逆行列に関する二，三の公式

正員　四野宮哲郎*
正員　大地羊三**

ON THE FORMULAES WITH RESPECT TO REVERSED MATRICES OF SPECIAL TYPES

(Trans. of JSCE, No. 24, Feb. 1954)

Tetsurō Shinomiya, C.E. Member, Yōzō Ōchi, C.E. Member

Synopsis In order to save the labour of numerical solution of linear equations in applied mechanics, the authers introduced several formulas with respect to the reversed matrices of special types, as follow mentioned

(1) Fundamental formula ; $(A+\alpha\cdot\beta)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}\alpha(E+\beta A^{-1}\alpha)^{-1}\beta A^{-1}$ where A, α and β are nn, ni and in matrices respectively, and E is unit matrix.

(2) The formulaes to require the reversed matrix of $\mathfrak{A}$, where the matrix $\mathfrak{A}$ is slightly differ from a matrix A, of which reversed matrix is known,

(3) The formula of reversed matrix of Continuand matrix, which effective specially to solve continious beams.

要旨 一つの行列 $A=[\alpha_{ik}]$ の逆行列 $A^{-1}=[\rho_{ik}]$ が既知の場合，A と少し異なる行列の逆行列を求める公式を誘導し，二，三の応用例を示したものである。

1. 緒　　言

構造力学では連立一次方程式を解く機会が非常に多い。特に土木構造物では荷重が移動するので，任意の荷重状態に対して方程式を解く必要が生ずる。この場合，連立一次方程式を行列表示とし，その係数行列の逆行列を求めておくと便利である。上記の理由から，実際問題に役立ちそうな二，三の公式を誘導してみた。

2. 公式の誘導

(1) 基本公式　Aをn行n列の行列（以下簡単に nn 行列と云う），β, γ をそれぞれ ni 行列，in 行列とすると，行列 $[A+\beta\cdot\gamma]$ の逆行列は次のごとく表わされる。ただし E は単位行列とする。

$$[A+\beta\cdot\gamma]^{-1}=A^{-1}-A^{-1}\beta[E+\gamma A^{-1}\beta]^{-1}\gamma A^{-1} \quad\cdots\cdots(1)$$

ゆえに A の逆行列 A^{-1} が既知の場合には，この公式を用いて $[A+\beta\cdot\gamma]$ の逆行列を求めることができる。

この公式は直接証明することもできるが，簡単には右辺に $[A+\beta\cdot\gamma]$ をかけて見ればよい。(1) 式の右辺に $[A+\beta\cdot\gamma]$ をかけると単位行列 E となる。ゆえに公式の右辺は $[A+\beta\cdot\gamma]^{-1}$ に等しい。

(2) $A=[\alpha_{ik}]$ の逆行列 $A^{-1}=[\rho_{ik}]$ が既知のとき A と第x行第y列の要素（以下簡単に xy 要素と云う）が ε_{xy} だけが異なる他の行列 $\mathfrak{A}$ の逆行列を求めること

$$\mathfrak{A}=A+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \varepsilon_{xy}\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}[0\cdots E\cdots 0]$$

ただし右辺第二項の前半はx番目の要素だけが ε_{xy} であり他はすべて0である $n1$ 行列，また後半はy番目の要素だけが E（単位行列）で他はすべて0である $1n$ 行列とする。(1) 式を用い $A^{-1}=[\rho_{ik}]$ なることを考慮すると，

$$\mathfrak{A}^{-1}=[\rho_{ik}]-\begin{pmatrix}\rho_{1x}\\ \vdots\\ \rho_{nx}\end{pmatrix}\varepsilon_{xy}[E+\rho_{yx}\varepsilon_{xy}]^{-1}[\rho_{y1}\cdots\rho_{yn}] \quad\cdots\cdots(2)$$

(3) A^{-1} が既知のとき A の一行一列を取除いた行列の逆行列を求めること。

まづ特別な場合としてAの第n行第n列を除いた行列 A_{n-1} の逆行列を求める。

$b=[\alpha_{1n}\cdots\cdots\alpha_{n-1,n}]$，$b'=\begin{pmatrix}\alpha_{n1}\\ \vdots\\ \alpha_{n\,n-1}\end{pmatrix}$ とすると

* 岐阜大学工学部
** 鉄道技術研究所

$$A=\begin{bmatrix}A_{n-1} & b'\\ b & \alpha_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{n-1} & 0\\ b & \alpha_{nn}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -b'\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{n-1} & 0\\ b & \alpha_{nn}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}b'\\ 0\end{bmatrix}[0\ \ -E]$$

と書けるから，(1) 式を用いると

$$\begin{bmatrix}A_{n-1} & 0\\ b & \alpha_{nn}\end{bmatrix}^{-1}=\left[A+\begin{bmatrix}b'\\ 0\end{bmatrix}[0\ \ -E]\right]^{-1}=[\rho_{ik}]-\left[\sum_{l=1}^{n-1}\rho_{il}\alpha_{ln}\right]\left[E-\sum_{l=1}^{n-1}\rho_{nl}\alpha_{ln}\right]^{-1}[-\rho_{nk}]$$

しかるに ρ_{ik} は A の逆行列の要素であるから

$$\sum_{l=1}^{n}\rho_{il}\alpha_{lk}=E\ (i=k\ の場合),\quad 0\ (i\neq k\ の場合)$$

なる関係がある。ゆえに上式は次のごとくなる。

$$[\rho_{ik}]-\begin{bmatrix}-\rho_{in}\alpha_{nn}\\ E-\rho_{nn}\alpha_{nn}\end{bmatrix}[E-[E-\rho_{nn}\alpha_{nn}]][-\rho_{nk}]=[\rho_{ik}]-\begin{bmatrix}\rho_{in}\\ \rho_{nn}-\alpha_{nn}{}^{-1}\end{bmatrix}\rho_{nn}{}^{-1}[\rho_{nk}]$$

後で述べる (4) 式を参照すれば，A_{n-1} の逆行列としては，上式で初めの $n-1$ 次対角小行列を取ればよいことがわかる。

次に取除く項が第 n 行第 n 列でない場合は，行または列を入れかえることによつて，上の場合に帰着せしめることができる。ゆえに第 x 行第 y 列を取除いた場合は，A_{xy}, $[\rho_{ih}]_{yx}$ をそれぞれ A の第 x 行第 y 列，A^{-1} の第 y 行第 x 列を取除いた $n-1$, $n-1$ 行列として，次のごとく表わすことができる。

$$A_{xy}^{-1}=[\rho_{ik}]_{yx}-\begin{pmatrix}\rho_{1x}\\ \vdots\\ \rho_{y-1x}\\ \rho_{y+1x}\\ \vdots\\ \rho_{nx}\end{pmatrix}\rho_{yx}{}^{-1}[\rho_{y1}\cdots\cdots\rho_{y,x-1}\rho_{y,x+1}\cdots\cdots\rho_{yn}]\ \cdots\cdots(3)$$

(4) A^{-1} 既知のとき A に一行一列を付加えた行列の逆行列を求めること。

行だけを付加えたときには

$$\begin{bmatrix}A & 0\\ b & a\end{bmatrix}^{-1}=\left[\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ b\end{bmatrix}[E\ 0]\right]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}A^{-1} & 0\\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ a^{-1}b\end{bmatrix}[E+0]^{-1}[A^{-1}\ 0]=\begin{bmatrix}A^{-1} & 0\\ -a^{-1}bA^{-1} & a^{-1}\end{bmatrix}\ \cdots\cdots(4)$$

さらに列を付加えると

$$\begin{bmatrix}A & b'\\ b & a\end{bmatrix}^{-1}=\left[\begin{bmatrix}A & 0\\ b & a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b'\\ 0\end{bmatrix}[0\ E]\right]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}A^{-1} & 0\\ -a^{-1}bA^{-1} & a^{-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}A^{-1}b'\\ -a^{-1}bA^{-1}b'\end{bmatrix}[E-a^{-1}bA^{-1}b']^{-1}[-a^{-1}bA^{-1},a^{-1}]$$

$$=\begin{bmatrix}A^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A^{-1}b'\\ -E\end{bmatrix}[a-bA^{-1}b']^{-1}[bA^{-1},-E]\ \cdots\cdots(5)$$

特別な場合として A が対角行列の場合には，

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0 & \alpha_{13}\\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}^{-1} & 0 & 0\\ 0 & \alpha_{22}^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_{11}^{-1}\alpha_{13}\\ \alpha_{22}^{-1}\alpha_{23}\\ -E\end{pmatrix}[\alpha_{33}-\alpha_{31}\alpha_{11}{}^{-1}\alpha_{13}-\alpha_{32}\alpha_{22}{}^{-1}\alpha_{23}]^{-1}[\alpha_{31}\alpha_{11}{}^{-1},\ \alpha_{32}\alpha_{22}{}^{-1},\ -E]$$

上式において行及び列を入れかえ，サフィックスを取りかえて式を整理すると

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & 0\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{-1}\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0 & 0\\ 0 & \alpha_{22} & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ -E\\ \alpha_{32}\end{pmatrix}N^{-1}[\alpha_{21},\ -E,\ \alpha_{23}]\right\}\begin{pmatrix}\alpha_{11}^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_{33}^{-1}\end{pmatrix}\cdots\cdots(5')$$

ただし，$N=\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{11}{}^{-1}\alpha_{12}-\alpha_{23}\alpha_{33}{}^{-1}\alpha_{32}$ である。この (5′) 式は α_{11}, α_{33} の逆が解つている場合に用いると便利である。

(5) Continuant Matrix の逆行列を求めること[1]。

(5′) 式の左辺を一般化した行列，すなわち対角線上及びその一つ上・一つ下の要素だけが 0 でなく他はすべて 0 となる行列を Continuant Matrix と云う。この形の行列は構造力学にしばしば表われるものである。

Continuant Matrix の逆行列は，(5) 式を反復適用する事によつて次のごとく表わすことができる。

1) 土木学会第 5 回年次学術講演会

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1' & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2' & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & a_n \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} E & \lambda_1' & \lambda_1'\lambda_2' \cdots\cdots & (\lambda_1'\cdots\lambda_{n-1}') \\ 0 & E & \lambda_2' \cdots\cdots & (\lambda_2'\cdots\lambda_{n-1}') \\ 0 & 0 & E \cdots\cdots & (\lambda_3'\cdots\lambda_{n-1}') \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1^{-1} & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & M_2^{-1} & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & M_3^{-1} \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & M_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ \lambda_1 & E & 0 \cdots\cdots & 0 \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2 & E \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ (\lambda_{n-1}\cdots\lambda_1) & (\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2) & (\lambda_{n-1}\cdots\lambda_3) \cdots\cdots & E \end{pmatrix} \cdots (6)$$

ただし　$M_i = a_i - b_{i-1}M_{i-1}{}^{-1}b_{i-1}'$, $(M_1 = a_1)$;　$\lambda_i = -b_i M_i{}^{-1} = -b_i[a_i + \lambda_{i-1}b_{i-1}']^{-1}$

$\lambda_i' = -M_i{}^{-1}b_i' = -[a_i + b_{i-1}\lambda_{i-1}']^{-1}b_i'$

さらに特別な場合として，Continuant Matrix の各要素 a_i, b_i 等がすべて正方小行列である場合には，

$$\sum_{l=i}^{n}(\lambda_i'\lambda_{i+1}'\cdots\cdots\lambda_{l-1}'M_l{}^{-1}\lambda_{l-1}\lambda_{l-2}\cdots\cdots\lambda_i) = \mu_i{}^{-1}\mu_{i+1}{}^{-1}\cdots\cdots\mu_{n-1}{}^{-1}M_n{}^{-1}\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\cdots\lambda_i$$

$$= \lambda_i'\lambda_{i+1}'\cdots\cdots\lambda_{n-1}'M_n{}^{-1}\mu_{n-1}'^{-1}\mu_{n-2}'^{-1}\cdots\cdots\mu_i'^{-1}$$

$$\mu_i'\cdots\cdots\mu_{n-1}'M_n\lambda_{n-1}'^{-1}\cdots\cdots\lambda_i'^{-1} = \lambda_i{}^{-1}\cdots\cdots\lambda_{n-1}{}^{-1}M_n\mu_{n-1}\cdots\cdots\mu_i$$

$$= M_i - b_i'N_{i+1}{}^{-1}b_i = N_i - b_{i-1}M_{i-1}{}^{-1}b_{i-1}' \equiv D_i$$

ただし　$N_i = a_i - b_i'N_{i+1}{}^{-1}b_i$,　$(N_n = a_n)$;　$\mu_i = -N_{i+1}{}^{-1}b_i = -[a_{i+1} + b_{i+1}\mu_{i+1}]^{-1}b_i$

$\mu_i' = -b_i'N_{i+1}{}^{-1} = -b_i'[a_{i+1} + \mu_{i+1}b_{i+1}]^{-1}$;　M_i, λ_i, λ_i' は前出

なる関係があるから，求める逆行列は次のごとく表わすことができる。

$$\begin{pmatrix} (\mu_1{}^{-1}\cdots\mu_{n-1}{}^{-1}M_n{}^{-1}\lambda_{n-1}\cdots\lambda_1) & (\lambda_1'\cdots\lambda_{n-1}'M_n{}^{-1}\mu_{n-1}'^{-1}\cdots\mu_2'^{-1}) \cdots\cdots & (\lambda_1'\cdots\lambda_{n-1}'M_n{}^{-1}) \\ (\mu_2{}^{-1}\cdots\mu_{n-1}{}^{-1}M_n{}^{-1}\lambda_{n-1}\cdots\lambda_1) & (\mu_2{}^{-1}\cdots\mu_{n-1}{}^{-1}M_n{}^{-1}\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2) \cdots\cdots & (\lambda_2'\cdots\lambda_{n-1}'M_n{}^{-1}) \\ (\mu_3{}^{-1}\cdots\mu_{n-1}{}^{-1}M_n{}^{-1}\lambda_{n-1}\cdots\lambda_1) & (\mu_3{}^{-1}\cdots\mu_{n-1}{}^{-1}M_n{}^{-1}\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2) \cdots\cdots & (\lambda_3'\cdots\lambda_{n-1}'M_n{}^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (M_n{}^{-1}\lambda_{n-1}\cdots\lambda_1) & (M_n{}^{-1}\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2) \cdots\cdots & (M_n{}^{-1}) \end{pmatrix}$$

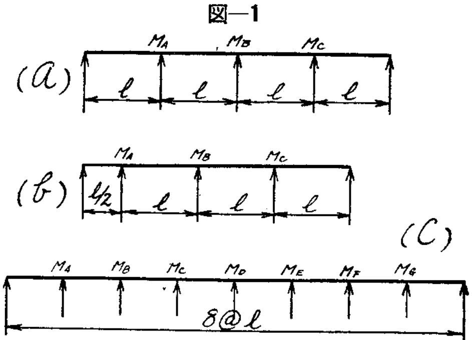
$$= \begin{pmatrix} E & \lambda_1' & \lambda_1'\lambda_2' \cdots\cdots (\lambda_1'\cdots\lambda_{n-1}') \\ \mu_1 & E & \lambda_2 \cdots\cdots (\lambda_2'\cdots\lambda_{n-1}') \\ \mu_2\mu_1 & \mu_2 & E \qquad \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ (\mu_{n-1}\cdots\mu_1) & (\mu_{n-1}\cdots\mu_2) \cdots\cdots & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1{}^{-1} & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & D_2{}^{-1} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & D_n{}^{-1} \end{pmatrix} \cdots\cdots (6)'$$

3. 応用例

(1) 図—1 (a) のごとき，連続バリの支点モーメント $M_A M_B M_C$ に対する3モーメント方程式の係数行列及びその逆行列は次のごとくである。

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 15 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

図—1



この連続バリにおいて，第一径間の径間長が半減すると係数行列は　$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$　となる。

この逆行列は，(2) 式において $\varepsilon_{11} = -1$ とおけばよい。

ゆえに　$\mathfrak{A}^{-1} = \dfrac{1}{56}\begin{pmatrix} 15 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 15 \end{pmatrix}$

$$-\frac{1}{56}\begin{pmatrix} 15 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}(-1)\left[1 + \frac{15}{56}(-1)\right]^{-1}\frac{1}{56}[15, -4, 1] = \frac{1}{574}\begin{pmatrix} 210 & -56 & 14 \\ -56 & 168 & -42 \\ 14 & -42 & 154 \end{pmatrix}$$

(2) 図—1 (a) の解を知つて，図—1 (c) の8連連続バリの解を求める場合には，$M_A M_B \cdots\cdots M_G$ に対する係数行列が次のごとくなるから

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

之を点線のように小行列に分け

$$\alpha_{11}^{-1}=\alpha_{33}^{-1}=\frac{1}{56}\begin{pmatrix} 15 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

とおいて (5′) 式を適用すれば，容易に逆行列が得られる。(以下計算省略)

(3) 図—2 (a) のごとき4径間固定脚ラーメンの中間3節点の撓角 $\theta_1\theta_2\theta_3$ に対する解を知つて，同図 (b) のように中央の柱が $(1+\mu)$ 倍となつた場合の解を求めるには次のごとくすればよい。

図—2 (a) の場合の係数行列は

$$A=\begin{pmatrix} \rho_1 & \xi_2 & 0 \\ \xi_2 & \rho_2 & \xi_3 \\ 0 & \xi_3 & \rho_3 \end{pmatrix}$$ ただし $\xi_i=I_i/l_i(i=1\sim4)$, $I_i/h(i=5\sim7)$

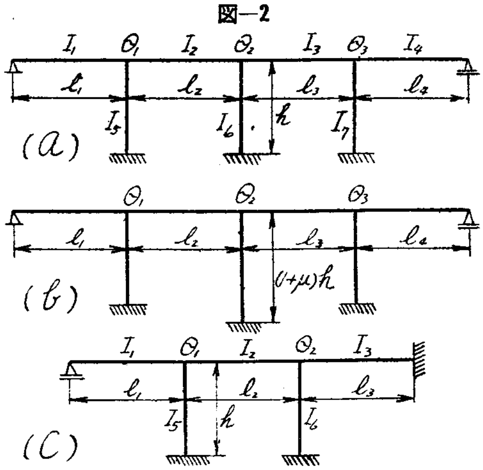
$$\rho_1=2(\xi_2+\xi_5)+1.5\,\xi_1$$
$$\rho_2=2(\xi_2+\xi_3+\xi_6)$$
$$\rho_3=2(\xi_3+\xi_7)+1.5\,\xi_4$$

この解 (逆行列) は (5′), (6), (6′) 式を用いて求めることができる。もし A^{-1} が解けているならば，図—2 (b) の係数行列は

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix} \rho_1 & \xi_2 & 0 \\ \xi_2 & \rho_2-\dfrac{\mu\xi_5}{1+\mu} & \xi_3 \\ 0 & \xi_3 & \rho_3 \end{pmatrix}$$

であるから (2) 式において $\varepsilon_{22}=-\mu\xi_5/(1+\mu)$ とおけばよい。

図—2



(4) 図—2 (c) のラーメンの $\theta_1\theta_2$ に対する係数行列は，

$$A_{33}=\begin{bmatrix} \rho_1 & \xi_2 \\ \xi_2 & \rho_2 \end{bmatrix}$$

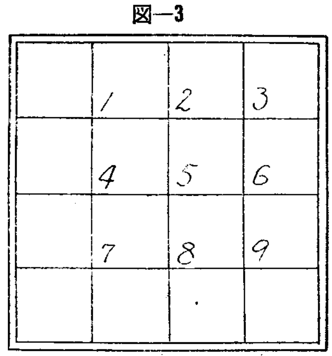
であるから，図—2 (a) の解がわかつている場合には，(3) 式を用いて A_{33} の逆行列を求めることができる。

(5) 図—3 のごとき周辺自由支承正方形平板を階差法によつて解く場合，各格点のたわみを求める方程式の係数行列は

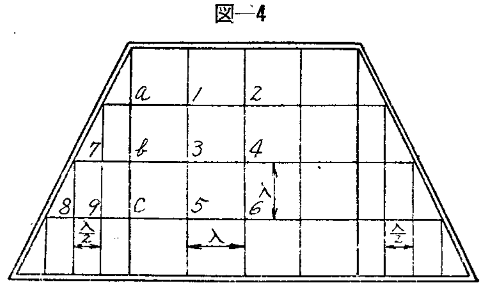
$$\begin{array}{cc} \text{格点}\cdots & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} 18 & -8 & 1 & -8 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 19 & -8 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 18 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 & 19 & -8 & 1 & -8 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & -8 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 1 & -8 & 19 & 0 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 & 18 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -8 & 2 & -8 & 19 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 1 & -8 & 18 \end{pmatrix} \end{array}$$

また中点 (格点5) を支えた場合の係数行列は，ちょうど中央の一行，一列を除いたものになる。ゆえに A の解がわかつている場合には，中点を支えた場合の解は (3) 式を用いて

図—3



図—4



求めることができる。

（6） 図—4 のごとき周辺自由支承梯形平板の場合，係数行列は次のごとくなる。これを点線のごとく小行列に分ければ，(5′)，(6′) 式を適用することによつて解を求めることができる。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & a & b & c & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
A= & \left(\begin{array}{cccccc|ccc|ccc}
4 & -1 & -1 & & & & -1 & & & & & \\
-2 & 4 & & -1 & & & & & & & & \\
-1 & & 4 & -1 & & & & -1 & & & & \\
 & -1 & -2 & 4 & & -1 & & & & & & \\
 & & -1 & & 4 & -1 & & & -1 & & & \\
 & & & -1 & -2 & 4 & & & & & & \\
\hline
-4/3 & & & & & & 6 & -1 & & & & \\
 & & -4/3 & & & & -1 & 6 & -1 & -8/3 & & \\
 & & & & -4/3 & & & -1 & 6 & & & -8/3 \\
\hline
 & & & & & & -4 & & & 10 & & -1 \\
 & & & & & & & & & & 10 & -4 \\
 & & & & & & & & -4 & -1 & -4 & 10
\end{array}\right)
\end{array}
$$

格点…1　2　3　4　5　6　a　b　c　7　8　9　[2]

また左上及び右下の小行列は，それぞれ正方形平板及び直角三角形平板の係数行列と同じであるから，それらの解が既知であれば，(5′) 式によて解を求めることができる。

4. 結　言

（1） 本文で誘導した公式は，応用例に示したように，行列の各要素がそれぞれ小行列をなすときにも適用できる。ただしこの場合には，記号の順序を入換えないように注意しなければならない。

（2） 基本公式は，ベクトル解析に表われる Diadic にも適用される。すなわち $(a+\boldsymbol{V}:\boldsymbol{V})$ のような形をした Diadic の逆は

$$[a+b(\boldsymbol{V}:\boldsymbol{V})]^{-1}=\frac{1}{a}\left[E-\frac{1}{a-b\boldsymbol{V}^2}(\boldsymbol{V}:\boldsymbol{V})\right]$$

（3） (6′) 式に表われる D_i 及び λ_i', μ_i は，定点法その他で定義されている Elastic Length の2倍及び Carry-Over Facter に対応するものである。

〔付記〕 第10回年次講演会講演概要 p. 29

四野宮「逆行列に関する二，三の公式」中の公式 (1) は一部誤りがあつた。本論文の (2) 式が正しい。

（昭.29.11.10）

2) 岐阜大学工学部研究報告，第4号

昭和30年4月10日　印　刷　　土木学会論文集
昭和30年4月15日　発　行　　第　24　号　　定価 150円

編集兼発行者　東京都千代田区大手町2丁目4番地　中川一美
印　刷　者　東京都港区赤坂溜池5番地　大沼正吉
印　刷　所　東京都港区赤坂溜池5番地　株式会社 技報堂

東京中央郵便局区内　千代田区大手町2丁目4番地　電話 (20) 3945・4078
発行所　社団法人　土　木　学　会　振替東京16828番

TRANSACTIONS

OF THE

JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS

NO. 24

CONTENTS

April 1955

DOBOKU–GAKKAI

JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS

No. 4 2-CHOME OTE-MACHI CHIYODA-KU TOKYO, JAPAN