

参 考 文 献

- 1) 荒井利一郎:「巻き立てなき楕円形隧道附近における応力の状態について」土木学会誌第28巻第12号
- 2),8) 谷本勉之助:「巻立円形隧道の応力分布」土木学会誌第23巻第4号
- 3) Yi-Yuan: "Gravitational Stresses on Deep Tunnels" Journal of Applied Mechanics, December, 1952, Vol. 19. No. 4 pp. 537
- 4),5) N. Muschelišvili: "Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen" Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 13, 1933, pp. 264~282
- 6) M.A. Biot: "Distributed Gravity and Temperature Loading in Two-Dimensional Elasticity Replaced by Boundary Pressure and Dislocations" Journal of Applied Mechanics Trans. ASME, Vol. 57, 1935, pp-A-41~45
- 7) 倉西正嗣:「弾性学」日本機械学会昭和23年, p. 408

(昭. 29. 4.15)

鉄道

波状磨耗レールが走行車両より受ける衝撃

正員 工学博士 小野 一 良*

IMPACT LOADS CAUSED BY CORRUGATIONS IN RAIL SURFACES

(Trans. of JSCE, No. 24, April, 1955)

Dr. Eng., Kazuyoshi Ono, C.E. Member

Synopsis In the first part of this report the author has done some experimental work. The tests were undertaken particularly to obtain information on the magnitude of the stresses developed in the corrugated rails under the traffic of locomotives and cars as compared with those developed in the full rails and to estimate the intensity of impact loads. It was also desired to learn if possible how speed and type of locomotives and cars affect these matters.

Four wire strain gages were attached to the base of a corrugated rail at intervals equal to one fourth of the wave length of the corrugation as shown in Figs. 1 and 3. Representative records of the stresses in the rail may be seen in Figs. 4~6. It may be noted from the records that (a) the stress records of the gages have many peaks; number of the peaks coincides with number of waves of corrugations over which the wheels run, (b) the maximum value of the impact loads was recorded by the strain gage attached at the halfway from the bottom to the summit of the corrugation, (c) driving wheels of the steam locomotives and wheels of the passenger-cars gave far greater impact loads to the rail compared with those given by the goods wagons, (d) within the speed of the cars between 30~50 km per hour the impact loads have a trend to increase with the speed.

In the second part the author has developed analyses on the same subject. He has determined the deflection of the rail and the bending moment in it produced by the vertical movements of the mass (the wheel and the unsprung weight incidental to it) due to the corrugated wear in the rail surface.

The rail and its support can be considered as equivalent to an elastic spring. And the upper end of the car spring was assumed to be fixed, an assumption not greatly in error as long as oscillations of the car body do not develop. The shape of the corrugated wear is assumed to have the form given by the sine curve, and this shape coincides generally with the usual irregularities present in rails as shown in Fig. 2. In this figure we see that the phase difference between the corrugations of the left and right rails is equal to 180°.

By the analyses it was found (a) that the deflection of the rail and the bending moment in the rail under wheels due to the corrugated wear oscillates with the same period which the wheels run over the waves of the corrugated wear, (b) that the amplitude of the oscillation has a trend to increase with speed, (c) that at a critical speed which is indicated by the analyses the amplitude becomes infinite provided that the wheel maintains contact with the rail at all times. Then the effect has been determined which the friction between plates of laminated car spring will have on the action of the vibrating system and it is learned that the effect is of importance to restrain the movements.

* 金沢大学教授, 工学部土木工学教室

要旨 第1編において波状磨耗を生じたレールの上を車両が通過するときレール底部に生ずる応力及びたわみを測定した結果を示し、車両の種類または走行速度とレールが受ける衝撃の大きさとの関連を述べた。この結果次の諸項が明らかにされた。(a) 各車輪が波状磨耗の山を越すごとに1回づつ軌道に大きな衝撃を与える、(b) 特に波状磨耗の上りかかりにおいて軌道に最大の衝撃を与える、(c) 機関車動輪及び客車車輪によつて生ずる衝撃は特に大きく、これに反し軸重の大きな2軸貨車において少ない、(d) 測定車両の走行速度は30~50 km/hの範囲であつたが速度の増加にともない急激に衝撃が増加する。

第2編においてはこの問題について理論的考察をなした。軌道を内部摩擦及び質量を有する弾性支承とし、波状磨耗の形状を正弦波とし、波状磨耗による振動に対してバネ上重量は不動と仮定して計算を行つた。この結果(a) 車輪が波状磨耗の山を越すごとに軌道に大きな衝撃を与えること、(b) ある列車速度において軌道の上下動は共振をなし、振巾が無限大となること、(c) 実際上はこの速度に達する前に車輪がレール面より飛び上るので衝撃の大きさには限度があること、(d) 担バネを構成する板バネの間の摩擦抵抗が振動振巾を軽減する上に大いに有効であることを述べた。

緒 言

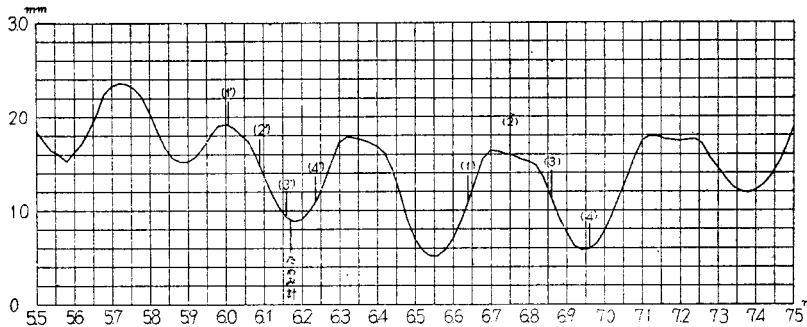
近年計測機械の進歩とともに列車速度と軌道に生ずる衝撃との関係が多数調査されている。その結果によればレールに生ずる応力及び変形は列車速度にはほとんど関係がなく、速度による衝撃は認められていない¹⁾。しかしこれはレール面及び車輪踏面に欠陥がない場合であつてレール面に不整があるか、または車輪踏面に平坦部がある場合には軌道に大きな衝撃の加わることが想像される²⁾。レール面の欠陥の一例として波状磨耗がある場合に軌道に生ずる衝撃を測定し、衝撃の大きさが車両の種類及び走行速度にいかなる関連を持つかについて調査し、この結果を理論的に解析することとした。

第1編 衝撃の測定

1. 波状磨耗の形状

北陸線には1914~1924年製の37 kgレールが多数残つており、これらのレールには波状磨耗を生じたものが多い。波状磨耗の一例を図-1に示すが、深さ1~2 mm、波長300~400 mmの波状磨耗がレール全長に発生しているものがある³⁾。これはなほだしいものから交換されたが現在でも深さ1 mm程度のものが多数残っている。

図-1 北陸線米原起点 171 186 m 付近左側レール波状磨耗



図に示すごとく磨耗の形状はほぼ正弦波と見ることができる。左右のレールに生じた波状磨耗の一例を図-2に示したが、左側レールで山の所は右側レールで谷となり、左側レールで谷の所は右側レールで山となり、位相がほぼ180°ずれていることがわかる。他の波状磨耗発生箇所においても左右のレールに生ずる波状磨耗には180°に相当する位相のずれがあり、波状磨耗の発生原因と本質的な関連があることを思わしめる⁴⁾。

2. レールに生ずる応力及びたわみの測定

波状磨耗レールについて図-1の(1)、(2)、(3)、(4)または(1')、(2')、(3')、(4')の位置においてレール底部上側(軌間内)にワイヤーストレインゲージを貼りつけて通過列車によつてレールに生ずる応力を測定した(図-3参照)。また図-1に示す位置にたわみ計を取りつけて列車通過時におけるレール底部中央のたわみを測定した。図に示すごとく(2)は波状磨耗の頂点であり、(4)は谷底である。下り列車に対しては(1)は上りかかりであり、(3)は下りかかりとなる。上り列車に対しては(1)は下りかかりとなり、(3)は上りかかりとなる。(4)の箇所におけるレールの断面形状を図-3に示すが頭部において9 mm、底部において1.5 mm磨耗してい

図-2 北陸線 171 220~230 m 間波状磨耗

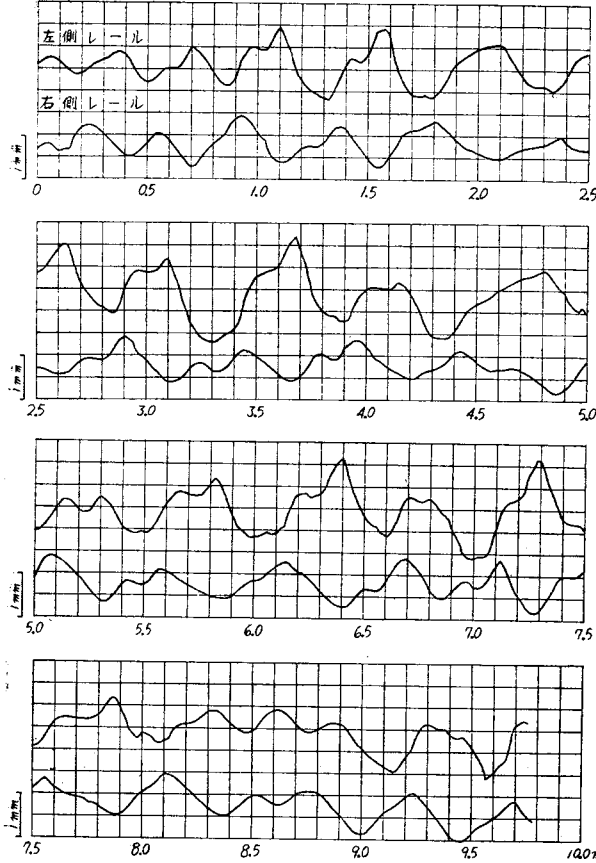
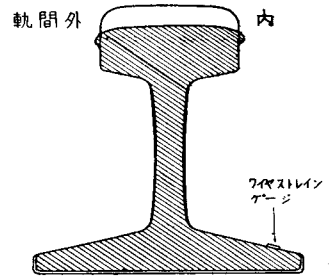


図-3 レール断面 (波状磨耗の谷)



北陸線米原起点 171 186 m 左側レール

る。その他の測定要項は下記のごとくである。

測定年月日 昭 28. 10. 26, 27 及び 11. 1, 2.

線路状態 北陸線米原起点 171 186 m, 直線, 2% 上り勾配, 田面上にある高さ約 1 m の築堤, 篩砂利道床, 37 kg 10 m レール (左側レールについて測定), 枕木 15 丁配置, 間隔 710 mm.

運転状態 加賀笠間駅中心より約 600 m 米原よりなるため上り列車は主として力行運転をなし, 下り列車は主として惰行運転中, 旅客列車は C57 または C51 型機関車によつて牽引され, 貨物列車は D51 または D50 型機関車によつて牽引されている。

測定計器 レールの応力測定にはゲージ長さ 17.5 mm, 抵抗 120 Ω のワイヤストレインゲージを BC1 によつて貼付けた。またたわみ計には最大変位計の記録紙を糸によつて引いて使用した。このレールは同年 12 月 15 日に新品 37 kg レールに交換されたので 12 月 17 日に同一の箇所にて新品レールに生ずる応力及びたわみを測定した。測定要項は波状磨耗レールの場合と同一である。

ワイヤストレインゲージによつて測定した記録の数例を図-4~7 に示し, たわみ計による記録の数例を図-8~11 に示した。図-7, 11 は新品レールに対する記録であり, その他はすべて波状磨耗レールに対するものであ

図-4 波状磨耗レールの底部に生ずる応力 (a)

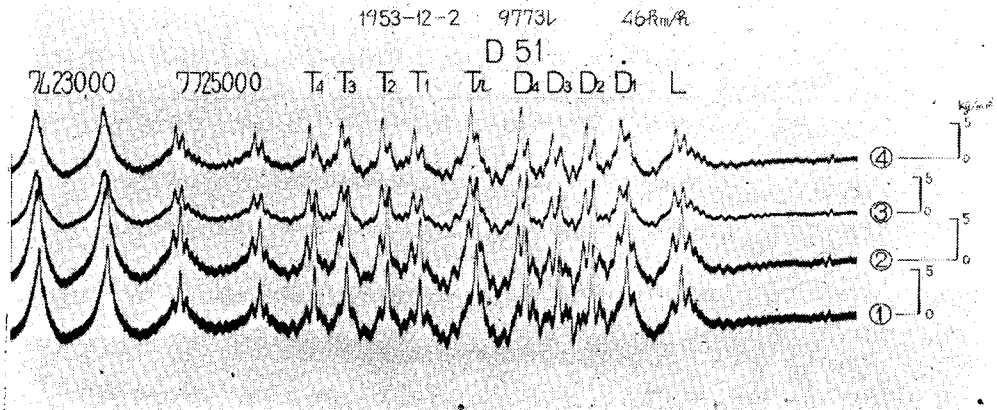


図-5 波状磨耗レールの底部に生ずる応力 (b)

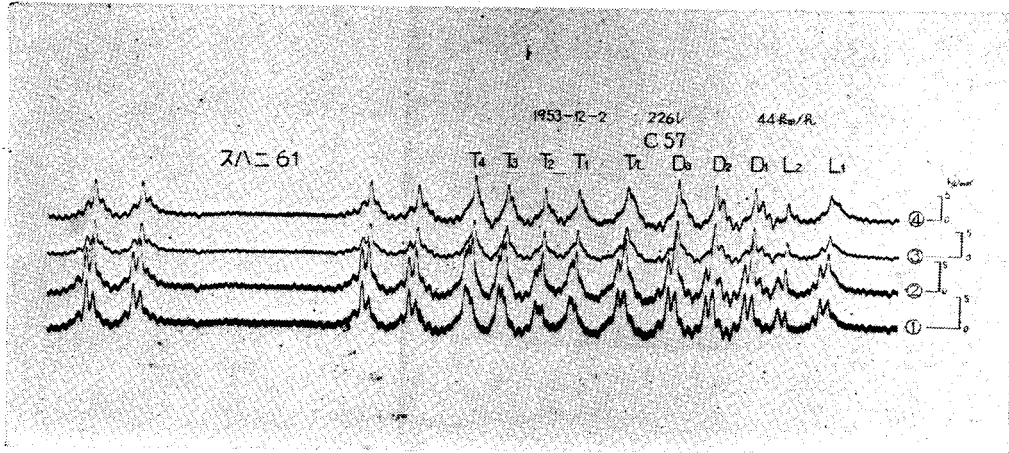
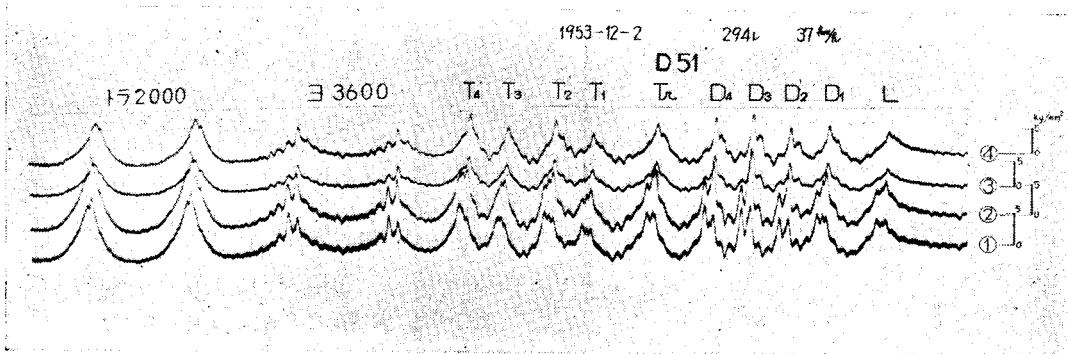


図-6 同上 (c)

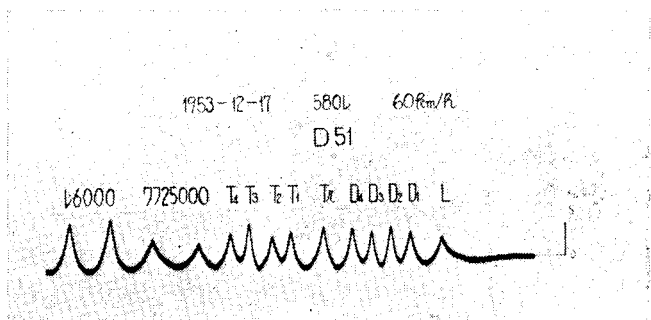


る。

ワイヤ ストレイン ゲージの記録より次の諸項が明らかにされた。

(i) 新品レールにおいては各車輪がゲージの真上を通過するときのみにレールに生ずる応力が極大となるが、波状磨耗レールにおいてはこの基本の波の上に多数の波が重なっている。しかして大多数の記録においてはこの波の波長が波状磨耗の波長に一致し、従つて車輪が波状磨耗を一つ越すごとに1回づつの衝撃をレールに加えてゆくことがわかる。今後は前者を静荷重による応力（または静的応力）と呼び、後者を衝撃による応力（または衝撃応力）と呼ぶ。

図-7 新品レールの底部に生ずる応力



(ii) 図-4 に示すごとく (1) のワイヤ ストレイン ゲージによつて得た応力は各車輪の下において大きな山が1個あり、この両側に小さな山が続いてはほぼ左右対称となつている。これに反し (3) の記録においては各車輪の下において大きな山が2個ならば、これらの高さがほぼ等しい。従つて図-12 に示すごとく (1) の位置においては静荷重による最大応力と衝撃による正の最大応力が重なり、(3) の位置においては静荷重による最大応力と衝撃による負の最大応力が重なつたものと見ることが出来る。(2), (4) の記録にはこれらの中間の過程があらわれている。

図-8 波状磨耗レールのためみ
(612レ C51 型機関車 1953.12.1)

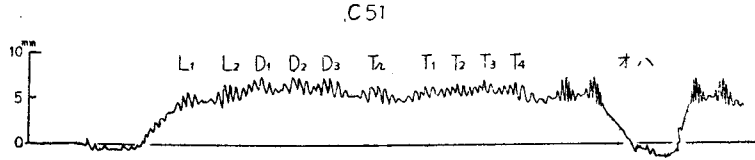


図-9 同上
(561レ D50 型機関車 1953.12.2)

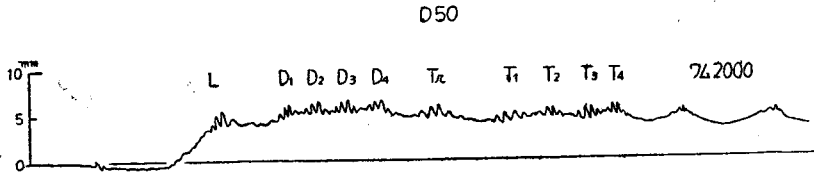


図-10 同上
(9773レ D51 型機関車 1953.12.1)

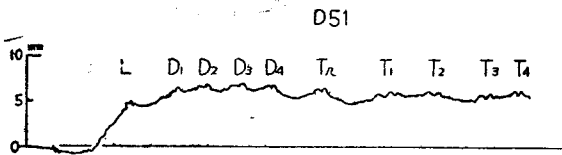


図-11 新品レールのためみ
(571レ D51 型機関車 1953.12.17)

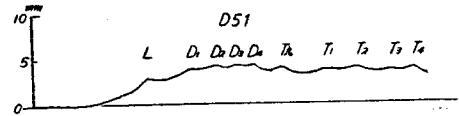


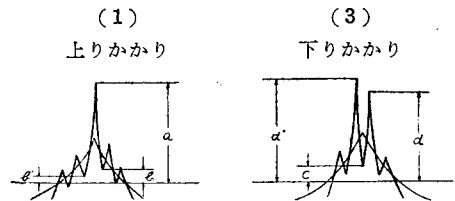
図-5, 6 には上り列車による記録が示されているが、この場合には(1)の位置において軌道に負の衝撃が加わり、(3)の位置において正の衝撃が加わっている。

以上の事実より見て車輪が波状磨耗の上りかかりを通過するときに軌道に正の衝撃を加え、下りかかりを通過するときに負の衝撃を加えることがわかる。

(iii) 図-4~6 によつて各車輪下における衝撃の大きさを比較すると一般に機関車、客車、緩急車(ワフ)、車掌車(ヨ)、2軸ボギー貨車の各車輪の下で大きな衝撃を生じ、その他の貨車による衝撃は非常に小さいことが認められる。これを云いかえればバネ下重量の大きな車両、バネの軟い車両、及び輪重の小さな車両において大きな衝撃を生じ、バネが硬く輪重の大きな車両において衝撃が少ないことが認められる。バネ下重量が大きいときに衝撃が大ききことは当初の予想に一致するが、バネの軟い客車において衝撃が大きき、バネが硬く輪重の大きな貨車において衝撃の少ないことは予想に反した事項である。この理由については第2編において考察する。

(iv) 図-5, 6 において(1)のストレインゲージによる炭水車通過時の記録に示すごとく、波状磨耗の下りかかりに取付けたストレインゲージの記録にはほぼ等しい高さの山が3個連続している場合がある。このような現象は列車速度 30 km/h 程度のときに全車輪の下に生じているが、40 km/h 程度のときには炭水車の車輪にわずかに認められ、50 km/h 程度になればどの車輪にも全然認められない。連続した3個の山の中で両側の山は車輪が波状磨耗の上りかかりを通過するときにレールが受けた正の衝撃をあらわしていることはこの両側の山の間隔より見て明らかである。しからば中央の山を生じた原因は何であろうか。衝撃の大きさが小さければ静荷重による応力が中央の山を作ることも考えられる。しかし(1)の記録における中央の山に相当して(2)の記録にも同時

図-12 波状磨耗レールの底部に生ずる応力



刻に山があらわれている。もし静荷重によつて生ずる山ならば(1)の記録における山と(2)の記録における山との間には時間的のずれがあるはずである。従つて静荷重による山と考えては説明ができない。それでは隣の車輪によつて生じた正の衝撃があらわれたのであろうかとも想像されるが、曲げモーメントの影響線より考察して隣の車輪よりこのように大きな影響を受けるとは考えられない。車輪が波状磨耗の上りかかりを通過するときだけでなく、下りかかりを通過するときにも軌道に正の衝撃を与えたとしか解釈できない。現在の理論よりは車輪にこのような振動が生ずるとは考えられないが、この問題は今後の研究によつて解決したい。

次にたわみ計による記録 図-8~11 を比較した結果次の諸項が明らかにされた。

(i) 図-11 によればレール面に波状磨耗がないときには各車輪の通過時にたわみの極大があらわれており、各車輪の位置が明確に判定できる。これに反して波状磨耗レールでは車輪通過に当つてはなほだしい上下動を生じていることがわかる。しかしてこの振動数は車輪が波状磨耗の山を超える数に一致し、波状磨耗の山を超えるごとに1回づつの衝撃を軌道に加えていることがわかる。

(ii) 図-10 は低速の場合であり、高速の場合図-8, 9 に比較して振動振巾が小さい。

(iii) 測定箇所の波状磨耗の深さは約 1 mm であるが、図-8, 9 によればレールの上下動の全振巾は 2 mm に達するものがある。

(iv) 一般に客車による振動振巾が最も大きく、機関車(炭水車を除く)がこれに次ぎ、輪重の大きな貨車による振動振巾が最も小さいことはワイヤ ストレイン ゲージによる測定と同一傾向である。

3. 衝撃応力及び静的応力

さきに述べたごとく波状磨耗の上りかかりにおいては正の衝撃が加わり、下りかかりにおいては負の衝撃が加わる。波状磨耗の形状がほぼ正弦波であるから衝撃もまた正弦波状に変化すると仮定する。図-12 (1) に示すごとく b と b' との差が少なければ a は静的応力 S と正の最大の衝撃応力 I との和とみなすことができる。また(3) に示すごとく d と d' とがほぼ等しければ c は静的応力 S と負の最大の衝撃応力 $-I$ との和とみなすことができる。よつて次式により静的応力 S 及び衝撃応力 I を求めることができる。

$$S = 0.5(a + c)$$

$$I = 0.5(a - c)$$

各種の速度における機関車の記録より上式によつて S 及び I を求めた結果次の諸項が明らかにされた。

(i) 機関車動輪によつて $2 \sim 5 \text{ kg/mm}^2$ の衝撃応力が加わり、このうちには静的応力を超える場合もある。

(ii) 列車速度 $46 \sim 50 \text{ km/h}$ の場合の衝撃応力は $30 \sim 37 \text{ km/h}$ の場合の衝撃応力に較べてはるかに大きい。

客車及び貨車についても同様にして衝撃応力を求めたがその結果より次の諸項が明らかにされた。

(iii) 客車においては列車速度 $36 \sim 38 \text{ km/h}$ のとき衝撃応力が $1.1 \sim 1.4 \text{ kg/mm}^2$ であるのに対し、 $45 \sim 52 \text{ km/h}$ のとき $3.4 \sim 5.4 \text{ kg/mm}^2$ となり、速度の影響がいちじるしくあらわれている。

(iv) 客車においては衝撃応力が静的応力の 70% に達する場合が多く認められる。

(v) 貨車においては車両の種類によつて衝撃応力が非常に異り、タキ、トキ(2軸ボギー貨車)において $2.0 \sim 3.0 \text{ kg/mm}^2$ となり、ワフ(緩急車)、ヨ(車掌車)において $1.5 \sim 2.2 \text{ kg/mm}^2$ となり、ト、トラ、ワム、ツにおいて $0.7 \sim 1.6 \text{ kg/mm}^2$ となる。

(vi) 貨車においては列車速度が衝撃応力に及ぼす影響が比較的少ない。

4. 考察ならびに結論

各種車両の通過時に波状磨耗レールに生ずる応力を測定した結果波状磨耗の山を越すごとに非常に大きな衝撃応力を生ずることが認められた。しかして機関車、客車及び軸重の小さい貨車において特に衝撃が大きく、軸重の大きい貨車において衝撃が小さい。測定車両の走行速度は $30 \sim 50 \text{ km/h}$ の範囲であつたが、速度の増加にともない急激に衝撃の増加する場合がある。衝撃応力が静的応力の 70% に達する場合が多数認められ、特に機関車動輪のごとく軸距の短い場合には衝撃応力が静的応力を越す場合もある。このような衝撃応力はそれ自体が大きいのみならず繰返し回数が多いので 1 個列車の通過によつてレールが受ける疲労は波状磨耗のない平坦なレール上を軸重がこれより 70% 大きい列車が数回通過した場合に相当する。

レールのたわみを測定した結果によればレールの上下動の全振巾は波状磨耗の深さの約 2 倍に達するものが多い。このレールの上下動は枕木、道床を通じて路盤に伝播し、道床及び路盤の沈下を促進すると考えられる。振動回数より見て波状磨耗のないレールの数倍の影響があることになる。

最近軌道の保守上道床及び路盤の振動に多くの関心が持たれるようになったが、振動振巾の大きいこと、振動を生ずる原因となる衝撃の大きいことより見て波状磨耗の防止、波状磨耗による衝撃の緩和に最大の関心を払う

要がある。バネの硬い貨車において衝撃の少ない特徴を機関車及び客車にも適用することはできないかについても考究する要があり、この問題に関しては第2編において取扱うこととする。

第2編 理論的考察

5. 計算式の特徴

ここに述べる計算式はレール面が変動荷重を受けた場合に衝撃が枕木、道床、路盤内に伝播する過程を解析したものであり、この結果によつてレール、枕木、道床、路盤が受ける衝撃荷重、たわみ及びレールに生ずる曲げモーメントの計算式が誘導される。この計算においては道床及び路盤の質量による慣性及び摩擦による抵抗を考慮に入れ、これらの慣性及び摩擦抵抗はレールに集中しないで道床及び路盤内に広く分布すると考えた。

著者はさきに鉄道業務研究資料第9巻第1号に“周期的に変化する荷重に対する軌道の強さ”(以下前論文と称す)と題してレール面に波状磨耗がある場合に走行車両によつて軌道が受ける衝撃の大きさを論じた。しかし今回の実験結果を説明するためには不満の点が多いので次の諸点を訂正して計算をやり直した。

(i) 前論文においては左右の車輪が関連なくべつべつに上下運動をするように考えたが、本論文においては車軸がレールに平行な軸のまわりに回転振動をする場合を考察した。

(ii) 前論文においては車両のバネ下重量が自由に上下運動をする場合を取扱つたが、今回は担バネの摩擦による抵抗を考慮に入れた。

(iii) 前論文においては道床、路盤中における圧力の伝播を計算する場合に軌道の下方向及び横方向のみを考えたが、本論文においては軌道の長さ方向の伝播も考慮に入れて解析を行つた。

(iv) 前論文の解法は荷重の走行速度が0であるか、あるいは比較的に大きい場合〔前論文(2.16)または(2.19)式参照〕に限つて適用されるのであるが、今回はこの条件を含まず、従つて適用範囲が広くなつた。

6. 車軸の運動に関する基本式

左右のレール面に生じた不整部の形状をある基準点からの距離 x の函数としてあらわし、これを $h_1(x), h_2(x)$ とする。車両の走行速度を v とすれば左右の車輪の下におけるレール面の高低は $h_1(vt), h_2(vt)$ をもつて書きあらわすことができる。左右の車輪の下に生ずるレールのたわみ w_{10}, w_{20} は静荷重によるたわみ w_{s0} と衝撃によるたわみとよなる。左右車輪の上下運動 y_1, y_2 はレール面の高低とレールの衝撃によるたわみとの和となるので次式によつてあらわすことができる。ここに h_1, h_2, y_1, y_2 等はすべて下方向を正とする。

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= h_1 + w_{10} - w_{s0} \\ y_2 &= h_2 + w_{20} - w_{s0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

1個の車軸に作用する上下方向の力としては図-13に示すごとく左右の担バネより軸箱を通して車軸に加わる力 P_1, P_2 、車軸に作用する重力及び左右のレールより受ける反力 D_1, D_2 を考える要がある。左右のレールの中心間隔を G とし、左右の軸箱の間隔を mG とし、車軸の重量を M とし、車軸の中心点を通りレールと平行な軸のまわりの車軸の慣性能率を I とすれば車軸の上下運動及び廻転運動に関して次式が成立する。

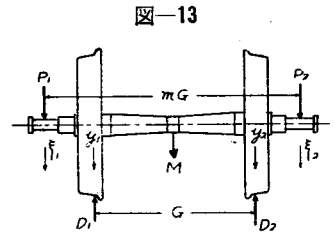


図-13

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2}{dt^2} \frac{y_1 + y_2}{2} &= g(P_1 + P_2 + M) - g(D_1 + D_2) \\ I \frac{d^2}{dt^2} \frac{y_1 - y_2}{G} &= gmG \frac{P_1 - P_2}{2} - gG \frac{D_1 - D_2}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

左右の軸函の位置における車軸の上下運動をそれぞれ ξ_1, ξ_2 (下方向を正とする) とすれば

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 &= y_1 + y_2 \\ \xi_1 - \xi_2 &= m(y_1 - y_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

一般に車両のバネ上重量はバネ下重量に較べてはるかに大きく、かつ多数の車軸の上にもまたがつているのでおのおのの車軸が高い振動数をもつてべつべつに上下運動をするときバネ上重量に上下運動または回転運動を伝えることはほとんどないと考えられる。従つて車軸の振動による担バネの伸びは ξ_1, ξ_2 によつてあらわすことができる。担バネの強さを K とし、また担バネの伸縮に対して伸縮の速度に比例する摩擦抵抗力が作用するとし、この比例の常数を R とする。左右の担バネに加わるバネ上重量を P_s とすれば

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_s - \left(K + R \frac{d}{dt} \right) \xi_1 \\ P_2 &= P_s - \left(K + R \frac{d}{dt} \right) \xi_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

以上の4式より次式が得られる。

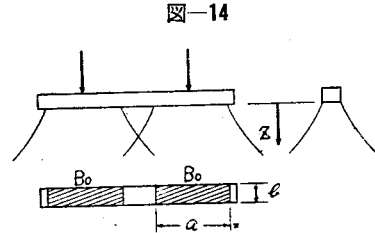
$$\left. \begin{aligned} D_1 + D_2 &= 2 P_s + M - \left(K + R \frac{d}{dt} + \frac{M}{2g} \frac{d^2}{dt^2} \right) (h_1 + h_2 + 2 w_{m0}) \\ D_1 - D_2 &= - \left\{ m^2 \left(K + R \frac{d}{dt} \right) + \frac{2I}{gG^2} \frac{d^2}{dt^2} \right\} (h_1 - h_2 + 2 w_{d0}) \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} 2 w_{m0} &= w_{10} + w_{20} - 2 w_{s0} \\ 2 w_{d0} &= w_{10} - w_{20} \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

7. 枕木より道床及び路盤へ荷重の伝播の型式

枕木が左右のレールより圧力を受けた場合にこの圧力は道床，路盤に伝播するが，図-14に示すごとく下にゆくほど広い範囲に拡がり，従つて単位面積当りの圧力は弱くなる。この分布の形状を次のごとく仮定する。



$$B = B_0 \exp(2\varphi z) \dots (7)$$

上式において B_0 は片側レール当りの枕木と道床との接触面積とし， B は枕木下面からの深さ z における分布面積とする。 φ は分布の形状を支配する係数である。

道床及び路盤を弾性体と考えて圧縮に対する弾性係数を k とするときレール支承体沈下係数 D は次式によつてあらわすことができる。ただしこの場合に枕木自体の圧縮を無視している。

$$D = 2\varphi k B_0 \dots (8)$$

上式によれば k, B_0, D の値がわかつていれば φ が求められるが，次に k の値が不明のときに φ, k の値を推定する方法を考案する。

ヤング係数 E' ，ポアソン比 σ を有する半無限弾性体の表面にある矩形領域（この矩形の相隣る2辺の長さを a, b とする）に q なる分布荷重があるときこの矩形領域の平均沈下量を Boussinesq の理論によつて計算すれば次式が得られる。

$$w = \frac{2(1-\sigma^2)}{\pi E'} q f \dots (9)$$

ただし

$$f = a \sinh^{-1} \frac{b}{a} + b \sinh^{-1} \frac{a}{b} - \frac{ab(3a^2 - 2ab + 3b^2)}{3\{a^3 + b^3 + (a^2 + b^2)^{3/2}\}} \dots (10)$$

荷重分布の形状を (7) 式のごとく仮定すれば

$$w = \frac{q}{2\varphi k} \dots (11)$$

となり，(9) 式による w と一致するためには φ は次の値をとる要がある。

$$\varphi = \frac{\pi E'}{4(1-\sigma^2)kf} \dots (12)$$

k は弾性体中の圧力と変形量との比としてあらわされる。種々の荷重分布型式について荷重を受ける地表面に近い箇所に対して k を計算し，この値を (12) 式に代入すれば枕木の寸法とポアソン比とより φ を計算することができる。

表-1 φ の計算式

	分布荷重	線荷重	集中荷重
k	$\frac{E'}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$	$\frac{E'}{(1+\sigma)(1-\sigma)}$	$\frac{E'}{(1+\sigma)(1-\frac{2}{3}\sigma)}$
φ	$\frac{\pi(1-2\sigma)}{4(1-\sigma)f}$	$\frac{\pi}{4f}$	$\frac{\pi(1-\frac{2}{3}\sigma)}{4(1-\sigma)f}$

以上の3つの場合のいずれが適当であるかは不明であるが，これらの3式によつて φ の大体の値を知ることができる。 φ を知れば (8) 式によつて k が決定される。

8. 道床及び路盤のたわみ運動

枕木より荷重を受けた道床及び路盤内に生ずる圧力を p とし、変位を w とする。道床及び路盤の変形に際しては変形の速度に比例する摩擦抵抗力が作用すると考え、比例の常数を r とする。枕木下面より下方向に z 軸をとれば

$$p = -k \frac{\partial w}{\partial z} - r \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \dots\dots\dots (13)$$

道床及び路盤の単位体積重量を ρ とし、(7) 式に示す面積 B 内に圧力が一様に分布すると仮定すれば

$$B \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -g \frac{\partial}{\partial z} (B p) \dots\dots\dots (14)$$

(13) 及び (14) 式より

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = g \left(2\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(k \frac{\partial w}{\partial z} + r \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \right) \dots\dots\dots (15)$$

$z=0$ とおけば Bp は枕木より道床に伝えられる圧力であるから、レールは道床より枕木を通して Bp なる反力を受ける。枕木間隔を L とすればレールの単位長さが受ける反力は Bp/L となり、レール鋼のヤング係数を E 、断面2次モーメントを J とすれば次式が得られる。

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{Bp}{L} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

ここに $w = \exp(\lambda x + \mu z + \nu t) \dots\dots\dots (17)$

とおいてこれを (15), (16) 式に代入すれば次式が得られる。

$$\rho \nu^2 = g(2\varphi + \mu)(k\mu + r\nu) \dots\dots\dots (18)$$

$$EJ\lambda^4 - \frac{B_0}{L} \mu(k+r\nu) = 0 \dots\dots\dots (19)$$

荷重とともに移動する座標に書き直すために

$$x = s + vt \dots\dots\dots (20)$$

$$\nu + \lambda v = \psi \dots\dots\dots (21)$$

とおけば (17) 式は

$$w = \exp(\lambda s + \mu z + \psi t) \dots\dots\dots (22)$$

となり、(18), (19), (21) 式より

$$\mu = -\varphi \pm \sqrt{\varphi^2 + \frac{\rho(\psi - \lambda v)^2}{g\{k+r(\psi - \lambda v)\}}} \dots\dots\dots (23)$$

$$EJ\lambda^4 - \frac{B_0}{L} \mu\{k+r(\psi - \lambda v)\} = 0 \dots\dots\dots (24)$$

(23) 式には複号が含まれるので1個の λ の値に対して μ の値は2個定まるが、軌道及び路盤に含まれる変形及び運動のエネルギーの総和が有限であることよりして $\mu + \varphi$ の実数部は負となることを要し、この条件を満足する値を採用する。 ψ の値が与えられたときには (23) 及び (24) 式によつて λ, μ が決まるがこの計算は煩雑であり、一般には

$$|\psi| \gg |\lambda v| \dots\dots\dots (25)$$

となる場合が多いので今後は上式が満足される場合を取扱う。 ψ に対して λv の1次の項のみを考慮し、2次以上を捨てれば (23) 式を変形して次式より μ が求められる。

$$\mu = -\mu_0 + \delta \lambda v \dots\dots\dots (26)$$

ただし
$$\mu_0 = \varphi + \sqrt{\varphi^2 + \frac{\rho\psi^2}{g(k+r\psi)}} \dots\dots\dots (27)$$

$$\delta = \frac{\rho\psi(2k+r\psi)}{2g(k+r\psi)^2(\mu_0 - \varphi)} \dots\dots\dots (28)$$

(24) 式より λ の値が4個求められ、これらを $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - i\epsilon \right) \lambda_0 \\ \lambda_2 &= \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}} + i\epsilon \right) \lambda_0 \\ \lambda_3 &= \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} - i\epsilon \right) \lambda_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

$$\lambda_4 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} + i\epsilon \right) \lambda_0$$

ただし λ_0 は次式を解いて得られる正の実数または第1象限内の複素数とする。

$$\lambda_0^4 = \frac{B_0 \mu_0 (k+r\psi)}{EJL} \dots\dots\dots (30)$$

また
$$\epsilon = \frac{B_0(\mu_0 r + k\delta + r\psi\delta)}{4EJL\lambda_0^3} v \dots\dots\dots (31)$$

(29) 式による $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ を (26) 式の λ に代入すればそれぞれの λ に対応する μ の値が得られる。これらの λ 及び μ を (22) 式に代入すれば w の一般解が得られる。すなわち

$$w = \Sigma [A_1 \exp\{\lambda_1(s+\delta vz) - \mu_0 z + \psi t\} + A_2 \exp\{\lambda_2(s+\delta vz) - \mu_0 z + \psi t\} + A_3 \exp\{\lambda_3(s+\delta vz) - \mu_0 z + \psi t\} + A_4 \exp\{\lambda_4(s+\delta vz) - \mu_0 z + \psi t\}] \dots\dots\dots (32)$$

上式における Σ は異なる ψ についての合計である。

(29) 式に示すごとく λ_1, λ_4 の実数部は正であり、 λ_2, λ_3 の実数部は負となるので $s \rightarrow \pm\infty$ において $w \rightarrow \infty$ とならないためには s の正負についてべつべつの式を用いる必要がある。荷重の位置を $s=0, z=0$ とし、左側レール及びこれより荷重を受ける道床、路盤については $s+\delta vz \leq 0$ の範囲内における w を w_{11} とし、 $s+\delta vz \geq 0$ の範囲内における w を w_{12} とすれば

$$\left. \begin{aligned} w_{11} &= \Sigma [A_{11} \exp\{\lambda_1(s+\delta vz) - \mu_0 z + \psi t\} + A_{14} \exp\{\lambda_4(s+\delta vz) - \mu_0 z + \psi t\}] \\ w_{12} &= \Sigma [A_{12} \exp\{\lambda_2(s+\delta vz) - \mu_0 z + \psi t\} + A_{13} \exp\{\lambda_3(s+\delta vz) - \mu_0 z + \psi t\}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

上式における積分常数 $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ は次の境界条件を満足する要がある。

$s+\delta vz=0$:

$$w_{11} - w_{12} = 0 \dots\dots\dots (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(w_{11} - w_{12}) = 0 \dots\dots\dots (35)$$

$s=0, z=0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}(w_{11} - w_{12}) = 0 \dots\dots\dots (36)$$

$$EJ \frac{\partial^3}{\partial s^3}(w_{11} - w_{12}) + D_1 = 0 \dots\dots\dots (37)$$

右側レール及びこれより荷重を受ける道床、路盤のたわみを w_{21}, w_{22} とすればこれらは w_{11}, w_{12} と同様な式であらわされ、また同様な境界条件によつて積分常数を定めることができる。

軌道及び路盤のたわみは静荷重によるたわみと衝撃によるたわみとよりなるが、 $s < 0$ 及び $s > 0$ の範囲における軌道及び路盤の静荷重によるたわみをそれぞれ w_{s1}, w_{s2} とし、 $w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}$ を書き換えれば

$$\left. \begin{aligned} w_{11} &= w_{s1} + w_{m1} + w_{d1} \\ w_{21} &= w_{s1} + w_{m1} - w_{d1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{12} &= w_{s2} + w_{m2} + w_{d2} \\ w_{22} &= w_{s2} + w_{m2} - w_{d2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

上式における $w_{m1}, w_{m2}; w_{d1}, w_{d2}$ は衝撃によつて軌道及び路盤に生ずるたわみをあらわし、このうち w_{d1}, w_{d2} は次式によつてあらわすことができる。

$$\left. \begin{aligned} w_{d1} &= \Sigma [A_{d1} \exp\{\lambda_1(s+\delta vz) - \mu_0 z + \psi t\} + A_{d4} \exp\{\lambda_4(s+\delta vz) - \mu_0 z + \psi t\}] \\ w_{d2} &= \Sigma [A_{d2} \exp\{\lambda_2(s+\delta vz) - \mu_0 z + \psi t\} + A_{d3} \exp\{\lambda_3(s+\delta vz) - \mu_0 z + \psi t\}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

$w_{s1}, w_{s2}, w_{m1}, w_{m2}$ も同様な式であらわすことができる。ただし w_{s1}, w_{s2} に関しては静荷重によるたわみであるから $\psi=0, \delta=0$ となる。

$w_{s1}, w_{s2}, w_{m1}, w_{m2}, w_{d1}, w_{d2}$ についても (34)~(37) 式と同様な境界条件によつて積分常数が決定される。このうち (37) 式の代りには次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} 2EJ \frac{\partial^3}{\partial s^3}(w_{s1} - w_{s2} + w_{m1} - w_{m2}) + D_1 + D_2 &= 0 \\ 2EJ \frac{\partial^3}{\partial s^3}(w_{d1} - w_{d2}) + D_1 - D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

(1), (6) 式における w_{s0}, w_{m0}, w_{d0} はそれぞれ $s=0, z=0$ における $w_{s1}=w_{s2}, w_{m1}=w_{m2}, w_{d1}=w_{d2}$ の値であることに注意すれば (41) 式に (5) 式を代入して次式が得られる。

$$2EJ \frac{\partial^2}{\partial s^3} (w_{s1} - w_{s2}) + 2P_s + M = 0 \dots\dots\dots (42)$$

$$2EJ \frac{\partial^2}{\partial s^3} (w_{m1} - w_{m2}) - \left(K + R \frac{d}{dt} + \frac{M}{2g} \frac{d^2}{dt^2} \right) (h_1 + h_2 + 2w_{m0}) = 0 \dots\dots\dots (43)$$

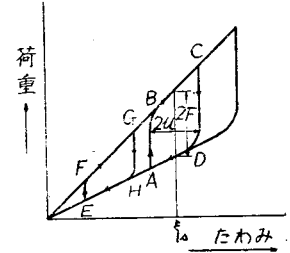
$$2EJ \frac{\partial^2}{\partial s^3} (w_{d1} - w_{d2}) - \left\{ m^2 \left(K + R \frac{d}{dt} \right) + \frac{2I}{gG^2} \frac{d^2}{dt^2} \right\} (h_1 - h_2 + 2w_{d0}) = 0 \dots\dots\dots (44)$$

h_1, h_2 の形状がわかつておれば以上の諸式を用いて積分常数が決定される。

9. 担バネの摩擦抵抗

(4) 式においてはバネの伸縮に対する摩擦抵抗力を伸縮の速度に比例すると仮定したが、実際に重ね板バネについて荷重たわみ試験を行った結果によれば摩擦抵抗力は伸縮の速度には関係せずほぼ一定である。しかし摩擦抵抗力は荷重の大きさにほぼ比例するので 図-15 に示すごとく大きな荷重を受けているときには担バネの伸縮に際し ABCD なる循環をなし、小さな荷重を受けているときには EFGH なる循環を画く。これらの循環の面積が摩擦によつて消費される仕事量であつて1回の伸縮に対し

図-15



$$W = 4uF \dots\dots\dots (45)$$

となる。ここに u は担バネの振動振幅であり、 F はバネの伸縮ともなる摩擦抵抗力とする。

さきに仮定したごとく摩擦抵抗力が伸縮の速度に比例するときには振幅 u 、振動数 $\omega/2\pi$ なる振動によつて消費される仕事量は毎回

$$W = \pi\omega R u^2 \dots\dots\dots (46)$$

となる。(45) 式による W と (46) 式による W とを等しいと置けば次式が得られる。

$$R = \frac{4F}{\pi\omega u} \dots\dots\dots (47)$$

10. レール方向を軸とした車軸の回転振動

図-1. 2 に示すごとく一般にレール面に生ずる波状磨耗は正弦波であらわすことができ、かつ左右のレールに生ずる波状磨耗の位相は 180° ずれている。いま左右のレールに生ずる波状磨耗の深さを等しいと仮定すれば左右のレール面は次式の実数部 (以後は実数部なる語を省略する) によつてあらわすことができる。

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= h \exp\left(\frac{i 2 \pi x}{S}\right) \\ h_2 &= -h \exp\left(\frac{i 2 \pi x}{S}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

上式において h は波状磨耗の深さの $1/2$ をあらわし、 S は周期をあらわす。車両の走行速度を v とすれば車輪の下におけるレール面の磨耗量は v/S なる振動数をもつて変化する。ここに

$$\frac{2 \pi v}{S} = \omega \dots\dots\dots (49)$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= h \exp(i \omega t) \\ h_2 &= -h \exp(i \omega t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

上式を (43) 式に代入すれば

$$w_{m1} = w_{m2} = 0 \dots\dots\dots (51)$$

となる。従つて (38), (39) 式によれば衝撃によつて左側レール及びこれより荷重を受ける道床、路盤に生ずるたわみは w_{d1}, w_{d2} によつてあらわされ、右側レールに対しては $-w_{d1}, -w_{d2}$ によつてあらわされる。

次に (50) 式を (44) 式に代入すれば (40) 式における ψ 及び積分常数が決定される。

$$\psi = i \omega \dots\dots\dots (52)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{d1} &= \left(\frac{1}{1-i} + i\sqrt{2} \varepsilon \right) A_0 \\ A_{d2} &= \left(\frac{1}{1+i} + i\sqrt{2} \varepsilon \right) A_0 \\ A_{d3} &= \left(\frac{1}{1-i} - i\sqrt{2} \varepsilon \right) A_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

$$A_{d_1} = \left(\frac{1}{1+i} - i\sqrt{2}\epsilon \right) A_0 \quad \Bigg\}$$

ただし A_0 は次式により計算せられ、 ϵ は (31) 式により求められる。

$$A_0 = \frac{\frac{2I}{gG^2}\omega^2 - i\omega m^2R - m^2K}{2\sqrt{2}EJ\lambda_0^3 - \frac{2I}{gG^2}\omega^2 + i\omega m^2R + m^2K} h \dots\dots\dots (54)$$

(27) 及び (30) 式に (52) 式を代入すれば

$$\mu_0 = \varphi + \sqrt{\varphi^2 - \frac{\rho\omega^2}{g(k+ir\omega)}} \dots\dots\dots (55)$$

$$\lambda_0^4 = \frac{B_0\mu_0(k+ir\omega)}{EJL} \dots\dots\dots (56)$$

(40) 式によれば左側車輪下のレールに生ずるたわみ w_{d_0} 、曲げモーメント M_{d_0} 、車輪圧力 D_d は次式によつて計算することができる。

$$\left. \begin{aligned} w_{d_0} &= A_0 \exp(i\omega t) \\ M_{d_0} &= EJ\lambda_0^2 A_0 \exp(i\omega t) \\ D_d &= 2\sqrt{2}EJ\lambda_0^3 A_0 \exp(i\omega t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

これらの振動振幅はそれぞれ $|A_0|$ 、 $|EJ\lambda_0^2 A_0|$ 、 $|2\sqrt{2}EJ\lambda_0^3 A_0|$ によつてあらわすことができる。静荷重による車輪圧力は $P_s + 0.5M$ であるから衝撃を受けた場合に車輪圧力が負にならないためには

$$|D_d| \leq P_s + 0.5M \dots\dots\dots (58)$$

となる要がある。(57) 式によつて $|D_d|$ を計算した結果上式が満足されないときには車輪圧力が負となる場合を生ずる。しかし実際上は負の車輪圧力は考えられないからこのときは車輪がレール面上を離れて飛び上りながら進むことになる。

(47) 式に示すごとく重ね板バネの摩擦抵抗力 R はバネのたわみ運動の振幅によつて異なるので (54) 式によつて A_0 を計算するにはまづ u の値を知る必要があり、次にこの計算方法を述べる。

w_{10} 、 w_{20} 、 w_{s0} 及び w_{d_0} はそれぞれ $s=0$ 、 $z=0$ における $w_{11}=w_{12}$ 、 $w_{21}=w_{22}$ 、 $w_{s1}=w_{s2}$ 及び $w_{d1}=w_{d2}$ であることに注意して (38)、(39)、(50)、(51) 及び (57) 式を (1) 及び (3) 式に代入すれば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= (h+A_0)\exp(i\omega t) \\ y_2 &= -(h+A_0)\exp(i\omega t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= m(h+A_0)\exp(i\omega t) \\ \xi_2 &= -m(h+A_0)\exp(i\omega t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60)$$

前述のごとくバネ上重量の上下動または廻転運動は非常に小さいと考えられるのでこれらを無視すれば左右の担バネの伸縮は上式による ξ_1 、 ξ_2 によつて示すことができる。さきに担バネの伸縮の振幅を u とおいたので (60) 式によつて得た振幅と一致するためには

$$u = m|h+A_0| \dots\dots\dots (61)$$

上式に (54) 式を代入すれば次式が得られる。

$$\left| \left(2\sqrt{2}EJ\lambda_0^3 - \frac{2I}{gG^2}\omega^2 + m^2K \right) u + i\frac{4m^2F}{\pi} \right| = 2\sqrt{2}EJ|\lambda_0|^3 mh \dots\dots\dots (62)$$

上式を解いて u が求められ、この u を (47) 式に代入して R が求められる。(62) 式を解いて得られた u の値は正であることを要し、このためには

$$\frac{4m}{\pi h} F < 2\sqrt{2}EJ|\lambda_0|^3 \dots\dots\dots (63)$$

となることを要する。バネの摩擦抵抗が大きくなり、この条件が満足されないときには $u=0$ となり、バネは全然伸縮をしない。従つて $R \rightarrow \infty$ となり、

$$A_0 = -h \dots\dots\dots (64)$$

$$w_{d_0} = -h \exp(i\omega t) \dots\dots\dots (65)$$

となる。

特に (63) 式及び次の二つの条件

$$r=0 \left. \begin{aligned} \omega &\leq \varphi \sqrt{\frac{gk}{\rho}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(66)$$

が同時に満足されるときには λ_0 は正の実数となり、 u は次式によつて求めることができ。

$$u = \frac{m \sqrt{(2\sqrt{2} EJ \lambda_0^3 h)^2 - \left(\frac{4mF}{\pi}\right)^2}}{\left| 2\sqrt{2} EJ \lambda_0^3 - \frac{2I}{gG^2} \omega^2 + m^2 K \right|} \dots\dots\dots(67)$$

この値を(47)式に代入して R を求め、さらに(60)式に代入すれば

$$\xi_1 = u \exp(i\omega t - i\alpha) \dots\dots\dots(68)$$

ただし $\sin \alpha = \frac{4m}{\pi h} \frac{F}{2\sqrt{2} EJ \lambda_0^3} \dots\dots\dots(69)$

また $\cos \alpha$ は次の(70)式右辺の分母と同符号とする。

(69)式によつて得た α を用いるときは(54)式は次のように書きかえられる。

$$A_0 = \frac{\left(\frac{2I}{gG^2} \omega^2 - m^2 K\right) h - \frac{4m}{\pi} F(\sin \alpha + i \cos \alpha)}{2\sqrt{2} EJ \lambda_0^3 - \frac{2I}{gG^2} \omega^2 + m^2 K} \dots\dots\dots(70)$$

前述のごとく $|A_0|$ によつて w_{d_0} の振幅があらわされ、(70)式によれば一般に ω が0に近いときに $|A_0|$ は最小となり、これより ω が増すとともに $|A_0|$ も増加する。しかし ω が次式を満足するに至れば

$$2\sqrt{2} EJ \lambda_0^3 - \frac{2I}{gG^2} \omega^2 + m^2 K = 0 \dots\dots\dots(71)$$

$|A_0| \rightarrow \infty$ となり、共振の起ることを示す。(67)式によればこのときに u もまた ∞ となる。しかし実際には $|A_0| \rightarrow \infty$ となる前に(58)式の条件が満足されなくなり、車輪はレール面を離れるので別途の解法を必要とする。また ω が増加して(66)式に示す限度を超せば(70)式の分母にも虚数が含まれ、共振を生ずることはない。

次に A_0 の偏角を求めればこれによつて波状磨耗の位相とレールのたわみ振動の位相との関係がわかる。(63)及び(66)式の条件が満足され、かつ共振に達する前であれば(70)式に示すごとく A_0 の偏角は常に第3または第4象限にある。従つてレールたわみ振動の位相は常に波状磨耗の位相より遅れている。(70)式よりこの遅れの角度を計算すれば ω が0に近いときに $\frac{\pi}{2} + \alpha$ となり、 ω が増すとともに遅れの角度は減り、共振周波数の直前において α となる。(57)式によれば λ_0 が実数の場合には M_{d_0} 、 D_d ともに w_{d_0} と同位相となる。

11. 計算例

前篇に述べた波状磨耗レールを例にとり、ワム23000型式貨車によつて軌道が受ける衝撃に関して計算を行い、これを実験結果に对照する。前述のごとくレールの磨耗がはなはだしいため平均の断面2次モーメントを計算した結果は $J=682 \text{ cm}^4$ となつた。枕木間隔を $L=71 \text{ cm}$ とし、レール支承体沈下係数を $D=20000 \text{ kg/cm}$ と仮定する。ワム23000型式貨車の自重は 9870 kg であり、積載荷重は 15000 kg である。空車または盈車の場合に静荷重によつてレールに生ずるたわみ w_{s_0} 、曲げモーメント M_{s_0} 及び車輪圧力 D_s を計算すれば表-2に示す数値が得られる。

図-14において片側レールに関して枕木より道床に圧力を伝える寸法として $a=80 \text{ cm}$ 、 $b=18 \text{ cm}$ とすれば $B_0=1440 \text{ cm}^2$ となる。表-1において分布荷重の場合とすれば $\varphi=0.009 \text{ cm}^{-1}$ が得られ、線荷重の場合とすれば $\varphi=0.016 \text{ cm}^{-1}$ が得られる。(8)式によつて k の値を計算すればそれぞれ $k=770 \text{ kg/cm}^2$ または 434 kg/cm^2 が得られる。道床及び路盤内の摩擦抵抗を無視して $r=0$ と置く。道床及び路盤の質量として $\rho=0.0018 \text{ kg/cm}^3$ と仮定する。レール面に生じた波状磨耗の周期を 40 cm とし、深さを 1 mm とすれば $h=0.05 \text{ cm}$ となる。列車速度を $40\sim 60 \text{ km/h}$ としたときの ω の値を(49)式によつて計算してこれを表-3、4に示した。

表-2 静荷重による影響
(ワム23000型式貨車)

		空 車	盈 車
w_{s_0}	cm	0.065	0.165
M_{s_0}	kgcm	41 500	105 000
D_s	kg	2 470	6 250

ワム23000型式貨車には12t長軸が使われているので1個の車軸及びこれに載る軸箱の重量の和は $M=1100 \text{ kg}$ であり、車軸の中心を通り、レール方向に平行な軸のまわりの慣性半径を 55 cm と仮定すれば⁹⁾、 $I=3.33 \times 10^6 \text{ kgcm}^2$ となる。左右レールの中心間距離は $G=110 \text{ cm}$ であり、左右の担バネ間の距離は 193 cm であるから

$m=1.755$ となる。担バネの強さを $K=1100 \text{ kg/cm}$ とすれば $m^2K=3400 \text{ kg/cm}$ となる。1個の担バネが受持つバネ上重量は空車の場合に 1920 kg となり、盈車の場合に 5670 kg となる。実験によれば担バネの伸縮に対する摩擦抵抗は担バネに加わる荷重の $20\sim 25\%$ となるをもつて空車に対しては $F=384 \text{ kg}$ とし、盈車に対しては $F=1134 \text{ kg}$ とする。

以上の数値を (55) 及び (56) 式に入れて μ_0 及び λ_0 を求め、これより (54) または (70) 式の各項を計算した結果を表-3, 4 に示した。

表-3 $\varphi=0.009 \text{ cm}^{-1}$ の場合

速 度	km/h	40	50	60
ω	sec ⁻¹	175	218	262
μ_0	cm ⁻¹	0.0119	0.0106 cis 32°10'	0.0128 cis 45°20'
λ_0	cm ⁻¹	0.0189	0.0184 cis 8°0'	0.0193 cis 11°20'
$2I\omega^2/(gG^2)$	kg/cm	17 100	26 700	38 600
$2\sqrt{2}EJ\lambda_0^3$	kg/cm	27 800	25 700 cis 24°10'	29 300 cis 34°00'

註: cis θ は $\cos \theta + i \sin \theta$ を示す

表-4 $\varphi=0.016 \text{ cm}^{-1}$ の場合

速 度	km/h	40	45	47
ω	sec ⁻¹	175	196	205
μ_0	cm ⁻¹	0.0273	0.0253	0.0249
λ_0	cm ⁻¹	0.0203	0.0199	0.0198
$2I\omega^2/(gG^2)$	kg/cm	17 100	21 600	23 600
$2\sqrt{2}EJ\lambda_0^3$	kg/cm	33 600	31 700	31 600

$\varphi=0.009 \text{ cm}^{-1}$, 速度 60 km/h の場合には $|\psi|=32.2 \text{ sec}^{-1}$ となり, $|\psi|=262 \text{ sec}^{-1}$ となるをもつて (25) 式の条件は満足されている。その他の場合にも同様に満足されている。前記の F の値を用いて (63) 式の左辺を計算すれば空車に対しては $4mF/\pi h=17100 \text{ kg/cm}$ となり、盈車に対しては 51600 kg/cm となる。表-3, 4 によれば空車の場合には常に (63) 式が満足されているが、盈車の場合には満足されていない。

次に空車の場合について計算を進めることとし、表-3 に示すごとく $\varphi=0.009 \text{ cm}^{-1}$ とし、速度 50 km/h 以上のときは (66) 式が成立しないので μ_0, λ_0 は複素数となる。(62) 式によつて u を解き、(47) 式によつて R を計算し、(54) 式によつて A_0 を求める。その他の場合には (69) 式によつて α を計算し、(70) 式によつて A_0 を求める。この値を (57) 式に代入すれば w_{d0}, M_{d0}, D_d が得られ、これらの数値を表-5, 6 に示した。ただしこれらの表には $\exp(i\omega t)$ を省略してある。

表-5 ワム 23000 型式空車によつて生ずる衝撃 ($\varphi=0.009 \text{ cm}^{-1}$)

速 度	km/h	40	50	60
u	cm		0.0714	0.0596
$\omega m^2 R$	kg/cm		21 100	25 300
α		38°20'		
A_0	cm	0.0491 cis (-77°0')	0.0496 cis (-132°10')	0.0503 cis (-140°20')
M_{d0}	kgcm	25 200 cis (-77°0')	24 200 cis (-116°50')	26 900 cis (-117°40')
D_d	kg	1 360 cis (-77°0')	1 280 cis (-108°00')	1 480 cis (-106°20')

表-6 ワム 23000 型式空車によつて生ずる衝撃 ($\varphi=0.016 \text{ cm}^{-1}$)

速 度	km/h	40	45	47
α		30°40'	32°50'	32°50'
A_0	cm	0.0391 cis (-71°30')	0.0627 cis (-58°20')	0.0794 cis (-52°50')
M_{d0}	kgcm	22 600 cis (-71°30')	35 300 cis (-58°20')	44 900 cis (-52°50')
D_d	kg	1 320 cis (-71°30')	1 990 cis (-58°20')	2 510 cis (-52°50')

表-5によれば $\varphi=0.009 \text{ cm}^{-1}$ とするとき衝撃によつてレールに生ずるたわみ、曲げモーメント及び車輪圧力はいずれも列車速度による影響が少なく、ほぼ一定であり、また静荷重による影響(表-2, 空車の場合)より小さいことが認められる。しかるに表-6によれば $\varphi=0.016 \text{ cm}^{-1}$ とし、列車速度が 45 km/h を越えるときは衝撃による影響が急に増加し、共振に近づくことが認められる。速度 47 km/h のときには衝撃によるレールのたわみ振動の振巾は波状磨耗の深さの1.6倍となり、衝撃によりレールに生ずる曲げモーメントは静荷重による曲げモーメントの1.1倍となる。衝撃による車輪圧力は静荷重をわずかに超えている。これ以上に速度が増加すれば車輪はレール面上を飛び上りながら進むので別途の解法を必要とする。従つて表-6に示す以上に衝撃が増加するかいなかは不明であるが一応 47 km/h のときに最大の衝撃を与えることとみなしてよい。表-6によれば衝撃によりレールに生ずる曲げモーメントは波状磨耗の位相より $53^\circ \sim 72^\circ$ おくれており、波状磨耗の上りかかりにおいて軌道に最大の衝撃を与えることとなり、実験に一致する。

以上の計算に示すごとく φ を適宜の値に仮定した場合には列車速度がある値に達すれば軌道は共振に近い振動をなす。これは第1編で述べた実験において客車及び空貨車による衝撃が大きいこと、特にレールのたわみ振動が波状磨耗の振巾の2倍近くに達することをよく説明することができる。

次に21000型式盈車について計算を行うこととし、このときには前述のごとく(63)式の条件が満足されない。よつて(64)式によつて A_0 を求め、(57)式によつて w_{d0} , M_{d0} , D_d を計算した結果を表-7に示す。

表-7 ワム 23000 型式盈車によつて生ずる衝撃

φ	cm^{-1}	0.009		0.016	
		40	50	40	50
速度	km/h				
w_{d0}	cm	0.05 cis(-180°)	0.05 cis(-180°)	0.05 cis(-180°)	0.05 cis(-180°)
M_{d0}	kgcm	25 600 cis(-180°)	24 400 cis(-164°)	29 500 cis(-180°)	27 100 cis(-180°)
D_d	kg	1 390 cis(-180°)	1 280 cis(-156°)	1 680 cis(-180°)	1 480 cis(-180°)

ここに得られた衝撃値は静荷重による影響(表-2 盈車の場合)に較べてはるかに小さく、第1編で述べた実験において盈車による衝撃が非常に小さいことをよく説明することができる。

表-7によれば $\varphi=0.016$ と仮定したときに衝撃によつてレールに生ずるたわみ、曲げモーメント及び車輪圧力の位相が波状磨耗の位相より 180° おくれていることを示している。これは波状磨耗の山において最大の衝撃値を与えることを意味しているが、実験において比較的に高速度の場合には軌道は波状磨耗の上りかかりにおいて最大の衝撃を受けたことと矛盾している。また実験において炭水車及び盈貨車は低速度のときに波状磨耗の下りかかりにおいても軌道に正の衝撃を与えるような記録を得たが、これも計算値より説明できない。しかし計算において盈車による衝撃の位相と空車による衝撃の位相とが大きく異なることは実験値の説明の手がかりとなるかも知れない。

以上の盈車に関する計算は摩擦抵抗が大きいバネの硬さを ∞ とした場合に等しいが、実際には貨車の担バネは車両全体としての動揺によつても伸縮するので、担バネの伸縮にともなう摩擦抵抗を車軸の廻転振動だけで受持つと仮定した計算方法に矛盾がある。よつてバネ伸縮の振巾が小さいときには F の値を多少下げるのが実際に近いと考えられる。

次に機関車動輪より軌道に及ぼす衝撃について計算を行う。一般に機関車の各車輪の担バネは釣合バリによつて連絡されており、各車輪が車体より受ける垂直荷重は常に一定である。またレール面の不整その他の原因によつて1個の車輪の担バネのたわみが増すときには釣合バリを通して隣の車輪の担バネのたわみも増加する。D 51 型機関車においては第3,4 動輪及び従輪の担バネが釣合バリによつて連絡されているためこれらのバネの強さとしては1個のバネの強さの1/3と考へてよい。担バネの摩擦抵抗についても釣合バリの作用を考慮することを要し、隣の車輪の上下動が反対の位相にあるときにはバネは全然たわまずに上下動を生ずることができ、同位相のときは釣合バリがないとして各車輪の上下動が関連なく生ずるとした場合に等しい。これらをあわせて考察すれば結局担バネの摩擦抵抗が1/2となつたと考へてよい。

D 51 型機関車第3 動輪の担バネには $4 775 \text{ kg}$ の静荷重が加わつており、バネの伸縮に対する摩擦抵抗を荷重の20%とみなせば上記の理由によつてこの1/2を採り、結局 $F=477 \text{ kg}$ としてよい。担バネ1個の強さは $1 500 \text{ kg/cm}$ となるをもつて前記の理由によりこの1/3をとり、 $K=500 \text{ kg/cm}$ とする。第3 動輪のバネ下重量は $M=4 680 \text{ kg}$ であり、この車軸の中心を通り、レール方向を軸とした慣性半径を 50 cm と仮定すれば $I=11.7 \times 10^6 \text{ kgcm}^2$ となる。機関車動軸は左右車輪の内側で軸箱を通して垂直荷重を受け、 $mG=78 \text{ cm}$ となるをもつて $m=$

0.709 となる。これより $4mF/(\pi h) = 8600 \text{ kg/cm}$ をうる。貨車の場合と同様に $r=0$, $\varphi=0.016 \text{ cm}^{-1}$ とし、列車速度を 28 km/h として計算を進めれば (66) 式が満足されているので μ_0, λ_0 ともに実数となる。

$$m^2 K = 250 \text{ kg/cm}$$

$$2I\omega^2/(gG^2) = 29400 \text{ kg/cm}$$

$$2\sqrt{2}EJ\lambda_0^3 = 35900 \text{ kg/cm}$$

となり、(63) 式は満足されている。(70) 式によつて A_0 を求め、(57) 式によつて衝撃による影響を計算し、これらを静荷重に比較すれば表-8 に示す数値が得られる。ただしここには隣接荷重による影響が省略されている。

表-8 D51 型機関車第 3 動輪による影響

		静荷重	衝撃
たわみ	cm	0.192	0.209 cis(-17°10')
曲げモーメント	kgcm	121800	129700 cis(-17°10')
車輪圧力	kg	7260	7530 cis(-17°10')

表-8 によれば列車速度 28 km/h ですでに衝撃による車輪圧力は静荷重による車輪圧力を越え、共振に近い振動を生じていることがわかる。衝撃によつてレールに生ずるたわみ、曲げモーメントはともに静荷重によるものに近い。これ以上に列車速度が大きくなれば車輪はレール面から飛び上り、この場合に対しては別途の解法を必要とする。比較的低速度の実験においても機関車動輪による衝撃は非常に大きく、以上の計算値は実験結果をよく説明することができる。

12. 考察並びに結論

以上に示した計算式並びに計算例は実験結果をよく説明なしうるが、次の諸点について特に考慮を払う必要がある。

(i) 第 8~11 章に説明した衝撃の計算式並びに計算例は車輪が常にレール面に接触している場合に限つて適用され、衝撃が大きく車輪がレール面を離れる場合については適用できない。従つて比較的に低速度の場合の衝撃を計算できるに過ぎず、高速度の場合に関しては今後の研究によつて解決する予定である。

(ii) φ の値をいくらに選ぶかについて疑義があり、この値が衝撃値にも大きな影響をもつ。実際の軌道においても路盤の状態によつて φ の値は広い範囲に変化すると考えられる。

(iii) 前章の計算例によればバネの強さ K を含む項は他の項に較べて非常に小さいのでこれを無視してもさしつかえのないことがわかる。しかるにバネの摩擦抵抗は軌道及び路盤の振動振幅決定に大きな影響を持つている。

(iv) 前述の計算式においては担バネの摩擦抵抗 F はこのバネが負担する静荷重に比例し、バネの伸縮の振幅には無関係とみなしたが、振幅が小さい場合にはこの点に疑問がある。バネの伸縮は車輪が波状磨耗を通過するときの上下動によつて起るだけでなく、車両全体の上下動、ローリングその他にもなつて起るので摩擦抵抗 F をその一つだけの振動が負担するとは考えられない。従つて波状磨耗によるバネの伸縮の振幅が小さいときには F は減少すると考えるのが適当である。このときにはむしろ摩擦抵抗が振動速度に比例するとみなしてよい。

(v) 計算式によれば車両の速度がある値に達すれば軌道及び路盤の振動振幅が ∞ に達することがある。実際にはこの前に車輪がレール面を離れるのでこのようなことは起らないが、この速度に近づくと振動振幅が急激に増すことに注意する必要がある。実験においても列車速度が 30 km/h から 50 km/h に増加する間に衝撃が急に増したがこれは以上の理由によつて説明される。

(vi) 前章の計算例に示したごとくバネ下重量の大きい車両特に機関車においては比較的低速度においてこの限界速度に達することをを知る。

以上を総合して考察すれば機関車、客車及び 2 軸ボギー貨車は波状磨耗を生じたレール面を通過するとき共振に近い上下動を生じ、軌道及び路盤に非常に大きな衝撃を与えることがある。この衝撃はレールその他に振動数の多い繰返し荷重を加えて材料の疲労破壊を促進させると同時に道床を弛め、道床及び路盤の沈下を増加する。またレール面に大きな衝撃を加えるので波状磨耗を促進させる原因となる。これに反して一般に 2 軸貨車の担バネには重ね板バネが使用されており、バネに加わる荷重の大きいときには板の間の摩擦抵抗によつて振動を軽減する作用がある。旅客線と貨物線と並行してあるとき旅客線において波状磨耗の進行が速いのは以上の理由によると思われる。

重ね板バネにおいても機関車のごとくバネ下重量が大きく、かつ前後の車輪の担バネが釣合バリーで連絡されて

いるとき、または空貨車のごとくバネのたわみの少ないときには制振作用が少く、軌道に大きな衝撃を加えることがある。

これらのバネ特に客車におけるコイルバネに並列して制振装置をつけることができれば波状磨耗によつて軌道に与える衝撃の緩和に役立つ、また波状磨耗の進行をとめるのにも大きな効果があると考えられる。

終りに本研究は昭和28年度文部省科学研究費を受け、また鉄道技術研究所及び金沢鉄道管理局金沢保線区より多大の御援助を受けて行つたものであることを記しここに深く感謝する。抵抗線ひずみ計による測定装置の作製及び記録には金沢大学工学部教官波田敏雄氏、柳場重正氏、林安雄氏の御協力を受けた。あわせて感謝する。

参 考 文 献

- 1) 小林勇外：電車荷重によるレールの衝撃応力に関する実験的研究，土木学会誌第37巻第5号
佐藤裕：軌道強さに及ぼす列車速度の影響，鉄道業務研究資料第9巻第13号
川又久夫，佐藤裕：軌道継目部の衝撃についての実験と考察
- 2) A.R.E.A. Bulletin 418, Seventh Progress Report Committee on Stresses in Railroad Track, V. Miscellaneous Tests
八十島義之助：敷設レールの活荷重応力について，土木学会誌第35巻第9号
- 3) 都市鉄道のレールに発生する波状磨耗の波長は45~75mmである，景山質：軌条波状磨耗の状況及びその原因，土木学会誌第16巻第12号参照
- 4) 上記論文及び第7回保線講演会記録（日本国有鉄道施設局）284ページによれば波状磨耗の甚だしい場合には左右レールの山と谷とが相反することが報告されている。
- 5) この後に12t長軸を2本吊り振子として吊下げ，車軸と垂直をなす軸のまわりの慣性半径を測定した結果によれば57.5cmとなつていた。（津田沼線路試験区において測定）

(昭.29.7.19)

河川, 測量, 水理

洪水追跡用アナログ・コンピューターについて*

正員 工学博士 石原 藤次 郎**
准員 石原 安雄***

ON AN ELECTRONIC ANALOG COMPUTER FOR FLOOD ROUTING

(Trans. of JSCE, No. 24, April, 1955)

Dr. Eng., Tōjirō Ishihara, C.E. Member,
Yasuo Ishihara, C.E. Assoc. Member.

Synopsis The flood is a very complex phenomenon. According to Dr. Hayami's theory of flood waves, however, which takes into account the complex features of river, the fundamental equation becomes, approximately,

$$\frac{\partial H}{\partial t} + A \frac{\partial H^{3/2}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 H}{\partial x^2},$$

where H : water depth, t : time, x : distance, and A, μ : numerical constants. In this paper, a method to imitate this equation by electric circuits and to construct them was mentioned, that is, an electronic analog computer was designed and constructed. Using this computer, the authors obtained some solutions of flood waves, and discussed the characteristics of flood and the significance of constants A and μ of the equation mentioned above. As an example, the results of actual flood routing for the Kiso River were explained and it was found that this computer had a good accuracy.

要旨 洪水は非常に複雑な現象であるが、速水博士の洪水理論によると、大局的に見た洪水波に対する基礎方程式は、近似的に次式であらわされる。

$$\frac{\partial H}{\partial t} + A \frac{\partial H^{3/2}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \dots \dots \dots (1.1)$$

ここに、 H : 水深, t : 時間, x : 距離, A および μ : 常数である。著者等はこの方程式を電氣的に模擬する方法

* 昭.29.5.30, 第10回土木学会年次学術講演会にて一部発表

** 京都大学教授, 工学部土木工学教室

*** 神戸大学助教授, 工学部土木工学教室