失を  $q^2/C^2 h^3$  という簡単な形で表わしうるかどうか、また表わしうるとしても Chézy の常数  $C$  はいかなる函数であるか。(2)  $\alpha, \beta$  なる係数と層流底層の厚さとの関係はいかになるか等を始め多くのさらに研究を要する問題があるが、これらについては将来にまつことにしたい。

#### 参 考 文 献

- 1) 荒木正夫：土木学会誌，39 卷 9 号
- 2) S. Goldstein：Modern Developements in Fluid Dynamics, Vol. I, p. 119, Oxford Press, 1938.
- 3) 本間仁：水理学（技術者のための流体の力学），p. 163
- 4) P. Forchheimer, Hydraulik, Zweite Auflage, S. 153, 1924

(昭.29.8.20)