

XII. 結 語

一般の例にもれず、本題も結局、多元連立方程式を解くことに帰着し、その難易が解法を支配し、節点数が多くなれば、解法はきわめて困難になることを認めざるを得ず、この方面の研究も平行して進めらるべきことを痛感する。

平板の近似解法として平面格子の理論が応用されると同様に、本解法は円筒板の近似解として役立つものかと考える。しかし板と格子の根本的な相異や、曲げ及び捩りの変形のみを考えただけで十分かどうかなど、検討すべき点が多い。

本研究に対して、九大教授、田中吉郎、村上正両氏より、種々有益なる御教示を得られたことに対して、深く感謝する次第である。また計算を援助された学生、多田利雄、米沢礼二両君にも深く謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) S. Timoshenko : Elements of Strength of Materials, (1949).
- 2) T. Murakami : Studies on the Slope-Deflection Method, Memoir's of the Faculty of Engineering, Kyushu University, Vol. XIV, No. 1, (1953).
- 3) Waldemar Swida : Zur Statik des Kreisringträgers, Beton und Stahlbetonbau, Heft 1, (1953).

建築、応用力学

巻立楕円形トンネル周辺の応力分布について

正員 小 田 英 一*

ON THE DISTRIBUTION OF STRESS ROUND AN ELLIPTIC TUNNEL WITH LINING

(Trans. of JSCE, No 24, April 1955)

Eiichi Oda, C.E. Member

Synopsis When an elliptic tunnel with lining is located at a large but finite depth underneath the horizontal ground surface and the surrounding material is assumed to be elastic, isotropic and homogeneous; gravitational stresses around this tunnel opening are determined by means of Muschelišvili's complex variable method for solving two-dimensional elasticity problems.

要 旨 巻立楕円形トンネルが水平地表面より相当深い地点にあるとき、2次元弾性問題として Muschelišvili の複素変数の方法によつて、このトンネルの巻立部及びその周囲の重力体の応力分布を調べたものである。

1. 緒 言

起りうる変形が plane strain であるとして、重力の作用する等質等方性の弾性体内に水平な楕円孔を穿つたとき、その周囲に起るべき応力分布の問題は荒井利一郎氏¹⁾により解決されている。また一定の厚さの同心円の巻立のある場合については谷本勉之助氏²⁾により解決されているが、巻立楕円形トンネルの場合については Yi-Yuan Yu 氏³⁾によりその理論より解決を試みられてはいるが、この解法は地山と巻立との境界において完全な結合があり、その変位を0として解いている。これは実際問題として不合理であり、これによつて巻立厚さを決定できない。それで著者はこの巻立楕円形トンネルの場合の地山の応力分布及び巻立内に生ずる応力分布を求めるのに、2次元弾性問題の解法としての Muschelišvili⁴⁾の複素変数による方法を重力体の応力問題に適用し、巻立内壁において剪断応力及び内壁周縁と直角方向の直応力が0となり、巻立と地山との境界においてそれぞれの剪断応力及びその境界周と直角方向の直応力が等しく、かつ変位が等しいという境界条件のもとにこの問題を解いた

計算において便宜上この動力体の上面は水平であるとし、かつこの楕円孔付近の応力分布については、土破りが相当大きくて、上面の影響を無視しうるものと仮定した。なお写像函数の性質により巻立厚さは変化している

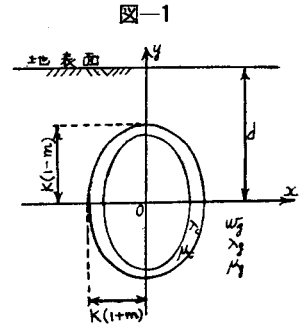
* 徳島大学教授，工学部土木工学教室

場合を取り扱うこととする。

2. 直交座標系による Stress 及び Displacement の形

(1) コンクリート巻立部の Stress 及び Displacement コンクリート巻立部における自重は無視して考える。

U_c : Airy の応力函数 τ_{xxc} : x 方向の直応力 τ_{yyc} : y 方向の直応力 τ_{xyc} : 剪断応力 として, コンクリート巻立部におけるものには添字 c をつけるものとする。 x 軸は水平方向, y 軸は鉛直方向の軸を表わす (図-1 参照)。



$$\left. \begin{aligned} \tau_{xxc} &= \frac{\partial^2 U_c}{\partial y^2} \\ \tau_{yyc} &= \frac{\partial^2 U_c}{\partial x^2} \\ \tau_{xyc} &= -\frac{\partial^2 U_c}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Muschelishvili⁹⁾ 氏によれば応力函数 U_c は複素変数 $z = x + iy$ の 2 つの解析函数 $\varphi_{1c}(z)$ と $\psi_{2c}(z)$ とによつて次のように表わされる。

$$2U_c = \bar{z}\varphi_{1c}(z) + z\bar{\varphi}_{1c}(\bar{z}) + \psi_{2c}(z) + \bar{\psi}_{2c}(\bar{z}) \dots \dots \dots (2)$$

ただし $\psi_{2c}(z) = \int \bar{\psi}_{1c}(z) dz$ \bar{z} は z の共軛なものであり, $\bar{\varphi}_{1c}(\bar{z})$, $\bar{\psi}_{2c}(\bar{z})$ はそれぞれ $\varphi_{1c}(z)$, $\psi_{2c}(z)$ の共軛な解析函数である。

いま τ_{xc} , τ_{yc} はそれぞれ境界における x 方向, y 方向の外力または応力とし, ds は境界に沿つた微小長とすれば

$$\tau_{xc} = \tau_{xxc} \frac{dy}{ds} - \tau_{xyc} \frac{dx}{ds} \quad \tau_{yc} = \tau_{xyc} \frac{dy}{ds} - \tau_{yyc} \frac{dx}{ds}$$

この 2 式に (1) 式を代入すれば

$$\tau_{xc} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U_c}{\partial y} \right) \quad \tau_{yc} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U_c}{\partial x} \right) \dots \dots \dots (3)$$

(3) 式の第 1 式と (3) 式の第 2 式に i を乗じたものを辺々相加えて, その結果の式に ids をさらに乗じて積分し (2) 式を用いて次式となる。

$$\varphi_{1c}(z) + z\bar{\varphi}_{1c}'(\bar{z}) + \bar{\psi}_{1c}(\bar{z}) = i \int (\tau_{xc} + i\tau_{yc}) ds \dots \dots \dots (4)$$

巻立において自重は無視しているから, 重力ポテンシャル V_{1c} は 0 である。

$$V_{1c} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

しからば応力成分は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xxc} + \tau_{yyc} &= 2[\varphi_{1c}'(z) + \bar{\varphi}_{1c}'(\bar{z})] \\ \tau_{yyc} - \tau_{xxc} + 2i\tau_{xyc} &= 2[\bar{z}\varphi_{1c}''(z) + \psi_{1c}'(z)] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

ただし解析函数の one dash, two dash はそれぞれ 1 回微分, 2 回微分をすることを示す。また u_c : 変位の x 成分 v_c : 変位の y 成分 とすれば,

$$2\mu_c(u_c + iv_c) = \kappa_c \varphi_{1c}(z) - z\bar{\varphi}_{1c}'(\bar{z}) - \bar{\psi}_{1c}(\bar{z}) \dots \dots \dots (7)$$

ただし λ_c, μ_c : Lamé 常数 $\kappa_c = \frac{\lambda_c + 3\mu_c}{\lambda_c + \mu_c}$ とする。つぎに $V_{1c} = 0$ なる故に, これと共軛なるものを W_{1c} とすれば $W_{1c} = 0$ となる。

$$\tau_{1c}(z) = \frac{1}{4} \int (V_{1c} + iW_{1c}) dz = 0 \dots \dots \dots (8)$$

(2) 地山部の Stress 及び Displacement 地山部においては重力が作用していて, 重力は y の負の方向にむいているから, X_g : 物体力の x 成分 Y_g : 物体力の y 成分 w_g : 地山の単位体積当りの重量, とすれば

$$X_g = 0 \quad Y_g = -w_g$$

V_{1g} : 物体力に対する重力ポテンシャル とすれば

$$X_g = -\frac{\partial V_{1g}}{\partial x} \quad Y_g = -\frac{\partial V_{1g}}{\partial y} \quad \therefore V_{1g}(x, y) = w_g y$$

いま (1) における諸記号の添字 c の代りに g を用いて地山部のものを表わすとすれば

$$\tau_{xxg} - V_{1g} = \frac{\partial^2 U_g}{\partial y^2} \quad \tau_{yyg} - V_{1g} = \frac{\partial^2 U_g}{\partial x^2} \quad \tau_{xyg} = -\frac{\partial^2 U_g}{\partial x \partial y} \dots \dots \dots (1')$$

$$2U_g = \bar{z}\varphi_{1g}(z) + z\bar{\varphi}_{1g}(\bar{z}) + \psi_{2g}(z) + \bar{\psi}_{2g}(\bar{z}) \dots \dots \dots (2')$$

ただし $\psi_{2g}(z) = \int \psi_{1g}(z) dz$

$$\begin{aligned} \tau_{xxg} &= \tau_{xxg} \frac{dy}{ds} - \tau_{xyg} \frac{dx}{ds} & \tau_{ygg} &= \tau_{xyg} \frac{dy}{ds} - \tau_{yyg} \frac{dx}{ds} \\ \tau_{xgg} - V_{1g} \frac{dy}{ds} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U_g}{\partial y} \right) & \tau_{ygg} + V_{1g} \frac{dx}{ds} &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial V_g}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3')$$

(1) において (4) 式を求めたと同様の方法により次式が成立する。

$$\varphi_{1g}(z) + z \bar{\varphi}_{1g}'(\bar{z}) + \bar{\varphi}_{1g}(\bar{z}) = i \int (\tau_{xgg} + i \tau_{ygg}) ds - \int V_{1g}(z) dz \quad (4')$$

V_{1g} なる函数を複素数の形で書き表わせば

$$V_{1g} = w_g y = -\frac{1}{2} i w_g (z - \bar{z}) \quad (5')$$

これを物体力のない境界条件と対照すれば、物体力はあたかも外力のように考えることができる。Biot⁶⁾ が示したようにこの外力は V_{1g} に等しい水圧に等値できて、(3') 式により V_{1g} の成分はそれぞれ $-V_{1g} \frac{dy}{ds}$, $V_{1g} \frac{dx}{ds}$ である。しからば応力成分は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xxg} + \tau_{ygg} &= 2[\varphi_{1g}'(z) + \bar{\varphi}_{1g}'(\bar{z})] + 2V_{1g}(z) \\ \tau_{ygg} - \tau_{xxg} + 2i\tau_{xyg} &= 2[\bar{z}\varphi_{1g}''(z) + \psi_{1g}'(z)] \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

また変位成分は次式となる。

$$2\mu_g(u_g + i v_g) = \kappa_g \varphi_{1g}(z) - z \bar{\varphi}_{1g}'(\bar{z}) - \bar{\varphi}_{1g}(\bar{z}) + 2(\kappa_g - 1)r_{1g}(z) \quad (7')$$

$V_{1g} = w_g y$ の共軛なものを W_{1g} とすれば $W_{1g} = -w_g x$ となり

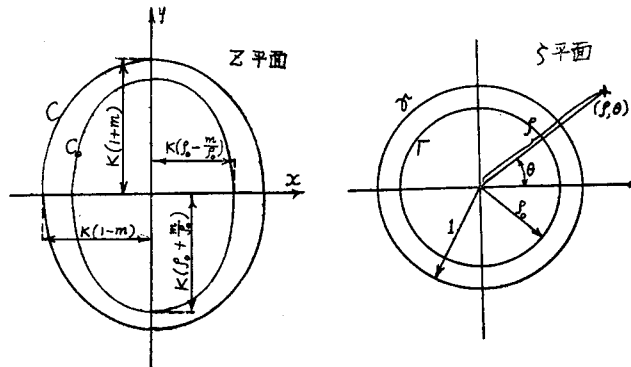
$$r_{1g}(z) = \frac{1}{4} \int (V_{1g} + iW_{1g}) dz = -\frac{1}{8} i w_g z^2 \quad (8')$$

3. 曲線座標系による Stress 及び displacement の形

写像の問題について考えるに、等角写像論で明らかのように Z 平面の領域 S の境界 C を

$$z = w(\zeta) \quad (9)$$

図-2



の関係で ζ 面での単位円 r に一意的に等角写像することができる (図-2 参照)。 $\zeta = \rho e^{i\theta}$ として ρ, θ を ζ 面での極座標とすると、 $\rho = \text{一定}$ 及び $\theta = \text{一定}$ は z 面である曲線となる。この曲線は $\rho = \text{一定}$ に対しては $z_0 = w(0)$ なる点を囲む閉曲線であり、 $\theta = \text{一定}$ に対してはこの点から出て周辺 C に達する放射状の曲線である。この2種の曲線は互いに直交しているが、これを z 面での座標に採用する。 $\theta = \text{一定}$ に対する曲線を ρ -線、 $\rho = \text{一定}$ に対する線を θ -線と名づけ、そのおのおのの接線方向を ρ -軸、 θ -軸ということとする。

(1) コンクリート巻立部の Stress 及び displacement

$$\begin{aligned} \varphi_c(\zeta) &= \varphi_{1c}[w(\zeta)] = \varphi_{1c}(z) & \psi_c(\zeta) &= \psi_{1c}[w(\zeta)] = \psi_{1c}(z) \\ \phi_c(\zeta) &= \frac{\varphi_c'(\zeta)}{w'(\zeta)} & \psi_c(\zeta) &= \frac{\psi_c'(\zeta)}{w'(\zeta)} \end{aligned}$$

として応力成分を ζ の函数として表わせば次式となる。

ただし $\tau_{\rho\rho c}$: ρ -軸方向の直応力 $\tau_{\theta\theta c}$: θ -軸方向の直応力 $\tau_{\rho\theta c}$: 曲線座標系における剪断応力 とする。

$$\tau_{\rho\rho c} + \tau_{\theta\theta c} = 2[\Phi_c(\zeta) + \bar{\Phi}_c(\bar{\zeta})] \dots\dots\dots (10)$$

$$\tau_{\theta\theta c} - \tau_{\rho\rho c} + 2i\tau_{\rho\theta c} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2\bar{w}'(\bar{\zeta})} [\bar{w}(\bar{\zeta})\Phi_c'(\zeta) + w'(\zeta)\Psi_c(\zeta)] \dots\dots\dots (11)$$

x, y 方向の変位成分 u_c, v_c はそれぞれ次式のごとくなる。

$$2\mu_c(u_c + iv_c) = \kappa_c\varphi_c(\zeta) - \frac{w(\zeta)}{\bar{w}'(\bar{\zeta})}\bar{\varphi}_c'(\bar{\zeta}) - \bar{\psi}_c(\bar{\zeta}) \dots\dots\dots (12)$$

いま図-2 に示すごとく z 平面の周辺 C を地山と巻立との境界として、これが ζ 平面の単位円 r に写像され、また z 平面の周辺 C_0 を巻立の内壁として、これが ζ 平面の半径 ρ_0 なる Γ 円に写像されるとすれば、第一種境界値問題として境界 C 及び C_0 上の応力に関しては (4) 式より

(i) r 円上において $\rho=1$ なるから、このときの ζ を σ として $\sigma=e^{i\theta}$ となる

$$\varphi_c(\sigma) + \frac{w(\sigma)}{\bar{w}'(\bar{\sigma})}\bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}) + \bar{\psi}_c(\bar{\sigma}) = f_{1c} + if_{2c} \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{ただし } f_{1c} + if_{2c} = i \int (\tau_{xc} + i\tau_{yc}) ds \dots\dots\dots (14)$$

(ii) Γ 円上において $\rho=\rho_0$ なるから、このときの ζ を σ_0 として $\sigma_0=\rho_0e^{i\theta}$ となる。 $\rho_0 < 1$

$$\varphi_c(\sigma_0) + \frac{w(\sigma_0)}{\bar{w}'(\bar{\sigma}_0)}\bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}_0) + \bar{\psi}_c(\bar{\sigma}_0) = f_{1c_0} + if_{2c_0} \dots\dots\dots (13'')$$

$$\text{ただし } f_{1c_0} + if_{2c_0} = i \int (\tau_{x_0} + i\tau_{y_0}) ds \dots\dots\dots (14'')$$

第二種境界値問題として境界 C 上の変位に関しては (7) 式より r 円上において

$$\kappa_c\varphi_c(\sigma) - \frac{w(\sigma)}{\bar{w}'(\bar{\sigma})}\bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}) - \bar{\psi}_c(\bar{\sigma}) = 2\mu_c(g_{1c} + ig_{2c}) \dots\dots\dots (15)$$

$$\text{ただし } 2\mu_c(g_{1c} + ig_{2c}) = 2\mu_c(u_c + iv_c) \dots\dots\dots (16)$$

(2) 地山部の stress 及び displacement

$$\begin{aligned} \varphi_g &= \varphi_{1g}[w(\zeta)] = \varphi_{1g}(z) & \psi_g(\zeta) &= \psi_{1g}[w(\zeta)] = \psi_{1g}(z) \\ \Phi_g &= \frac{\varphi_g'(\zeta)}{w'(\zeta)} & \Psi_g(\zeta) &= \frac{\psi_g'(\zeta)}{w'(\zeta)} & V_g(\zeta) &= V_{1g}[w(\zeta)] = V_{1g}(z) \end{aligned}$$

として、また (1) における諸記号の添字 c の代りに g を用いて地山部のものを表わすとすれば、

$$\tau_{\rho\rho g} + \tau_{\theta\theta g} = 2[\Phi_g(\zeta) + \bar{\Phi}_g(\bar{\zeta})] + 2V_g(\zeta) \dots\dots\dots (10')$$

$$\tau_{\theta\theta g} - \tau_{\rho\rho g} + 2i\tau_{\rho\theta g} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2\bar{w}'(\bar{\zeta})} [\bar{w}(\bar{\zeta})\Phi_g'(\zeta) + w'(\zeta)\Psi_g(\zeta)] \dots\dots\dots (11')$$

また $r_g(\zeta) = r_{1g}[w(\zeta)] = r_{1g}(z)$ として

$$2\mu_g(u_g + iv_g) = \kappa_g\varphi_g(\zeta) - \frac{w(\zeta)}{\bar{w}'(\bar{\zeta})}\bar{\varphi}_g'(\bar{\zeta}) - \bar{\psi}_g(\bar{\zeta}) + 2(\kappa_g - 1)r_g(\zeta) \dots\dots\dots (12')$$

第一種境界値問題として境界 C 上の応力に関しては (4') 式より r 円上において

$$\varphi_g(\sigma) + \frac{w(\sigma)}{\bar{w}'(\bar{\sigma})}\bar{\varphi}_g'(\bar{\sigma}) + \bar{\psi}_g(\bar{\sigma}) = f_{1g} + if_{2g} \dots\dots\dots (13')$$

$$\text{ただし } f_{1g} + if_{2g} = i \int (\tau_{xg} + i\tau_{yg}) ds - \int V_{1g}(z) dz \dots\dots\dots (14')$$

第二種境界値問題としては境界 C 上の変位に関しては (7') 式より r 円上において

$$\kappa_g\varphi_g(\sigma) - \frac{w(\sigma)}{\bar{w}'(\bar{\sigma})}\bar{\varphi}_g'(\bar{\sigma}) - \bar{\psi}_g(\bar{\sigma}) = 2\mu_g(g_{1g} + ig_{2g}) \dots\dots\dots (15')$$

$$\text{ただし } 2\mu_g(g_{1g} + ig_{2g}) = 2\mu_g(u_g + iv_g) - 2(\kappa_g - 1)r_{1g} \dots\dots\dots (16')$$

図-2 に示すごとく z 平面の楕円を ζ 平面に写像するには (9) 式の形として次式を採用すればよい。

$$z = w(\zeta) = K\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \dots\dots\dots (17)$$

しからば C なる楕円が z 平面の単位円 r に写像される故

$$z = w(\sigma) = K\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right) \dots\dots\dots (18)$$

ただし $-1 < m < 0$ とする。(17) 式において $m=0$ のときは z 平面の円が ζ 平面の円に写像される。

(5') 式より r 円上においては

$$V_g(\sigma) = V_{1g}(z) = -\frac{1}{2}iw_gK(1-m)\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right) \dots\dots\dots (19)$$

(8') 式より r 円上においては

$$r_g(\sigma) = r_{1g}(z) = -\frac{1}{8} i w_g K^2 \left(\sigma + \frac{m}{\sigma} \right)^2 \dots\dots\dots (20)$$

(14') 式の右辺第二項の計算は r 円上においては

$$-\int V_{1g}(z) dz = \frac{1}{2} i w_g K^2 (1-m) \left[\frac{\sigma^2}{2} - (1+m) \log \sigma - \frac{m}{2\sigma^2} \right] \dots\dots\dots (21)$$

4. 解析関数の形

(1) コンクリート巻立部における解析関数 巻立部の弾性体の占める領域は図-2 において C なる周辺の内側で C_0 なる周辺の外側となつているから、この領域の解析関数は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_c(\zeta) &= A \log \zeta + \varphi_{c_1}^0(\zeta) + \varphi_{c_2}^0(\zeta) & \psi_c(\zeta) &= B \log \zeta + \psi_{c_1}^0(\zeta) + \psi_{c_2}^0(\zeta) \\ \varphi_{c_1}^0(\zeta) &= \frac{\alpha_{1c_1} + i \beta_{1c_1}}{\zeta} + \frac{\alpha_{2c_1} + i \beta_{2c_1}}{\zeta^2} + \dots\dots\dots \\ \varphi_{c_2}^0(\zeta) &= (\alpha_{1c_2} + i \beta_{1c_2}) \zeta + (\alpha_{2c_2} + i \beta_{2c_2}) \zeta^2 + \dots\dots\dots \\ \psi_{c_1}^0(\zeta) &= \alpha'_{1c_1} + i \beta'_{1c_1} + \frac{\alpha'_{2c_1} + i \beta'_{2c_1}}{\zeta} + \frac{\alpha'_{2c_1} + i \beta'_{2c_1}}{\zeta^2} + \dots\dots\dots \\ \psi_{c_2}^0(\zeta) &= (\alpha'_{1c_2} + i \beta'_{1c_2}) \zeta + (\alpha'_{2c_2} + i \beta'_{2c_2}) \zeta^2 + \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ただし A, B は複素数の常数であり、 $\alpha_{nc_1}, \beta_{nc_1}; \alpha_{nc_2}, \beta_{nc_2}; \alpha'_{nc_1}, \beta'_{nc_1}; \alpha'_{nc_2}, \beta'_{nc_2}$ は実数の常数である。

(2) 地山部における解析関数 地山は図-2 において C なる周辺の外部に無限に拡がっていて、 $z = \infty$ なる無限遠で一定の応力をうけているから、この領域の解析関数は楕円 C の外部が単位円の外部 $|z| \geq 1$ に写像されている。この地山部の解析関数は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_g(\zeta) &= B_g K \zeta - \frac{X_g + i Y_g}{2\pi(\kappa_g + 1)} \log \zeta + \varphi_g^0(\zeta) \\ \psi_g(\zeta) &= (B'_g + i C'_g) K \zeta + \frac{\kappa_g(X_g - i Y_g)}{2\pi(\kappa_g + 1)} \log \zeta + \psi_g^0(\zeta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22')$$

ただし B_g, B'_g, C'_g は常数であり、(22') 式の右辺第一項は初期応力により決定されるべきものであり、 X_g, Y_g は図-2 の C 周辺上に作用する外力の合力で、この場合コンクリート巻立の自重を無視できるときは、右辺第二項はトンネルを穿つたために起る C 内の土の排除による非平衡力によつて決定されるべきものである。 $\varphi_g^0(\zeta), \psi_g^0(\zeta)$ は (25) 式に示すごとく補正解析関数である。

トンネルの中心におけるトンネル掘削前の初期応力として、その鉛直方向の最大主応力を σ_1 、水平方向の最小主応力を σ_2 とすれば d : 水平地表面よりトンネル中心までの深さ として、(5') 式より

$$V_{1g} = (w_g y)_{y=d} = w_g d$$

この x 方向、 y 方向の成分はそれぞれ $-V_{1g} \frac{dy}{ds} = 0, V_{1g} \frac{dx}{ds} = -w_g d$ 第2式は負となるのは ds の符号は境界方向に進むとき、法線の正方向は右側にあるようにきめるからである。 m_g : 地山におけるポア界を正のツッン数とすれば $z = \infty$ において

$$\sigma_1 = -w_g d \quad \sigma_2 = -\frac{w_g d}{m_g - 1}$$

α : σ_1 の方向と OX -軸との間の角 とすれば $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\left. \begin{aligned} B_g &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4} = -\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} & B'_g &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = -\frac{w_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} \\ C'_g &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = 0 \\ X_g + i Y_g &= -i [f_{1g} + i f_{2g}]_A^A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ただしこの括弧は周辺 C または単位円 r に沿つて時計周りの方向に一巡したときの増加を示している。巻立部の自重は無視しているときには、(14') 式を上式に代入して物体力は (21) 式の量だけ $f_{1g} + i f_{2g}$ に contribute するから

$$X_g + i Y_g = -i \left[-\int V_{1g}(\sigma) w'(\sigma) d\sigma \right]_A^A = i \pi w_g K^2 (1-m^2) \dots\dots\dots (24)$$

ここに $\pi K^2 (1-m^2)$ は C なる楕円で囲まれた面積である。

(24) 式は結局トンネル掘削による土の重量減少によるものである。深さ d が大なるときには周辺 C の外側の全

領域において $\varphi^0(\zeta), \psi^0(\zeta)$ は正則な函数であつて $|\zeta|$ の十分大きい値で次の形で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_g^0(\zeta) &= \frac{\alpha_{1g} + i\beta_{1g}}{\zeta} + \frac{\alpha_{2g} + i\beta_{2g}}{\zeta^2} + \dots \\ \psi_g^0(\zeta) &= \alpha_{0g}' + i\beta_{0g}' + \frac{\alpha_{1g}' + i\beta_{1g}'}{\zeta} + \frac{\alpha_{2g}' + i\beta_{2g}'}{\zeta^2} + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

ただし $\alpha_{ng}, \beta_{ng}; \alpha_{ng}', \beta_{ng}'$ は実数の常数である。

(23), (24) 式を (22') 式に代入して

$$\left. \begin{aligned} \varphi_g(\zeta) &= -\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \zeta - \frac{i w_g K^2 (1 - m^2)}{2(\kappa_g + 1)} \log \zeta + \varphi_g^0(\zeta) \\ \psi_g(\zeta) &= -\frac{w_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \zeta - \frac{i \kappa_g w_g K^2 (1 - m^2)}{2(\kappa_g + 1)} \log \zeta + \psi_g^0(\zeta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

(26) 式を (15') 式に代入して (16') 式を利用する。r 円上においての u_g, v_g をそれぞれ $u_{g\tau}, v_{g\tau}$ とすれば

$$\begin{aligned} u_{g\tau} + i v_{g\tau} &= -\frac{w_g d m_g}{8 \mu_g (m_g - 1)} K \kappa_g \sigma + \frac{\kappa_g}{2 \mu_g} \varphi_g^0(\sigma) - \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma^2 + m}{1 - m^2} \left[-\frac{w_g d m_g}{8 \mu_g (m_g - 1)} K \right. \\ &\quad \left. + \frac{i w_g K^2}{4 \mu_g (\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \sigma + \frac{1}{2 \mu_g} \bar{\varphi}_g^0(\bar{\sigma}) \right] + \frac{w_g d}{4 \mu_g} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \frac{1}{\sigma} \\ &\quad - \frac{1}{2 \mu_g} \bar{\psi}_g^0(\bar{\sigma}) - \frac{i w_g K^2}{8 \mu_g} (\kappa_g - 1) \left(\sigma^2 + 2m + \frac{m^2}{\sigma^2} \right) \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

(27) 式の共軛な形を作つて

$$\begin{aligned} u_{g\tau} - i v_{g\tau} &= -\frac{w_g d m_g}{8 \mu_g (m_g - 1)} K \kappa_g \frac{1}{\sigma} + \frac{\kappa_g}{2 \mu_g} \bar{\varphi}_g^0(\bar{\sigma}) - \sigma \frac{1 + m^2}{\sigma^2 - m} \left[-\frac{w_g d m_g}{8 \mu_g (m_g - 1)} K \right. \\ &\quad \left. - \frac{i w_g K^2}{4 \mu_g (\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2 \mu_g} \varphi_g^0(\sigma) \right] + \frac{w_g d}{4 \mu_g} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \sigma \\ &\quad - \frac{1}{2 \mu_g} \psi_g^0(\sigma) + \frac{i w_g K^2}{8 \mu_g} (\kappa_g - 1) \left(\frac{1}{\sigma^2} + 2m + m^2 \sigma^2 \right) \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

また (26) 式を (13') 式に代入して (14') 式を利用する。r 円上における τ_{xg}, τ_{yg} を $\tau_{xg\tau}, \tau_{yg\tau}$ とすれば

$$\begin{aligned} i \int (\tau_{xg\tau} + i \tau_{yg\tau}) ds &= -\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \sigma + \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma^2 + m}{1 - m^2} \left[-\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \right. \\ &\quad \left. + \frac{i w_g K^2}{2(\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \sigma + \bar{\varphi}_g^0(\bar{\sigma}) \right] - \frac{w_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \frac{1}{\sigma} + \bar{\psi}_g^0(\bar{\sigma}) \\ &\quad - \frac{i w_g K^2}{4} (1 - m) \left[\sigma^2 - \frac{m}{\sigma^2} \right] \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

(29) 式の共軛な形を作ると

$$\begin{aligned} -i \int (\tau_{xg\tau} - i \tau_{yg\tau}) ds &= -\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \frac{1}{\sigma} + \bar{\varphi}_g^0(\bar{\sigma}) + \sigma \frac{1 + m^2}{\sigma^2 - m} \left[-\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \right. \\ &\quad \left. - \frac{i w_g K^2}{2(\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \frac{1}{\sigma} + \varphi_g^0(\sigma) \right] - \frac{w_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \sigma + \psi_g^0(\sigma) \\ &\quad + \frac{i w_g K^2}{4} (1 - m) \left[\frac{1}{\sigma^2} - m \sigma^2 \right] \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

5. 境界条件

巻立部及び地山部のそれぞれの応力及び変位に楕円孔付近の境の条件を入れて、解析函数に含まれる常数を決定する。巻立部と地山部との接触面において相互のずれがないとして境界条件は次のようになる。

(1) r 円上における第二種境界値問題 巻立部における単位円 r 上の変位 u_c, v_c をそれぞれ $u_{c\tau}, v_{c\tau}$ とすれば $u_{c\tau} = u_{g\tau}, v_{c\tau} = v_{g\tau}$ なるから (15), (16) 式より

$$\left. \begin{aligned} \kappa_c \varphi_c(\sigma) - \frac{w(\sigma)}{\bar{w}'(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}) - \bar{\psi}_c(\bar{\sigma}) &= 2 \mu_c (u_{g\tau} + i v_{g\tau}) \\ \kappa_c \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) - \frac{\bar{w}(\bar{\sigma})}{w'(\sigma)} \varphi_c'(\sigma) - \psi_c(\sigma) &= 2 \mu_c (u_{g\tau} - i v_{g\tau}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

この式の共軛形をとつて

(2) r 円上における第一種境界値問題 巻立部における単位円 r 上の応力 τ_{xc}, τ_{yc} をそれぞれ $\tau_{xc\tau}, \tau_{yc\tau}$ とすれば $\tau_{xc\tau} = \tau_{xg\tau}, \tau_{yc\tau} = \tau_{yg\tau}$ であるから (13), (14) 式より

$$\left. \begin{aligned} \varphi_c(\sigma) + \frac{w(\sigma)}{w'(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}) + \bar{\psi}_c(\bar{\sigma}) &= i \int (\tau_{x\theta\tau} + i \tau_{y\theta\tau}) ds \\ \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) + \frac{\bar{w}(\bar{\sigma})}{w'(\sigma)} \varphi_c'(\sigma) + \psi_c(\sigma) &= -i \int (\tau_{x\theta\tau} - i \tau_{y\theta\tau}) ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

この式の共軛な形をとつて

(3) Γ 円上における第一種境界値問題 (13''), (14'') 式において x 方向, y 方向の応力はそれぞれ 0 となる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xc_0} = 0 \quad \tau_{yc_0} = 0 \\ \varphi_c(\sigma_0) + \frac{w(\sigma_0)}{w'(\bar{\sigma}_0)} \bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}_0) + \bar{\psi}_c(\bar{\sigma}_0) &= 0 \\ \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}_0) + \frac{\bar{w}(\bar{\sigma}_0)}{w'(\sigma_0)} \varphi_c'(\sigma_0) + \psi_c(\sigma_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

この式の共軛形をとつて

以上の境界条件の外に y 軸に関して $\tau_{\rho\rho c}, \tau_{\theta\theta c}$ が対称的に分布しているから次の式が成立する。

$$(\tau_{\rho\rho c} + \tau_{\theta\theta c})_{\theta = \theta_0} = (\tau_{\rho\rho c} + \tau_{\theta\theta c})_{\theta = \pi - \theta_0} \dots\dots\dots (34)$$

(31) 式の第一式に (27) 式を代入して

$$\begin{aligned} \kappa_c \varphi_c(\sigma) - \frac{w(\sigma)}{w'(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}) - \bar{\psi}_c(\bar{\sigma}) &= -\frac{\mu_c w_g d m_g}{4 \mu_g (m_g - 1)} K \kappa_g \sigma + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g} \varphi_{g^0}(\sigma) \\ &- \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma^2 + m}{1 - m^2} \left[-\frac{\mu_c w_g d m_g}{4 \mu_g (m_g - 1)} K + \frac{i \mu_c w_g K^2}{2 \mu_g (\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \sigma + \frac{\mu_c}{\mu_g} \bar{\varphi}_{g^0}'(\bar{\sigma}) \right] \\ &+ \frac{\mu_c w_g d}{2 \mu_g} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \frac{1}{\sigma} - \frac{\mu_c}{\mu_g} \bar{\psi}_{g^0}(\bar{\sigma}) - \frac{i \mu_c w_g K^2}{4 \mu_g} (\kappa_g - 1) \left(\sigma^2 + 2m + \frac{m^2}{\sigma^2} \right) \dots\dots (35) \end{aligned}$$

(31) 式の第二式に (28) 式を代入して

$$\begin{aligned} \kappa_c \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) - \frac{\bar{w}(\bar{\sigma})}{w'(\sigma)} \varphi_c'(\sigma) - \psi_c(\sigma) &= -\frac{\mu_c w_g d m_g}{4 \mu_g (m_g - 1)} K \kappa_g \frac{1}{\sigma} + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g} \bar{\varphi}_{g^0}(\bar{\sigma}) \\ &- \sigma \frac{1 + m}{\sigma^2 - m} \left[-\frac{\mu_c w_g d m_g}{4 \mu_g (m_g - 1)} K - \frac{i \mu_c w_g K^2}{2 \mu_g (\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \frac{1}{\sigma} + \frac{\mu_c}{\mu_g} \varphi_{g^0}'(\sigma) \right] \\ &+ \frac{\mu_c w_g d}{2 \mu_g} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \sigma - \frac{\mu_c}{\mu_g} \psi_{g^0}(\sigma) + \frac{i \mu_c w_g K^2}{4 \mu_g} (\kappa_g - 1) \left(\frac{1}{\sigma^2} + 2m + m^2 \sigma^2 \right) \dots (36) \end{aligned}$$

(32) 式の第一式に (29) 式を代入して

$$\begin{aligned} \varphi_c(\sigma) + \frac{w(\sigma)}{w'(\bar{\sigma})} \bar{\varphi}_c'(\bar{\sigma}) + \bar{\psi}_c(\bar{\sigma}) &= -\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \sigma + \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma^2 + m}{1 - m^2} \left[-\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \right. \\ &+ \left. \frac{i w_g K^2}{2(\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \sigma + \bar{\varphi}_{g^0}'(\bar{\sigma}) \right] - \frac{w_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \frac{1}{\sigma} + \bar{\psi}_{g^0}(\bar{\sigma}) \\ &- \frac{1}{2} i w_g K^2 (1 - m) \left[\frac{\sigma^2}{2} - \frac{m}{2\sigma^2} \right] \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

(32) 式の第二式に (30) 式を代入して

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_c(\bar{\sigma}) + \frac{\bar{w}(\bar{\sigma})}{w'(\sigma)} \varphi_c'(\sigma) + \psi_c(\sigma) &= -\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \frac{1}{\sigma} + \bar{\varphi}_{g^0}(\bar{\sigma}) + \sigma \frac{1 + m}{\sigma^2 - m} \left[-\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \right. \\ &- \left. \frac{i w_g K^2}{2(\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \frac{1}{\sigma} + \varphi_{g^0}'(\sigma) \right] - \frac{w_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \sigma + \psi_{g^0}(\sigma) \\ &+ \frac{1}{2} i w_g K^2 (1 - m) \left[\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{m}{2} \sigma^2 \right] \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

(35) + (37) より

$$\begin{aligned} (\kappa_c + 1) \varphi_c(\sigma) &= -\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c}{\mu_g} \kappa_g \right) \frac{1}{\sigma} + \left(1 + \frac{\mu_c}{\mu_g} \kappa_g \right) \varphi_{g^0}(\sigma) \\ &+ \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma^2 + m}{1 - m^2} \left[-\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K + \frac{i w_g K^2}{2(\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \sigma + \bar{\varphi}_{g^0}'(\bar{\sigma}) \right] \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \\ &- \frac{w_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \frac{1}{\sigma} + \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \bar{\psi}_{g^0}(\bar{\sigma}) - \frac{i \mu_c w_g K^2}{4 \mu_g} (\kappa_g - 1) \left(\sigma^2 + 2m + \frac{m^2}{\sigma^2} \right) \\ &- \frac{1}{2} i w_g K^2 (1 - m) \left[\frac{\sigma^2}{2} - \frac{m}{2\sigma^2} \right] \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

(36) + (38) より

$$\begin{aligned}
 (\kappa_c + 1)\bar{\varphi}_c(\sigma) = & -\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c}{\mu_g} \kappa_g\right) \frac{1}{\sigma} + \left(1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g}\right) \bar{\varphi}_g^0(\sigma) \\
 & + \sigma \frac{1 + m}{\sigma^2 - m} \left[-\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K - \frac{i w_g K^2}{2(\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \frac{1}{\sigma} + \varphi_g^{0'}(\sigma) \right] \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \\
 & - \frac{w_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \sigma + \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \psi_g^0(\sigma) \\
 & + \frac{i \mu_c w_g K^2}{4 \mu_g} (\kappa_g - 1) \left(\frac{1}{\sigma^2} + 2m + m^2 \sigma^2\right) + \frac{1}{2} i w_g K^2 (1 - m) \left[\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{m}{2} \sigma^2\right] \dots \dots \dots (40)
 \end{aligned}$$

6. 解析函数の中の未定の常数を決定すること

(1) (34) 式の適用 (10) 式より

$$\begin{aligned}
 (\tau_{\rho\rho c} + \tau_{\theta\theta c})_{\theta = \theta_0} &= 2[\Phi_c(\zeta) + \bar{\Phi}_c(\bar{\zeta})]_{\theta = \theta_0} \\
 (\tau_{\rho\rho c} + \tau_{\theta\theta c})_{\theta = \pi - \theta_0} &= 2[\Phi_c(\zeta) + \bar{\Phi}_c(\bar{\zeta})]_{\theta = \pi - \theta_0} = 2[\Phi_c(-\bar{\zeta}) + \bar{\Phi}_c(-\zeta)]_{\theta = \theta_0}
 \end{aligned}$$

$\bar{\zeta} = -\frac{\rho^2}{\zeta}$ $\zeta_{\theta = \pi - \theta_0} = -\bar{\zeta}_{\theta = \theta_0}$ $\bar{\zeta}_{\theta = \pi - \theta_0} = -\zeta_{\theta = \theta_0}$ なることに注目して次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \Phi_c(\zeta)_{\theta = \theta_0} &= \left[\frac{1}{K \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)} \left\{ A \frac{1}{\zeta} - \frac{\alpha_{1c_1} + i \beta_{1c_1}}{\zeta^2} - 2 \frac{\alpha_{2c_1} + i \beta_{2c_1}}{\zeta^3} - \dots \dots \dots + (\alpha_{1c_2} + i \beta_{1c_2}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2(\alpha_{2c_2} + i \beta_{2c_2})\zeta + 3(\alpha_{3c_2} + i \beta_{3c_2})\zeta^2 + \dots \dots \dots \right\} \right]_{\theta = \theta_0} \\
 \bar{\Phi}_c(\bar{\zeta})_{\theta = \theta_0} &= \left[\frac{1}{K \left(1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}\right)} \left\{ A \frac{1}{\bar{\zeta}} - \frac{\alpha_{1c_1} - i \beta_{1c_1}}{\bar{\zeta}^2} - 2 \frac{\alpha_{2c_1} - i \beta_{2c_1}}{\bar{\zeta}^3} - \dots \dots \dots + (\alpha_{1c_2} - i \beta_{1c_2}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2(\alpha_{2c_2} - i \beta_{2c_2})\bar{\zeta} + 3(\alpha_{3c_2} - i \beta_{3c_2})\bar{\zeta}^2 + \dots \dots \dots \right\} \right]_{\theta = \theta_0} \\
 \Phi_c(\zeta)_{\theta = \pi - \theta_0} &= \left[\frac{1}{K \left(1 - \frac{m}{\zeta^2}\right)} \left\{ -\frac{A}{\zeta} - \frac{\alpha_{1c_1} + i \beta_{1c_1}}{\zeta^2} + 2 \frac{\alpha_{2c_1} + i \beta_{2c_1}}{\zeta^3} - \dots \dots \dots + (\alpha_{1c_2} + i \beta_{1c_2}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 2(\alpha_{2c_2} + i \beta_{2c_2})\zeta + 3(\alpha_{3c_2} + i \beta_{3c_2})\zeta^2 - \dots \dots \dots \right\} \right]_{\theta = \theta_0} \\
 \Phi_c(\bar{\zeta})_{\theta = \pi - \theta_0} &= \left[\frac{1}{K \left(1 - \frac{m}{\bar{\zeta}^2}\right)} \left\{ -\frac{A}{\bar{\zeta}} - \frac{\alpha_{1c_1} - i \beta_{1c_1}}{\bar{\zeta}^2} + 2 \frac{\alpha_{2c_1} - i \beta_{2c_1}}{\bar{\zeta}^3} - \dots \dots \dots \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (\alpha_{1c_2} - i \beta_{1c_2}) - 2(\alpha_{2c_2} - i \beta_{2c_2})\bar{\zeta} + 3(\alpha_{3c_2} - i \beta_{3c_2})\bar{\zeta}^2 - \dots \dots \dots \right\} \right]_{\theta = \theta_0}
 \end{aligned}$$

(34) 式より $[\Phi_c(\zeta) + \bar{\Phi}_c(\bar{\zeta})]_{\theta = \theta_0} = [\Phi_c(\zeta) + \bar{\Phi}_c(\bar{\zeta})]_{\theta = \pi - \theta_0}$

係数間の比較により

$$\left. \begin{aligned}
 A = 0, \quad \beta_{1c_1} = 0, \quad \alpha_{2c_1} = 0, \quad \beta_{3c_1} = 0, \quad \alpha_{4c_1} = 0, \quad \dots \dots \dots \\
 \beta_{1c_2} = 0, \quad \alpha_{2c_2} = 0, \quad \beta_{3c_2} = 0, \quad \alpha_{4c_2} = 0, \quad \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (41)$$

ゆえに (22) 式より

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_{c_1}^0(\zeta) &= \frac{\alpha_{1c_1}}{\zeta} + \frac{i \beta_{2c_1}}{\zeta^2} + \frac{\alpha_{3c_1}}{\zeta^3} + \frac{i \beta_{4c_1}}{\zeta^4} + \dots \dots \dots \\
 \varphi_{c_2}^0(\zeta) &= \alpha_{1c_2} \zeta + i \beta_{2c_2} \zeta^2 + \alpha_{3c_2} \zeta^3 + i \beta_{4c_2} \zeta^4 + \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

(35) 式または (36) 式の係数間の比較をなして、これらの式の右辺には $\log \sigma$ を含む項がないから (22) 式の $\psi_c(\zeta)$ の解析函数において $B = 0$ となる。

次に (27) 式を参照して (15') 式より

$$\begin{aligned}
 u_g + i v_g = & -\frac{w_g d m_g}{8 \mu_g (m_g - 1)} K \kappa_g \zeta + \frac{\kappa_g}{2 \mu_g} \varphi_g^0(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta^2 + m}{1 - m \zeta^2} \left[-\frac{w_g d m_g}{8 \mu_g (m_g - 1)} K \right. \\
 & \left. + \frac{i w_g K^2}{4 \mu_g (\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \zeta + \frac{1}{2 \mu_g} \bar{\varphi}_g^{0'}(\bar{\zeta}) \right] + \frac{w_g d}{4 \mu_g} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{2 \mu_g} \bar{\psi}_g^0(\bar{\zeta}) \\
 & - \frac{i w_g K^2}{8 \mu_g} (\kappa_g - 1) \left(\zeta^2 + 2m + \frac{m^2}{\zeta^2} \right)
 \end{aligned}$$

この式の共軛な形をとつて

$$u_\theta - iv_\theta = -\frac{w_g d m_g}{8 \mu_g (m_g - 1)} K \kappa_g \frac{\rho^2}{\zeta} + \frac{\kappa_g}{2 \mu_g} \bar{\varphi}_g^0(\zeta) - \left(\frac{\zeta}{\rho^2} \right) \frac{\rho^4 + m \zeta^2}{\zeta^2 - m \rho^4} \left[-\frac{w_g d m_g}{8 \mu_g (m_g - 1)} K \right. \\ \left. - \frac{i w_g K^2}{4 \mu_g (\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \frac{\rho^2}{\zeta} + \frac{1}{2 \mu_g} \varphi_g^{0'}(\zeta) \right] + \frac{w_g d}{4 \mu_g} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \frac{\zeta}{\rho^2} \\ - \frac{1}{2 \mu_g} \psi_g^0(\zeta) + \frac{i w_g K^2}{8 \mu_g} (\kappa_g - 1) \left(\frac{\rho^4}{\zeta^2} + 2m + \frac{m^2 \zeta^2}{\rho^4} \right)$$

$|\zeta| = \infty$ において $u_\theta = 0, v_\theta = 0$ となるべきであるから上式より

$$\varphi_g^0(\zeta) = \frac{\alpha_{1g} + i \beta_{1g}}{\zeta} + \frac{\alpha_{2g} + i \beta_{2g}}{\zeta^2} \dots \dots \dots (43)$$

この $\varphi_g^0(\zeta)$ を $u_\theta + iv_\theta$ の式に代入し、 $|\zeta| = \infty$ において $u_\theta = 0, v_\theta = 0$ となることより

$$\psi_g^0(\zeta) = \alpha_{0g}' + i \beta_{0g}' + \frac{\alpha_{1g}' + i \beta_{1g}'}{\zeta} + \frac{\alpha_{2g}' + i \beta_{2g}'}{\zeta^2} \dots \dots \dots (44)$$

(2) (39) 式の両辺に $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ を乗じて単位円 r の周りに沿い積分する。すなわち Cauchy の積分を行う。この方法は Muschelisvili¹⁾ の方法による。 ζ を r の外部の点として

$$(\kappa_c + 1) \left\{ -\frac{\alpha_{1c_1}}{\zeta} - \frac{i \beta_{2c_1}}{\zeta^2} - \frac{\alpha_{3c_1}}{\zeta^3} - \frac{i \beta_{4c_1}}{\zeta^4} - \dots \dots \dots \right\} = - \left(1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g} \right) \left\{ \frac{\alpha_{1g} + i \beta_{1g}}{\zeta} \right. \\ \left. + \frac{\alpha_{2g} + i \beta_{2g}}{\zeta^2} \right\} + \left\{ \frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) m + \frac{w_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \right\} \frac{1}{\zeta} \\ + i \left\{ \frac{\mu_c w_g K^2}{4 \mu_g} (\kappa_g - 1) m^2 - \frac{1}{2} w_g K^2 (1 - m) \frac{m}{2} \right\} \frac{1}{\zeta^2}$$

両辺の係数間の比較を実部虚部にわけて行えば

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\zeta} \text{ の実部の係数: } & -(\kappa_c + 1) \alpha_{1c_1} = - \left(1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g} \right) \alpha_{1g} + \left\{ \frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) m \right. \\ & \left. + \frac{w_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \right\} \dots \dots \dots (i) \\ \frac{1}{\zeta} \text{ の虚部の係数: } & \beta_{1g} = 0 \\ \frac{1}{\zeta^2} \text{ の実部の係数: } & \alpha_{2g} = 0 \\ \frac{1}{\zeta^2} \text{ の虚部の係数: } & -(\kappa_c + 1) \beta_{2c_1} = - \left(1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g} \right) \beta_{2g} + \left\{ \frac{\mu_c w_g K^2}{4 \mu_g} (\kappa_g - 1) m^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} w_g K^2 (1 - m) \frac{m}{2} \right\} \dots \dots \dots (ii) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

$$\alpha_{3c_1} = 0, \quad \beta_{4c_1} = 0, \quad \alpha_{5c_1} = 0, \quad \beta_{6c_1} = 0, \quad \dots \dots \dots$$

(3) (39) 式の両辺に $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ を乗じて単位円 r の周りに沿い積分する。 ζ を r の内部の点として

$$(\kappa_c + 1) [\alpha_{1c_2} \zeta + i \beta_{2c_2} \zeta^2 + \alpha_{3c_2} \zeta^3 + i \beta_{4c_2} \zeta^4 + \dots \dots \dots] = -\frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g} \right) \zeta \\ - \frac{w_g d m_g}{4(m_g - 1)} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \left(\frac{1}{\zeta} \frac{\zeta^2 + m}{1 - m \zeta^2} - \frac{m}{\zeta} \right) + \frac{i w_g K^2}{2(\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \frac{\zeta^2 + m}{1 - m \zeta^2} \\ + \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \frac{1}{\zeta} \frac{\zeta^2 + m}{1 - m \zeta^2} \bar{\varphi}_g^{0'} \left(\frac{1}{\zeta} \right) + \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \bar{\psi}_g^0 \left(\frac{1}{\zeta} \right) \\ - \frac{i \mu_c w_g K^2}{4 \mu_g} (\kappa_g - 1) (\zeta^2 + 2m) - \frac{1}{4} i w_g K^2 (1 - m) \zeta^2 \dots \dots \dots (46)$$

上式を通分して係数間の比較をする。このとき (43), (44) 式と (50) 式とより

$$\varphi_g^0(\zeta) = \frac{\alpha_{1g}}{\zeta} + i \frac{\beta_{2g}}{\zeta^2} \quad \psi_g^0(\zeta) = \alpha_{0g}' + i \beta_{0g}' + \frac{\alpha_{1g}' + i \beta_{1g}'}{\zeta} + \frac{\alpha_{2g}' + i \beta_{2g}'}{\zeta^2} \dots \dots \dots (47)$$

なることを考慮して

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{c_2}^0(\zeta) &= \alpha_{1c_2} \zeta + i \beta_{2c_2} \zeta^2 \\ \text{また (45) 式より} \quad \varphi_{c_1}^0(\zeta) &= \frac{\alpha_{1c_1}}{\zeta} + \frac{i \beta_{2c_1}}{\zeta^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (48)$$

(4) (33) 式の第一式より

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha_{1c_1}}{\sigma_0} + \frac{i\beta_{2c_1}}{\sigma_0^2} \right) + (\alpha_{1c_2}\sigma_0 + i\beta_{2c_2}\sigma_0^2) + \frac{1}{\sigma_0} \frac{\sigma_0^2 + m}{1 - \frac{m}{\rho_0^4}\sigma_0^2} \left[\left(-\frac{\alpha_{1c_1}\sigma_0^2}{\rho_0^4} + \frac{2i\beta_{2c_1}\sigma_0^3}{\rho_0^6} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\alpha_{1c_2} - 2i\beta_{2c_2} \frac{\rho_0^2}{\sigma_0} \right) \right] + \left\{ (\alpha_{0c_1}' - i\beta_{0c_1}') + (\alpha_{1c_1}' - i\beta_{1c_1}') \frac{\sigma_0}{\rho_0^2} \right. \\ & \quad \left. + (\alpha_{2c_1}' - i\beta_{2c_1}') \frac{\sigma_0^2}{\rho_0^4} + \dots \right\} + \left\{ (\alpha_{1c_2}' - i\beta_{1c_2}') \frac{\rho_0^2}{\sigma_0} \right. \\ & \quad \left. + (\alpha_{2c_2}' - i\beta_{2c_2}') \frac{\rho_0^4}{\sigma^2} + \dots \right\} = 0 \end{aligned}$$

上式の両辺に $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma_0}{\sigma_0 - \zeta}$ を乗じて Γ 円の周りに積分する。 ζ を Γ の外部の点として

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\alpha_{1c_1}}{\zeta} - \frac{i\beta_{2c_1}}{\zeta^2} \right) - \alpha_{1c_2} \frac{m}{\zeta} + 2i\beta_{2c_2} \rho_0^2 \frac{m}{\zeta^2} + (\alpha_{1c_2}' - i\beta_{1c_2}') \frac{\rho_0^2}{\zeta} \\ & \quad - (\alpha_{2c_2}' - i\beta_{2c_2}') \frac{\rho_0^4}{\zeta^2} - \dots = 0 \end{aligned}$$

上式において実部と虚部とにわけて係数間の比較をして

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\zeta} \text{ の実部の係数: } & \alpha_{1c_1} + \alpha_{1c_2}m + \alpha_{1c_2}'\rho_0^2 = 0 \dots\dots\dots (i) \\ \frac{1}{\zeta} \text{ の虚部の係数: } & \beta_{1c_2}' = 0 \\ \frac{1}{\zeta^2} \text{ の実部の係数: } & \alpha_{2c_2}' = 0 \\ \frac{1}{\zeta^2} \text{ の虚部の係数: } & -\beta_{2c_1} + 2\beta_{2c_2}\rho_0^2m + \beta_{2c_2}'\rho_0^4 = 0 \dots\dots\dots (ii) \\ & \alpha_{3c_2}' = \alpha_{4c_2}' = \alpha_{5c_2}' = \dots\dots\dots = 0 \\ & \beta_{3c_2}' = \beta_{4c_2}' = \beta_{5c_2}' = \dots\dots\dots = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

∴ $\psi_{c_2}^0(\zeta) = \alpha_{1c_2}'\zeta + i\beta_{2c_2}'\zeta^2 \dots\dots\dots (50)$

(47) 式及び $\varphi_c(\zeta) = \varphi_{c_1}^0(\zeta) + \varphi_{c_2}^0(\zeta)$ 及び $\psi_c(\zeta) = \psi_{c_1}^0(\zeta) + \psi_{c_2}^0(\zeta)$ を (35) 式に代入して係数間の比較をすれば

$$\psi_{c_1}^0(\zeta) = \alpha_{0c_1}' + i\beta_{0c_1}' + \frac{\alpha_{1c_1}' + i\beta_{1c_1}'}{\zeta} + \frac{\alpha_{2c_1}' + i\beta_{2c_1}'}{\zeta^2} \dots\dots\dots (51)$$

(5) (33) 式の第二式より

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_{1c_1} \frac{\sigma_0}{\rho_0^2} - i\beta_{2c_1} \frac{\sigma_0^2}{\rho_0^4} + \alpha_{1c_2} \frac{\rho_0^2}{\sigma_0} - i\beta_{2c_2} \frac{\rho_0^4}{\sigma_0^2} \right) + \sigma_0 \frac{\rho_0^2 + \frac{m}{\rho_0^2}\sigma_0^2}{\sigma_0^2 - m} \left(-\frac{\alpha_{1c_1}}{\sigma_0^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2i\beta_{2c_1}}{\sigma_0^3} + \alpha_{1c_2} + 2i\beta_{2c_2}\sigma_0 \right) + \left(\alpha_{0c_1}' + i\beta_{0c_1}' + \frac{\alpha_{1c_1}' + i\beta_{1c_1}'}{\sigma_0} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\alpha_{2c_1}' + i\beta_{2c_1}'}{\sigma_0^2} \right) + (\alpha_{1c_2}'\sigma_0 + i\beta_{2c_2}'\sigma_0^2) = 0 \end{aligned}$$

上式の両辺に $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma_0}{\sigma_0 - \zeta}$ を乗じて Γ の周りに沿って積分する。 ζ は Γ の外部の点として

$$\begin{aligned} & -\alpha_{1c_2}\rho_0^2\zeta + \alpha_{1c_2}\rho_0^2m \frac{1}{\zeta} + i\beta_{2c_2}\rho_0^4 - i\beta_{2c_2} \frac{m\rho_0^4}{\zeta^2} + \rho_0^2\alpha_{1c_1} \frac{1}{\zeta} + \frac{m}{\rho_0^2}\alpha_{1c_1}\zeta \\ & \quad + 2i\beta_{2c_1}\rho_0^2 \frac{1}{\zeta^2} + 2i\beta_{2c_1} \frac{m}{\rho_0^2} - \left(\rho_0^2 + \frac{m^2}{\rho_0^2} \right) \alpha_{1c_2}\zeta - i \left(\rho_0^2 + \frac{m^2}{\rho_0^2} \right) \cdot 2m\beta_{2c_2} - (\alpha_{1c_1}' + i\beta_{1c_1}')\zeta \\ & \quad - (\alpha_{2c_1}' + i\beta_{2c_1}') + m(\alpha_{1c_1}' + i\beta_{1c_1}') \frac{1}{\zeta} + m(\alpha_{2c_1}' + i\beta_{2c_1}') \frac{1}{\zeta^2} = 0 \end{aligned}$$

上式において実部と虚部とにわけて係数間の比較をして

$$\left. \begin{aligned} \zeta \text{ の実部の係数: } & -\left(2\rho_0^2 + \frac{m^2}{\rho_0^2} \right) \alpha_{1c_2} + \frac{m}{\rho_0^2} \alpha_{1c_1} - \alpha_{1c_1}' = 0 \dots\dots\dots (i) \\ \zeta \text{ の虚部の係数: } & \beta_{1c_1}' = 0 \dots\dots\dots (ii) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \text{絶対項の実部の係数: } \alpha_{2c_1}' = 0 \dots\dots\dots \text{(iii)} \\
& \text{絶対項の虚部の係数: } \left\{ \rho_0^4 - 2 \left(\rho_0^2 + \frac{m^2}{\rho_0^2} \right) m \right\} \beta_{2c_2} + 2 \frac{m}{\rho_0^2} \beta_{2c_1} - \beta_{2c_1}' = 0 \dots\dots\dots \text{(iv)} \\
& \frac{1}{\zeta} \text{ の実部の係数: } \rho_0^2 m \alpha_{1c_2} + \rho_0^2 \alpha_{1c_1} + m \alpha_{1c_1}' = 0 \dots\dots\dots \text{(v)} \\
& \frac{1}{\zeta} \text{ の虚部の係数: } \beta_{1c_1}' = 0 \\
& \frac{1}{\zeta^2} \text{ の実部の係数: } \alpha_{2c_1}' = 0 \\
& \frac{1}{\zeta^2} \text{ の虚部の係数: } -m \rho_0^4 \beta_{2c_2} + 2 \rho_0^2 \beta_{2c_1} + m \beta_{2c_1}' = 0 \dots\dots\dots \text{(vi)} \\
& \text{(i)} \times m + \text{(v)} \text{ より } \alpha_{1c_1} = m \alpha_{1c_2} \dots\dots\dots \text{(vii)} \\
& \text{(iv)} \times m + \text{(vi)} \text{ より } \beta_{2c_1} = m^2 \beta_{2c_2} \dots\dots\dots \text{(viii)}
\end{aligned}
\tag{52}$$

$$\therefore \psi_{c_1}^0(\zeta) = (\alpha_{0c_1}' + i \beta_{0c_1}') + \frac{\alpha_{1c_1}'}{\zeta} + \frac{i \beta_{2c_1}'}{\zeta^2} \dots\dots\dots \text{(53)}$$

(6) 上に求めた解析函数を(46)式に代入して

$$\begin{aligned}
& (\kappa_c + 1) \alpha_{1c_2} \zeta - m (\kappa_c + 1) \alpha_{1c_2} \zeta^3 + (\kappa_c + 1) i \beta_{2c_2} \zeta^2 - m (\kappa_c + 1) i \beta_{2c_2} \zeta^4 \\
& = -\frac{w_g d m g}{4(m_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g} \right) \zeta + \frac{w_g d m g}{4(m_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g} \right) m \zeta^3 \\
& \quad - \frac{w_g d m g}{4(m_g - 1)} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) (1 + m^2) \zeta + \frac{i w_g K^2}{2(\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \zeta^2 \\
& \quad + \frac{i w_g K^2}{2(\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) m + \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) (-\alpha_{1g} \zeta^3 - \alpha_{1g} m \zeta + 2 i \beta_{2g} \zeta^4 + 2 i \beta_{2g} m \zeta^2) \\
& \quad + \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) [(\alpha_{0g}' - i \beta_{0g}') + (\alpha_{1g}' - i \beta_{1g}') \zeta + \{(\alpha_{2g}' - i \beta_{2g}') - m(\alpha_{0g}' - i \beta_{0g}')\} \zeta^2 \\
& \quad - m(\alpha_{1g}' - i \beta_{1g}') \zeta^3 - m(\alpha_{2g}' - i \beta_{2g}') \zeta^4] - \frac{i \mu_c w_g K^2}{4 \mu_g} (\kappa_g - 1) \{ (1 - 2 m^2) \zeta^2 - m \zeta^4 + 2 m \} \\
& \quad - \frac{i w_g K^2}{4} (1 - m) \zeta^2 + \frac{i w_g K^2}{4} (1 - m) m \zeta^4
\end{aligned}$$

上式において実部と虚部とにわけて係数間の比較をなして

$$\begin{aligned}
\zeta^4 \text{ の実部の係数: } \alpha_{2g}' = 0 \dots\dots\dots \text{(i)} \\
\zeta^4 \text{ の虚部の係数: } -m (\kappa_c + 1) \beta_{2c_2} = 2 \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \beta_{2g} + m \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \beta_{2g}' \\
\quad + \frac{\mu_c w_g K^2}{4 \mu_g} (\kappa_g - 1) m + \frac{w_g K^2 (1 - m) m}{4} \dots\dots\dots \text{(ii)} \\
\zeta^3 \text{ の実部の係数: } -m (\kappa_c + 1) \alpha_{1c_2} = \frac{w_g d m g}{4(m_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g} \right) m - \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \alpha_{1g} \\
\quad - m \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \alpha_{1g}' \dots\dots\dots \text{(iii)} \\
\zeta^3 \text{ の虚部の係数: } \beta_{1g}' = 0 \dots\dots\dots \text{(iv)} \\
\zeta^2 \text{ の実部の係数: } \alpha_{2g}' = m \alpha_{0g}' \dots\dots\dots \text{(v)} \\
\zeta^2 \text{ の虚部の係数: } (\kappa_c + 1) \beta_{2c_2} = \frac{w_g K^2}{2(\kappa_g + 1)} (1 - m^2) \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) + 2 m \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \beta_{2g} \\
\quad - \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \beta_{2g}' + m \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \beta_{0g}' - \frac{\mu_c w_g K^2}{4 \mu_g} (\kappa_g - 1) (1 - 2 m^2) \\
\quad - \frac{w_g K^2}{4} (1 - m) \dots\dots\dots \text{(vi)} \\
\zeta \text{ の実部の係数: } (\kappa_c + 1) \alpha_{1c_2} = -\frac{w_g d m g}{4(m_g - 1)} K \left(1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g} \right) - \frac{w_g d m g}{4(m_g - 1)} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) (1 + m^2) \\
\quad - m \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \alpha_{1g} + \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g} \right) \alpha_{1g}' \dots\dots\dots \text{(vii)} \\
\zeta \text{ の虚部の係数: } \beta_{1g}' = 0 \dots\dots\dots \text{(viii)}
\end{aligned}
\tag{54}$$

(iii)+(vii) × m より
$$\alpha_{1g} = -\frac{mw_g dm_g}{4(m_g-1)} K \dots\dots\dots (ix)$$

絶対項の実部の係数: $\alpha_{0g}' = 0$

絶対項の虚部の係数:

$$\beta_{0g}' = \frac{w_g K^2}{2(\kappa_g+1)} (1-m^2)m \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) - \frac{\mu_c w_g K^2}{2\mu_g} (\kappa_g-1)m \dots\dots\dots (x)$$

$$1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}$$

-(iii) × m + (vii) より

$$(\kappa_c+1)\alpha_{1c_2} = -\frac{w_g dm_g}{4(m_g-1)} K \left(1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g}\right) - \frac{w_g dm_g}{4(m_g-1)} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \dots\dots\dots (xi)$$

$$+ \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \alpha_{1g}'$$

(7) (45) 式の (i) 式より

$$\alpha_{1c_1} = \frac{\left(1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g}\right) \alpha_{1g} - \left\{ \frac{w_g dm_g}{4(m_g-1)} K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) m + \frac{w_g d}{2} \left(\frac{m_g-2}{m_g-1}\right) K \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \right\}}{(\kappa+1)} \dots\dots\dots (55)$$

ただし α_{1g} は (54) 式の (ix) 式を用いる。

(52) 式の (vii) 式より
$$\alpha_{1c_2} = \frac{\alpha_{1c_1}}{m} \dots\dots\dots (56)$$

(52) 式の (i) 式より
$$\alpha_{1c_1}' = -\frac{2\rho_0^2}{m} \alpha_{1c_1} \dots\dots\dots (57)$$

(49) 式の (i) 式より
$$\alpha_{1c_2}' = -\frac{2\alpha_{1c_1}}{\rho_0^2} \dots\dots\dots (58)$$

ただし (56) 式より (58) 式までの α_{1c_1} は (55) 式を用いる。

(54) 式の (iii) 式より

$$\alpha_{1g}' = \frac{\frac{w_g dm_g}{4(m_g-1)} K \left(1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g}\right) m - \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \alpha_{1g} + (\kappa_c+1)\alpha_{1c_1}}{m \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right)} \dots\dots\dots (59)$$

ただし α_{1g} は (54) 式の (ix) 式を用い、 α_{1c_1} は (55) 式を用いる。

(54) 式において (ii)+(vi) × m より

$$\beta_{2g} = -\left[\frac{\frac{w_g K^2}{2(\kappa_g+1)} (1-m^2)m + m^2 \beta_{0g}'}{2(1+m^2)} + \frac{\frac{\mu_c w_g K^2}{4\mu_g} (\kappa_g-1)m^3}{\left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right)(1+m^2)} \right] \dots\dots\dots (60)$$

ただし β_{0g}' としては (54) 式の (x) 式を用いる。

(45) 式の (ii) 式より

$$\beta_{2c_1} = \frac{\left(1 + \frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g}\right) \beta_{2g} - \left\{ \frac{\mu_c w_g K^2}{4\mu_g} (\kappa_g-1)m^2 - \frac{1}{4} w_g K^2 (1-m)m \right\}}{\kappa_c+1} \dots\dots\dots (61)$$

ただし β_{2g} は (60) 式を用いる。

(52) 式の (viii) 式より
$$\beta_{2c_2} = \frac{\beta_{2c_1}}{m^2} \dots\dots\dots (62)$$

(49) 式の (ii) 式より
$$\beta_{2c_2}' = \frac{1}{\rho_0^4} (\beta_{2c_1} - 2\rho_0^2 m \beta_{2c_2}) \dots\dots\dots (63)$$

ただし (62), (63) 式の β_{2c_1} は (61) 式を用い、(63) 式の β_{2c_2} は (62) 式を用いる。

(52) 式の (iv) 式より
$$\beta_{2c_1}' = \rho_0^2 (\rho_0^2 - 2m) \beta_{2c_2} \dots\dots\dots (64)$$

ただし β_{2c_2} は (62) 式を用いる。

(54) 式の (ii) 式より

$$\beta_{2g}' = -\frac{1}{m \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right)} \left[m(\kappa_c+1)\beta_{2c_2} + 2 \left(1 - \frac{\mu_c}{\mu_g}\right) \beta_{2g} + \frac{\mu_c w_g K^2}{4\mu_g} (\kappa_g-1)m \right]$$

$$+ \frac{w_g K^2}{4} (1-m)m] \dots\dots\dots (65)$$

ただし β_{2c_2} は (62) 式を用い、 β_{2g} は (60) 式を用いる。

(8) 所要の解析函数の形

(47) 式の第一式, (48) 式, (53) 式, (50) 式及び (54) 式より

$$\left. \begin{aligned} \varphi_g^0(\zeta) &= \frac{\alpha_{1g}}{\zeta} + \frac{i\beta_{2g}}{\zeta} & \psi_g^0(\zeta) &= i\beta_{0g}' + \frac{\alpha_{1g}'}{\zeta} + \frac{i\beta_{2g}'}{\zeta^2} \\ \varphi_c(\zeta) &= \varphi_{c_1}^0(\zeta) + \varphi_{c_2}^0(\zeta) : \varphi_{c_1}^0(\zeta) &= \frac{\alpha_{1c_1}}{\zeta} + \frac{i\beta_{2c_1}}{\zeta^2} \\ & \text{及び } \varphi_{c_2}^0(\zeta) &= \alpha_{1c_2}\zeta + i\beta_{2c_2}\zeta^2 \\ \psi_c(\zeta) &= \psi_{c_1}^0(\zeta) + \psi_{c_2}^0(\zeta) : \psi_{c_1}^0(\zeta) &= \alpha_{0c_1}' + i\beta_{0c_1}' + \frac{\alpha_{1c_1}'}{\zeta} + \frac{i\beta_{2c_1}'}{\zeta^2} \\ & \text{及び } \psi_{c_2}^0(\zeta) &= \alpha_{1c_2}'\zeta + i\beta_{2c_2}'\zeta^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (66)$$

ただし $\beta_{0g}', \alpha_{0c}', \beta_{0c}'$ は応力分布に contribute しないから省いてもよい。(66) 式と (26) 式とが所要の解析函数の形である。(66) 式及び (26) 式を (10), (11) 式及び (10'), (11') 式に代入すれば応力を求めることができる。

7. 巻立円形トンネルの場合の解析函数中の常数の決定

いま谷本勉之助氏⁹⁾の方法と比較するために、巻立トンネルの応力分布を Muschelišvili の方法により解いてみる。

円形トンネルの場合 (17) 式の写像函数において $m=0$ となるときである。

(33) 式の第一式より Cauchy の積分を Γ 円に沿いなし、 ζ を Γ の外の点として

$$-\frac{\alpha_{1c_1}}{\zeta} - \frac{i\beta_{2c_1}}{\zeta^2} + \left\{ -(\alpha_{1c_2}'i - i\beta_{1c_2}') \frac{\rho_0^2}{\zeta} - (\alpha_{2c_2}' - i\beta_{2c_2}') \frac{\rho_0^4}{\zeta^2} \dots\dots\dots \right\} = 0$$

上式において実部と虚部とにわけて係数間の比較をなして

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\zeta} \text{ の実部の係数 : } & \alpha_{1c_2}' = -\frac{\alpha_{1c_1}}{\rho_0^2} \dots\dots\dots (i) \\ \frac{1}{\zeta} \text{ の虚部の係数 : } & \beta_{1c_2}' = 0 \dots\dots\dots (ii) \\ \frac{1}{\zeta^2} \text{ の実部の係数 : } & \alpha_{2c_2}' = 0 \dots\dots\dots (iii) \\ \frac{1}{\zeta^2} \text{ の虚部の係数 : } & \beta_{2c_2}' = \frac{\beta_{2c_1}}{\rho_0^4} \dots\dots\dots (iv) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (67)$$

(33) 式の第二式に Cauchy の積分を Γ 円に沿いなし、 ζ を Γ の外の点として

$$\left(-\alpha_{1c_2} \frac{\rho_0^2}{\zeta} + i\beta_{2c_2} \frac{\rho_0^4}{\zeta^2} \right) + \rho_0^2 \alpha_{1c_1} \frac{1}{\zeta^3} + 2i\rho_0^2 \beta_{2c_1} \frac{1}{\zeta^4} - \rho_0^2 \alpha_{1c_2} \frac{1}{\zeta} - \frac{\alpha_{1c_1}' + i\beta_{1c_1}'}{\zeta} - \frac{\alpha_{2c_1}' + i\beta_{2c_1}'}{\zeta^2} = 0$$

上式において実部と虚部とにわけて係数間の比較をなして

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\zeta} \text{ の実部の係数 : } & \alpha_{1c_2} = -\frac{\alpha_{1c_1}'}{2\rho_0^2} \dots\dots\dots (i) \\ \frac{1}{\zeta} \text{ の虚部の係数 : } & \beta_{1c_1}' = 0 \dots\dots\dots (ii) \\ \frac{1}{\zeta^2} \text{ の実部の係数 : } & \alpha_{2c_1}' = 0 \dots\dots\dots (iii) \\ \frac{1}{\zeta^2} \text{ の虚部の係数 : } & \beta_{2c_1}' = \rho_0^4 \beta_{2c_2} \dots\dots\dots (iv) \\ \frac{1}{\zeta^3} \text{ の実部の係数 : } & \alpha_{1c_1} = 0 \dots\dots\dots (v) \\ (67) \text{ 式の (i) 式より } & \alpha_{1c_2}' = 0 \dots\dots\dots (vi) \\ \frac{1}{\zeta^4} \text{ の虚部の係数 : } & \beta_{2c_1} = 0 \dots\dots\dots (vii) \\ (67) \text{ 式の (v) 式より } & \beta_{2c_2}' = 0 \dots\dots\dots (viii) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (68)$$

(46) 式より

$$\begin{aligned}
 (\kappa_c+1)(\alpha_{1c_2}\zeta+i\beta_{2c_2}\zeta^2) &= -\frac{w_g dm_g}{4(m_g-1)}K\left(1+\frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g}\right)\zeta - \frac{w_g dm_g}{4(m_g-1)}K\left(1-\frac{\mu_c}{\mu_g}\right)\zeta \\
 &+ \frac{iw_g K^2}{2(\kappa_g+1)}\left(1-\frac{\mu_c}{\mu_g}\right)\zeta^2 + \left(1-\frac{\mu_c}{\mu_g}\right)(-\alpha_{1g}\zeta^3+2i\beta_{2g}\zeta^4) + \left(1-\frac{\mu_c}{\mu_g}\right)\{(\alpha_{0g}'-i\beta_{0g}') \\
 &+ (\alpha_{1g}'-i\beta_{1g}')\zeta + (\alpha_{2g}'-i\beta_{2g}')\zeta^2\} - \frac{i\mu_c w_g K^2}{4\mu_g}(\kappa_g-1)\zeta^2 - \frac{1}{4}iw_g K^2 \zeta^2
 \end{aligned}$$

上式において実部と虚部とにわけて係数間の比較をなして

ζ^4 の虚部の係数: $\beta_{2g}=0$ (i)

ζ^3 の実部の係数: $\alpha_{1g}=0$ (ii)

ζ^2 の実部の係数: $\alpha_{2g}'=0$ (iii)

ζ^2 の虚部の係数:

$$(\kappa_c+1)\beta_{2c_2} = \frac{w_g K^2}{2(\kappa_g+1)}\left(1-\frac{\mu_c}{\mu_g}\right) - \left(1-\frac{\mu_c}{\mu_g}\right)\beta_{2g}' - \frac{\mu_c w_g K^2}{4\mu_g}(\kappa_g-1) - \frac{w_g K^2}{4} \dots\dots\dots(iv)$$

ζ の実部の係数:

$$(\kappa_c+1)\alpha_{1c_2} = -\frac{w_g dm_g}{4(m_g-1)}K\left(1+\frac{\mu_c \kappa_g}{\mu_g}\right) - \frac{w_g dm_g}{4(m_g-1)}K\left(1-\frac{\mu_c}{\mu_g}\right) + \left(1-\frac{\mu_c}{\mu_g}\right)\alpha_{1g}' \dots\dots\dots(v)$$

ζ の虚部の係数: $\beta_{1g}'=0$ (vi)

絶対項の実部の係数: $\alpha_{0g}'=0$ (vii)

絶対項の虚部の係数: $\beta_{0g}'=0$ (viii)

(37) 式より $\varphi_{c_1}(\zeta)=0$ $z=K\sigma$ $w'=K$ $\bar{w}'=K$ なることを考慮して

$$\begin{aligned}
 (\alpha_{1c_2}\sigma+i\beta_{2c_2}\sigma^2) + \sigma\left(\alpha_{1c_2}-2i\beta_{2c_2}\frac{1}{\sigma}\right) &- \left\{(\alpha_{0c_1}'+i\beta_{0c_1}') + \frac{\alpha_{1c_1}'}{\sigma} + \frac{i\beta_{2c_1}'}{\sigma^2}\right\} \\
 &= -\frac{w_g dm_g}{4(m_g-1)}K\sigma + \sigma\left\{-\frac{w_g dm_g}{4(m_g-1)}K + \frac{iw_g K^2}{2(\kappa_g+1)}\sigma\right\} - \frac{w_g d}{2} \frac{m_g-2}{m_g-1} K \frac{1}{\sigma} \\
 &+ (-i\beta_{0g}'+\alpha_{1g}'\sigma-i\beta_{2g}'\sigma^2) - \frac{1}{4}iw_g K^2 \sigma^2 \dots\dots\dots(70)
 \end{aligned}$$

(70) 式を r の周りに沿い Cauchy の積分をなす。 ζ を r の内部の点として

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1c_2}\zeta+i\beta_{2c_2}\zeta^2+\alpha_{1c_2}\zeta-2i\beta_{2c_2}-\alpha_{0c_1}'-i\beta_{0c_1}' &= -\frac{w_g dm_g}{4(m_g-1)}K\zeta - \frac{w_g dm_g}{4(m_g-1)}K\zeta \\
 &+ \frac{iw_g K^2}{2(\kappa_g+1)}\zeta^2 - i\beta_{0g}'+\alpha_{1g}'\zeta-i\beta_{2g}'\zeta^2 - \frac{1}{4}iw_g K^2 \zeta^2
 \end{aligned}$$

上部において実部と虚部とにわけて係数間の比較をして

ζ^2 の虚部の係数: $\beta_{2g}' = \frac{w_g K^2}{2(\kappa_g+1)} - \frac{w_g K^2}{4} - \beta_{2c_2}$ (i)

これを (69) 式の (iv) 式に代入して

$$\beta_{2c_2} = \frac{-\frac{\mu_c w_g K^2}{4\mu_g} \kappa_g}{\kappa_c + \frac{\mu_c}{\mu_g}} \dots\dots\dots(ii)$$

(i) 式より $\beta_{2g}' = \frac{w_g K^2}{2(\kappa_g+1)} - \frac{w_g K^2}{4} - \beta_{2c_2}$ (iii)

ただし β_{2c_2} は (ii) 式を用いる。

ζ の実部の係数: $\alpha_{1g}' = 2\alpha_{1c_2} + \frac{w_g dm_g}{2(m_g-1)}K$ (iv)

これを (69) 式の (v) 式に代入して

$$\alpha_{1c_2} = \frac{-\frac{w_g dm_g}{4(m_g-1)}K - \frac{\mu_c}{\mu_g}(1+\kappa_g)}{(\kappa_c+1) - 2\left(1-\frac{\mu_c}{\mu_g}\right)} \dots\dots\dots(v)$$

絶対項の実部の係数: $\alpha_{0c_1}'=0$ (vi)

絶対項の虚部の係数: $-2\beta_{2c_2}-\beta_{0c_1}' = -\beta_{0g}'$ (vii)

(70) 式を r の周りに沿い Cauchy の積分をする。 ζ を r の外部の点として

$$\frac{\alpha_{1c_1'}}{\zeta} - \frac{i \beta_{2c_1'}}{\zeta^2} = \frac{w_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \frac{1}{\zeta}$$

上式において実部と虚部とにわけて係数間の比較をして

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\zeta} \text{ の実部の係数: } \alpha_{1c_1}' &= \frac{w_g d}{2} \frac{m_g - 2}{m_g - 1} K \dots\dots\dots (i) \\ \frac{1}{\zeta^2} \text{ の虚部の係数: } \beta_{2c_1}' &= 0 \dots\dots\dots (ii) \end{aligned} \right\} \dots\dots (72)$$

巻立部における解析函数 $\varphi_c^0(\zeta)$ は次のようになる。

$$\varphi_c^0(\zeta) = \alpha_{1c_2} \zeta + i \beta_{2c_2} \zeta^2 \dots\dots\dots (73)$$

8. 計算例

(1) 巻立円形トンネルの場合 コンクリート巻立部の Lamé 常数

$$\lambda_c = 5 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2 \quad \mu_c = 10 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{地山部の Lamé 常数} \quad \lambda_g = 700 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2 \quad \mu_g = 20 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{地山の単位容積当りの重量} \quad w_g = 1.6 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$$

$d=20 \text{ m}$, $K=5.4 \text{ m}$, 巻立の内側面の円形の半径を 5 m とすれば $K \rho_0 = 5 \text{ m}$, ゆえに $\rho_0 = 0.925$ となり巻立厚さは 40 cm となる。 $z = w(\zeta) = K \zeta$ として

$$\phi_c(\zeta) = \frac{\alpha_{1c_2} + 2i \beta_{2c_2} \rho (\cos \theta + i \sin \theta)}{K}$$

円すなわちトンネルの巻立内壁上における応力は

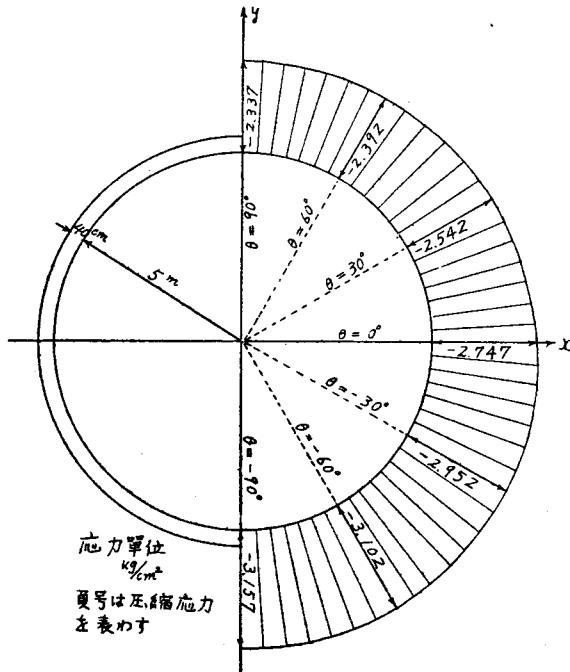
$$(\tau_{\rho \rho} + \tau_{\theta \theta})_{\Gamma} = 4R_e[\phi_c(\zeta)]_{\Gamma} = 4 \frac{\alpha_{1c_2}}{K} - 4 \frac{\beta_{2c_2}}{K} \rho_0 \sin \theta$$

ただし R_e は実部をとることを示す。巻立内壁上では $(\tau_{\rho \rho})_{\Gamma} = 0$ であるから

$$(\tau_{\theta \theta})_{\Gamma} = 4 \left[\frac{\alpha_{1c_2} - 2 \beta_{2c_2} \rho_0 \sin \theta}{K} \right] = -2.747 + 0.410 \sin \theta$$

この式によつて計算すれば、トンネル中心の地表面よりの深さ 20 m の場合の巻立内壁上の Tangential Normal Stress の分布が得られ、これを図-3 に示す。

図-3 円形巻立トンネルの巻立内壁上の $\tau_{\theta \theta}$ の分布



(2) 巻立楕円形トンネルの場合 巻立部及び地山部の Lamé 常数, 及び地山の単位容積当りの重量は (1) の場合と同じとする。また $d=20\text{ m}$, $K(\rho_0 + \frac{m}{\rho_0})=4\text{ m}$, $K(\rho_0 - \frac{m}{\rho_0})=5\text{ m}$ として, $K(1+m)=4.40\text{ m}$ とすれば側壁中央の巻立厚さは 40 cm , 拱頂拱底中央の巻立厚さは 27.2 cm となる。ゆえに $m=-0.09$, $K=4.84\text{ m}$, $\rho=0.93$, $K(1-m)=5.27\text{ m}$ となる。

「円すなわちトンネルの巻立内壁上の応力は

$$(\tau_{\rho\rho_c} + \tau_{\theta\theta_c})_{\Gamma} = 4 R_e [\Phi_c(\zeta)] = 4 R_e \left[\frac{-\alpha_{1c_1} - \frac{2i\beta_{2c_1}}{\zeta} + \alpha_{1c_2}\zeta^2 + 2i\beta_{2c_2}\zeta^3}{K(\zeta^2 - m)} \right]$$

$$= 4 R_e \left[\frac{-\alpha_{1c_1} - 2i\beta_{2c_1} \frac{1}{\rho_0} e^{-i\theta} + \alpha_{1c_2}\rho_0^2 e^{2i\theta} + 2i\beta_{2c_2}\rho_0^3 e^{3i\theta}}{K(\rho_0^2 e^{2i\theta} - m)(\rho_0^2 e^{-2i\theta} - m)} \right]$$

この分母は実で $K(\rho_0^4 - 2m\rho_0^2 \cos 2\theta + m^2)$ となり, 分子の実部は $-\alpha_{1c_1} - \frac{2\beta_{2c_1}}{\rho_0} \sin \theta + \rho_0^2 \alpha_{1c_2} \cos 2\theta - 2\rho_0^3 \beta_{2c_2} \sin 3\theta$ となるから

$$(\tau_{\rho\rho_c} + \tau_{\theta\theta_c})_{\Gamma} = 4 \left[\frac{-\alpha_{1c_1} - \frac{2\beta_{2c_1}}{\rho_0} \sin \theta + \rho_0^2 \alpha_{1c_2} \cos 2\theta - 2\rho_0^3 \beta_{2c_2} \sin 3\theta}{K(\rho_0^4 - 2m\rho_0^2 \cos 2\theta + m^2)} \right]$$

巻立内壁上では $(\tau_{\rho\rho_c})_{\Gamma} = 0$ となるから

$$(\tau_{\theta\theta_c})_{\Gamma} = 4 \left[\frac{-\alpha_{1c_1} - \frac{2\beta_{2c_1}}{\rho_0} \sin \theta + \rho_0^2 \alpha_{1c_2} \cos 2\theta - 2\rho_0^3 \beta_{2c_2} \sin 3\theta}{K(\rho_0^4 - 2m\rho_0^2 \cos 2\theta + m^2)} \right]$$

$$= \frac{-0.287 + 0.014 \sin \theta - 2.757 \cos 2\theta + 1.257 \sin 3\theta}{0.756 + 0.156 \cos \theta}$$

この式によつて計算すれば, トンネル中心の地表面よりの深さ 20 m の場合の巻立内壁上の Tangential Normal Stress の分布が得られ, これを図-4 に示す。

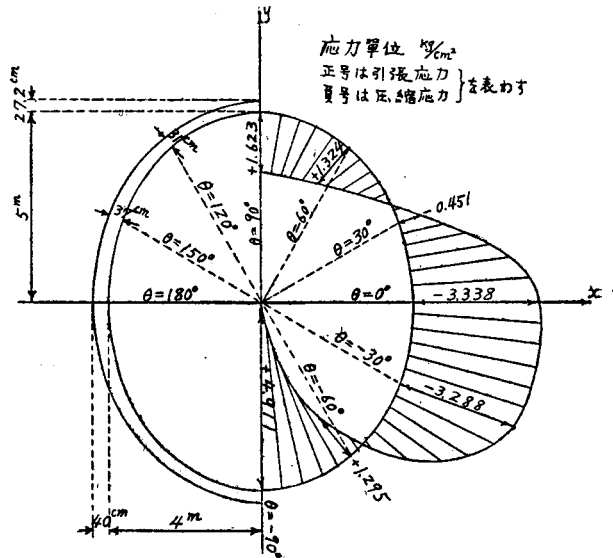
9. 結語

計算例に示したようなポアソン数が 2.33 の地山においては円形巻立トンネルの場合には巻立内では巻立内壁上の Tangential Normal Stress は全部圧縮応力が生じ, コンクリート巻立は有効にはたらくが, 楕円形巻立トンネルでは拱頂, 仰拱には Tangential Normal Stress が引張応力となり, 側壁部では圧縮応力となるから, 楕円形巻立トンネルの方が不利である。また楕円形トンネルでは拱張の引張応力より仰拱中央の引張応力の方が大となる。

巻立内壁上の Tangential Normal Stress の分布を求めるには, 計算例に示されたよう

に Muschelišvili の方法によれば迅速に計算できる。谷本勉之助氏は円形巻立トンネルを取扱っているが, Airy の応力関数の形をきめ, その係数をきめるのに複雑な行列式を計算する面倒があるが, 著者の方法は簡単に計算ができ, 特にトンネル内壁上の応力を求めるのは迅速にでき, トンネル巻立厚さをきめるとき, 巻立内壁上の応力が許容応力以下になることを要する。このために現場で地質に応じて地山の Lamé 常数が知れるならば, すぐ巻立厚さを決定できる利点がある。またこの Muschelišvili の方法によるときは, 写像関数として $z=w(\zeta) = K\left(\zeta + \frac{m}{\zeta} + \frac{n}{\zeta^3}\right)$ ととることにより ovaloid の形の巻立トンネルの場合にも適用することができる。本研究において御指導をうけた京都大学教授村山朗郎博士及び計算に御助言をうけた谷本喜一氏に深謝する次第である。

図-4 楕円形巻立トンネルの巻立内壁上の $\tau_{\theta\theta}$ の分布



参 考 文 献

- 1) 荒井利一郎:「巻き立てなき楕円形隧道附近における応力の状態について」土木学会誌第28巻第12号
- 2),8) 谷本勉之助:「巻立円形隧道の応力分布」土木学会誌第23巻第4号
- 3) Yi-Yuan: "Gravitational Stresses on Deep Tunnels" Journal of Applied Mechanics, December, 1952, Vol. 19. No. 4 pp. 537
- 4),5) N. Muschelišvili: "Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen" Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 13, 1933, pp. 264~282
- 6) M.A. Biot: "Distributed Gravity and Temperature Loading in Two-Dimensional Elasticity Replaced by Boundary Pressure and Dislocations" Journal of Applied Mechanics Trans. ASME, Vol. 57, 1935, pp-A-41~45
- 7) 倉西正嗣:「弾性学」日本機械学会昭和23年, p. 408

(昭. 29. 4.15)

鉄道

波状磨耗レールが走行車両より受ける衝撃

正員 工学博士 小野 一 良*

IMPACT LOADS CAUSED BY CORRUGATIONS IN RAIL SURFACES

(Trans. of JSCE, No. 24, April, 1955)

Dr. Eng., Kazuyoshi Ono, C.E. Member

Synopsis In the first part of this report the author has done some experimental work. The tests were undertaken particularly to obtain information on the magnitude of the stresses developed in the corrugated rails under the traffic of locomotives and cars as compared with those developed in the full rails and to estimate the intensity of impact loads. It was also desired to learn if possible how speed and type of locomotives and cars affect these matters.

Four wire strain gages were attached to the base of a corrugated rail at intervals equal to one fourth of the wave length of the corrugation as shown in Figs. 1 and 3. Representative records of the stresses in the rail may be seen in Figs. 4~6. It may be noted from the records that (a) the stress records of the gages have many peaks; number of the peaks coincides with number of waves of corrugations over which the wheels run, (b) the maximum value of the impact loads was recorded by the strain gage attached at the halfway from the bottom to the summit of the corrugation, (c) driving wheels of the steam locomotives and wheels of the passenger-cars gave far greater impact loads to the rail compared with those given by the goods wagons, (d) within the speed of the cars between 30~50 km per hour the impact loads have a trend to increase with the speed.

In the second part the author has developed analyses on the same subject. He has determined the deflection of the rail and the bending moment in it produced by the vertical movements of the mass (the wheel and the unsprung weight incidental to it) due to the corrugated wear in the rail surface.

The rail and its support can be considered as equivalent to an elastic spring. And the upper end of the car spring was assumed to be fixed, an assumption not greatly in error as long as oscillations of the car body do not develop. The shape of the corrugated wear is assumed to have the form given by the sine curve, and this shape coincides generally with the usual irregularities present in rails as shown in Fig. 2. In this figure we see that the phase difference between the corrugations of the left and right rails is equal to 180°.

By the analyses it was found (a) that the deflection of the rail and the bending moment in the rail under wheels due to the corrugated wear oscillates with the same period which the wheels run over the waves of the corrugated wear, (b) that the amplitude of the oscillation has a trend to increase with speed, (c) that at a critical speed which is indicated by the analyses the amplitude becomes infinite provided that the wheel maintains contact with the rail at all times. Then the effect has been determined which the friction between plates of laminated car spring will have on the action of the vibrating system and it is learned that the effect is of importance to restrain the movements.

* 金沢大学教授, 工学部土木工学教室