

## 急斜面上の層流における転波列の理論\*

—薄層流に関する研究 (第5報)—

正員 工学博士 石原 藤次郎\*\*  
 正員 岩垣 雄一\*\*\*  
 准員 岩佐 義朗\*\*\*\*

THEORY OF THE ROLL-WAVE TRAINS IN LAMINAR WATER  
 FLOW ON A STEEP SLOPE SURFACE

—STUDIES ON THE THIN SHEET FLOW, 5TH REPORT—

(Trans. of JSCE April 1954)

Dr. Eng., Tōjirō Ishihara, C.E. Member, Yūichi Iwagaki, C.E. Member  
 and Yoshiaki Iwasa, C.E. Assoc. Member.

**Synopsis** In this paper, a theory of the roll-wave trains in laminar water flow on a steep slope surface is developed by Dressler's method as the further research of the thin sheet flow.

The analysis proves that if the discharge, the bed slope and the kinematic viscosity of water are given, then the solution is obtained uniquely and both wave and flow characteristics of the roll-wave trains can be determined.

The experimental results obtained by the wave profile recorder are compared with above described theoretical ones, and the validity of this theory is recognized in good agreement.

**要旨** 本論文は薄層流に関するその後の研究として、急斜面上の層流における転波列の理論を Dressler の方法によつて展開したものである。この解析によつて、もし流量と斜面の勾配および水の動粘性係数が与えられるならば、解は一義的に求められ、転波列の水理学的性質、たとえば波形とか週期、波長、波速さらに流量、平均流速および摩擦応力の変化などが計算されうことを明らかにした。同時に、波としての特性を波高計によつて得られた実験結果と比較し、さらに流れとしての特性から土砂輸送に対する効果を論じた。理論の結果は実験結果とよく一致し、この理論の正しさを実証することができた。

## I. 緒言

急勾配水路または急斜面上の流れに現われる転波列については、1910年の V. Cornish<sup>1)</sup> の観察にはじまり、数多くの著名な研究が行われている。すなわち、H. Jeffreys<sup>2)</sup> の微小振動法による乱流における波列発生限界、R.E. Horton<sup>3)</sup> の雨水波列の発生限界、発生開始距離、その浸蝕力などの議論、G.H. Keulegan および G.W. Patterson<sup>4)</sup> の波の体積要素の運動に注目して発生限界を導く方法、H.A. Thomas<sup>5)</sup> の Moving belt により転波列を Standing wave とさせる実験、H.J. Putman<sup>6)</sup> F.F. Escoffier<sup>7)</sup> の特性曲線法を用いた図式的解析法、R.F. Dressler<sup>8)</sup> の数学的解析法、さらにソ連における V.V. Vedernikov<sup>9)</sup> の  $V_c$  数を提案した流れの不安定性に関する研究などがある。わが国でも栗原、椿岡氏<sup>10)</sup> が微小振動法によつて転波列の発生限界を研究し、われわれも<sup>11)</sup> 1951年にこの現象についてある程度の水理学的特性を主として実験的に明らかにすることができた。

しかしこれらの研究のうち R.F. Dressler および R.E. Horton のものを除くと、いずれも主として転波列の発生限界を論じたものであつて、転波列のその他の水理学的な特性、例えば波形、波高、波の速度、波長、週期などの波としての性質および平均流速、流量、摩擦応力などの流れとしての性質について定量的な解析を行い、それが排水、土砂流送、土壌浸食などの工学上の諸問題にいかなる役割を演じているかを論じたものはないようである。また Dressler の研究は巾の広い開水路内の乱流領域における転波列を Chézy 型の摩擦項を与えて数学的に解明しようと試みたものであつて、その解析方法は非常に興味深いものであるが、その解析が途中で終つてい

\* 昭.28.10.11. 第6回関西工学連合講演会にて一部講演

\*\* 京都大学教授, \*\*\*同助教授, \*\*\*\*同助手

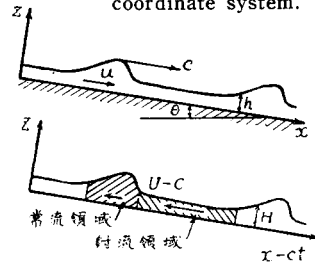
て、波長を与えないと解が unique に得られないし、また転波列の水理学的特性の解明が充分行われていない。従つてもちろん上述の工学上の諸問題と転波列との関係を論議するまでにいたつてない。

われわれは以前に<sup>11)</sup> 層流においても転波列が明瞭に発生することを見出し、発生限界その他の水理学的諸性質について若干の実験と理論的考察を試みたのであるが、充分な解析を行うにいたらなかつた。しかしその後数多くの実験を行うとともに、理論的解析に努力した結果、Dressler の方法を展開した解析結果が実験結果と非常によく一致することがわかり、勾配と流量ならびに温度のみを与えさえすれば、転波列の特性が定量的に算出されうると云う満足すべき結果が得られたので、ここにその結果を報告する。

Dressler の転波列解析の基礎となつている概念は<sup>8)</sup>、*“転波列とは一定の波の速度でその形が歪むことなく下流方向へ伝わつてゆく進行波流れであつて、波形は週期的である”*、と説明されるであろう。このことは、転波列の発達過程を論ずるものではなく、波高が一定となつた最終状態のものについての解析であることを示すものである。さらにまた転波列をもつ流れについて、Moving belt を用い特殊な方法で実験した Thomas の観察によれば<sup>9)</sup>、*“図-1 に示すごとく転波列中の水の速度は波の速度より小さく、波の速度をもつて下流へ移動する座標系より流れを見れば、水の相対速度（上流に向う）は波の後端部では射流状態に、波頂を含む前端部では常流状態にある”*と云うことが認められている。われわれの解析は Dressler のそれと同様に、転波列の上述のような運動様式に関する概念に基づき、波の速度で移動する座標系に変換することによつて得られる単一不週期連続解を衝撃条件を用いて接続し、不連続週期解を得ることにより展開したものである。なおこの他に Dressler は<sup>8)</sup> 摂動法により隋円函数であらわされる連続週期解を得ているが、その波形は実験で得られるものと相違しており、むしろ本文で後述するように上述の衝撃条件を用いた不連続週期解が実験結果とよく一致するようである。事実小さな Bore のごとき波面をなして下流へ移動して行く波列の姿を観察すれば、誰しもその波形を連続週期解によつては表示しがたいことを予測するであらう。

図-1 座標の変換

Fig. 1. Transformation of coordinate system.



II. 基礎方程式

ここでは巾の広い矩形断面水路または2次元流れを取扱い、図-1 に示すごとく底面に沿つて流れの方向に x 軸、これと直角上方に z 軸をとり、t を時間、u を断面の平均流速、h を水深、θ を底面の傾斜角、g を重力加速度、ν を水の動粘性係数とすれば、層流状態の水流の運動量方程式および連続方程式はそれぞれ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{6}{5}u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{5} \frac{u}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = g \sin \theta - \frac{3\nu u}{h^2}, \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0, \dots\dots\dots(2)$$

によつて表わされる<sup>11)</sup>。この (1) 式は鉛直方向の加速度を無視した Stoker<sup>12)</sup> または Dressler<sup>8)</sup> の非線型浅水理論の方程式に対応している。ただし深さによつて変化する流速を断面の平均流速で表わしたための補正係数として、(1) 式の左辺第2項に係数 6/5 が加えられ、またこの場合は第4項がさらに附加される。

すでに述べたように一定の波の速度 c で伝播する進行波流れを考えて、

$$\left. \begin{aligned} u(x,t) &= U(x-ct) = U(c), \\ h(x,t) &= H(x-ct) = H(c), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

とおいて変数変換を行うと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{dU}{d\zeta}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dU}{d\zeta}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -c \frac{dH}{d\zeta}, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dH}{d\zeta}, \dots\dots\dots(4)$$

であるから、(1) および (2) 式は次のようになる。

$$\left( \frac{6}{5}U - c \right) \frac{dU}{d\zeta} + g \cos \theta + \frac{1}{5} \frac{U}{H} \left( \frac{dH}{d\zeta} \right) = g \sin \theta - \frac{3\nu U}{H^2}, \dots\dots\dots(5)$$

$$H \frac{dU}{d\zeta} + (U - c) \frac{dH}{d\zeta} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

これらの2式から dU/dζ および dH/dζ を求めると、

$$\frac{dU}{d\zeta} = \frac{(U - c) \{ g \sin \theta - (3\nu U / H^2) \}}{\{ (6/5)U - c \} (U - c) - \{ gH \cos \theta + (Uc/5) \}}, \dots\dots\dots(7)$$

$$\frac{dH}{d\zeta} = -\frac{H\{g \sin \theta - (3\nu U/H^2)\}}{\{(6/5)U - c\}(U - c) - \{gH \cos \theta + (Uc/5)\}} \quad (8)$$

さらに (7) および (8) 式より  $\frac{dH}{dU} = \frac{H}{c-U}$  が得られ、これを積分すれば、

$$(c-U)H = K = \text{const.} \quad (9)$$

となる。これは Dressler が求めた結果と全く同様であつて、進行流量 (Progressive discharge rate) とよばれ、波の速度  $c$  で動く座標系からみたときの見かけの流量が一定であることを示している。

(9) 式を (8) 式に代入して  $U$  を消去すれば、

$$\frac{dH}{d\zeta} = -\frac{H[g \sin \theta - \{3\nu(cH-K)/H^2\}]}{(6/5)(K/H)^2 - gH \cos \theta - (c^2/5)} = -\frac{f_1(H)}{f_2(H)} \quad (10)$$

これが進行波流れにおける波形方程式である。この式は開水路における不等速定流の水面形方程式に非常によく似た形をもっており、開水路における不等速定流の特性とあわせて考えると、(10) 式からは波形を表わすような連続的週期解は得られないことが理解される。もし、波状跳水における Standing wave のような連続的週期解を得ようとするれば、鉛直方向の加速度を考慮しなければならないことが、Boussinesq<sup>13)</sup> によつて示されている。このようにして得られた連続的週期解による波形に較べると、われわれの実験によつて得られた転波列の波形は非常に異なつており、次に述べるように (10) 式による単一連続解を衝撃条件を用いて結合し、不連続週期解によつて波形を表わす方法が転波列の現象をよく説明できるのである。

### III. 衝撃条件を用いた不連続解

(1) 基礎方程式の解 まず波形を表わす (10) 式を積分して、単一連続解を求めよう。この場合、この解の性質としてはすでに述べたように、一定の波の速度  $c$  で動く座標系よりみると、おのおのの波の後端部では流れは射流の領域であり、また波頂を含む前端部では常流の領域となつていることが必要条件となる。従つて 1 波長内において常流から射流へ移る断面が存在し、この断面における条件は (10) 式において分母  $f_2(H)$  が 0 になることである。この条件を満足する解を求めればよいのであるが、(10) 式からわかるようにこの断面における  $dH/d\zeta$  の値は  $\infty$  となつて、こうしたことは実際上起りえないものである。実験結果によると、この断面の近傍では一般に下流に向つて少しずつ水深が増加するという水面形であることがわかつていいる。それでこの断面は、(10) 式の分母  $f_2(H)$  が 0 というだけでなく、分母  $f_2(H)$  も 0 になるいわゆる支配断面であることが必要となる。すなわち、この断面では

$$f_1(H) = 0, \quad f_2(H) = 0 \quad (11)$$

この支配断面における水深を  $H_0$  とすれば、 $H_0$  はまた等流水深となる。後で詳述するが、この断面における  $dH/d\zeta$  の値は

$$\lim_{H \rightarrow H_0} \frac{dH}{d\zeta} = \lim_{H \rightarrow H_0} -\frac{df_1/df_2}{d\zeta/d\zeta} \quad (12)$$

によつて計算され、この値が 0 かまたはそれより大きいことが転波列が存在するための必要条件となる。

(11) の両式を解き、(12) 式の条件をみたすように符号を決定すれば、水深  $H_0$ 、流速  $U_0$  および (9) 式に示す進行流量  $K$  はそれぞれ

$$U_0 = \frac{(6/5) - \sqrt{(6/25) + 3I_R}}{(6/5) - 3I_R} c, \quad (13)$$

$$H_0 = \frac{3I_R}{g \cos \theta} \left\{ \frac{(6/5) - \sqrt{(6/25) + 3I_R}}{(6/5) - 3I_R} \right\}^2 c^2 \quad (14)$$

$$K = \frac{3I_R}{g \cos \theta} \left\{ \frac{(6/5) - \sqrt{(6/25) + 3I_R}}{(6/5) - 3I_R} \right\}^2 \left\{ 1 - \frac{(6/5) - \sqrt{(6/25) + 3I_R}}{(6/5) - 3I_R} \right\} c^3 \quad (15)$$

によつてあらわされる。ここに

$$I_R = 1/(\tan \theta \cdot R_{e0}), \quad R_{e0} = U_0 H_0 / \nu \quad (16)$$

である。(10) 式において、 $f_1(H)$  および  $f_2(H)$  はともに共通根  $H_0$  をもつているから、これを消去し、さらに  $f_1(H)$  の 2 根を  $H_A$ 、 $H_B$  ( $H_A > H_B$ ) とすれば、(10) 式は

$$\frac{dH}{d\zeta} = \frac{g \sin \theta (H - H_A)(H - H_B)}{(6/5)(K/H)^2 (H + H_0) + gH^2 \cos \theta} \quad (17)$$

$$H_A = \left\{ \sqrt{(9/20) + \sqrt{(6/25) + 3I_R}} - (1/2) \right\} H_0,$$

$$H_B = -\left\{ \sqrt{(9/20) + \sqrt{(6/25) + 3I_R}} + (1/2) \right\} H_0.$$

となる。また  $H_0$ 、 $H_A$  および  $H_B$  の間の大小関係は

$$H_0 > H_A > 0 > H_B$$

であることが容易に見出される。

(17) 式は積分可能であつて、積分常数を  $\zeta=0$  で  $H=H_0$  となるようにえらぶと、次の解が得られる。

$$\zeta = \frac{1}{\sin \theta} \left\{ \frac{H_A^2 \cos \theta + (6/5)(K^2 H_A / g H_0^2) + (6/5)(K^2 / g H_0)}{H_A - H_B} \log_e \frac{H - H_A}{H_0 - H_A} - \frac{H_B^2 \cos \theta + (6/5)(K^2 H_B / g H_0^2) + (6/5)(K^2 / g H_0)}{H_A - H_B} \log_e \frac{H - H_B}{H_0 - H_B} + \cos \theta (H - H_0) \right\} \dots (18)$$

この解は1つの転波をあらわす水面形  $H_n(\zeta)$  を逆函数表示したものであつて、**図-2** に示すような曲線となる。

(2) 不連続解 (18) 式によつて転波列の水面形をあらわす単一連続解が求められたので、この解より衝撃条件を用いて不連続週期解を作ることができる。

波長を  $\lambda$  とすれば、 $H_n(\zeta)$  の次の転波の水面形  $H_{n+1}(\zeta)$  は

$$\zeta = \lambda + (1/\sin \theta) \{ \dots \dots \dots \} \dots (19)$$

によつてあらわされる。ここに括弧の中の点線は (18) 式の括弧内の式と同一である。

いま進行する不連続衝撃面を含んだ任意の2断面を考え、極限として断面を衝撃面に一致させると、底面における摩擦力は極限では0となるから、質量および運動量保存の法則からそれぞれ次の式が得られる。

$$-\rho H_b(c - U_b) = -\rho H_f(c - U_f) = M, \dots (20)$$

$$M\{(c - U_f) - (c - U_b)\} = (1/2)\rho g \cos \theta (H_f^2 - H_b^2) \dots (21)$$

また衝撃によるエネルギー消費の割合は

$$dE/dt = Mg \cos \theta (H_f - H_b)^2 / 4 H_f \cdot H_b \dots (22)$$

によつてあらわれる<sup>9)</sup>。ここに添字の  $b$  および  $f$  はそれぞれ不連続面の後および前、すなわち最大波高点と最小波高点における値を示し、 $\rho$  は水の密度をあらわす。

(20), (21) 式および (9) 式より、最大波高  $H_b$  と最小波高  $H_f$  との関係式として

$$H_f = (1/2)[\{H_b^2 + (8K^2/g \cos \theta H_b)\}^{1/2} - H_b] \dots (23)$$

が得られる。この式は跳水における跳水前後の水深の間の関係式と全く同一の形をしている。

また衝撃点においては、

$$\zeta_{Eq(18)}(H_b) = \zeta_{Eq(18)}(H_f) \dots (24)$$

の関係が成立しなければならないから、この関係式から最大波高と最小波高および波長との関係をあらわす次の式が得られる。

$$\lambda = \frac{1}{\sin \theta} \left\{ \frac{H_A^2 \cos \theta + (6/5)(K^2 H_A / g H_0^2) + (6/5)(K^2 / g H_0)}{H_A - H_B} \log_e \frac{H_b - H_A}{H_f - H_A} - \frac{H_B^2 \cos \theta + (6/5)(K^2 H_B / g H_0^2) + (6/5)(K^2 / g H_0)}{H_A - H_B} \log_e \frac{H_b - H_B}{H_f - H_B} + \cos \theta (H_b - H_f) \right\} \dots (25)$$

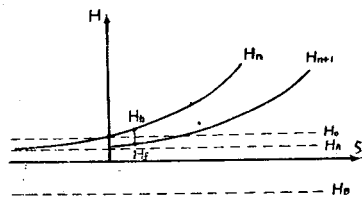
このようにして衝撃条件から得られた (23) 式を用いることにより (18) 式の単一連続解を結合し、不連続週期解を求めて行くことができる。

#### IV. 実 験

前報告<sup>11)</sup>で述べた実験に引続いて、さらに詳細な実験を数多く行い、とくに新しい波形記録装置を用いて波形を定量的に測定することに努力した。この実験はかなり精度がよく、理論の妥当性を実証し、また転波列の物理的特性をよく把握することができた。流れが層流であるから、水深が1~数mm程度であつてきわめて浅く、精度をよくするためにはとくに慎重に実験を行う必要があり、この点得られた実験の結果からみて充分満足すべきものであると考える。

測定方法はわれわれが以前から行つてきたものと同様であるが、実験水路は勾配を最大  $\sin \theta = 0.2$  まで変えることのできる巾 19.6 cm, 全長 6 m のアルミニウム製のものを用いた。波形記録装置<sup>11)12)</sup>は**図-3**に示すような一般に用いられる抵抗型のものであつて、水位計は安全カミソリの刃で作つたものである。水位計が電気化学的な腐食を受けないように電源は交流を用い、交流ホイーストブリッジにより水位に対応する抵抗の変化を電流変化に変え、セレン整流器により整流して電磁オシログラフのガルバノメーターに連結した。これによつて水位変化、すなわち波形をブロマイド紙に記録させ、この記録からまた波の速度および週期を読みとつた。**図-4**

**図-2** 転波列の水面形と  $H_b, H_f, H_0, H_A$  および  $H_B$  の関係  
Fig. 2 Surface profile of roll-wave trains and relation between  $H_b, H_f, H_0, H_A$  and  $H_B$



は水深とガルバノメーターの振れとの関係の一例を示したものであるが、60サイクルの交流を用いても日時が経つと水位計の腐食によつて図-4に示す関係が多少変化するので、実験を行うごとに較正をした。図-5はプロマイド紙に記録された結果の一例を示したものである。実際の記録は感度を非常にあげるため交流ハムが少し入り込むが、同図にはこのハムを取除いたものを示した。なお上流側の水位計と下流側のそれとの間隔は12.9~13.6cmで実験を行った。

平均流量は流量が少ないので測定箱および大型のメスシリンダーを用いて測定した。実験を行った水路の勾配は、 $\sin \theta = 0.05, 0.10$  および  $0.20$  の各場合であつて、記録した進行波流れの等流水深に対する  $R_{e0}$  数は50~500である。これよりさらに小さい  $R_{e0}$  数の流れに対しても測定を行ったが、水位の変化がきわめて小さいので、記録装置の感度の関係上充分精度のよい結果が得られなかつた。

V. 転波列の波としての特性

III. までに述べた理論的な解析によつて得られる転波列の波としての特性を、実験結果と比較しながら、考察を進めて行こう。

(1) 転波列の発生条件と存在するための必要条件 発生した転波列がすでに述べたような水面形を維持しているためには、支配断面における  $dH/d\zeta$  の値が

$$\lim_{H \rightarrow H_0} dH/d\zeta \geq 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

と云う関係をみとすことが必要である。(10) および (12) 式から  $(H/d\zeta)_{H \rightarrow H_0}$  の極限值を求めると、

$$\left( \frac{dH}{d\zeta} \right)_{H_0} = \frac{9\nu(cH - K) - 3\nu c H_0}{(12K^2/5) + gH_0^3 \cos \theta} \quad \dots\dots\dots (27)$$

が得られる。この式の分母は常に正であるから、不等式(26)は

$$9\nu(cH - K) - 3\nu c H_0 \geq 0$$

となり、次の条件式が容易に導かれる。

$$\left. \begin{aligned} U_0 &\geq \sqrt{(1/3)gH_0 \cos \theta} \\ 1/\tan \theta \cdot R_{e0} &= I_R \leq 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

これらの式は急斜面上の層流において、転波列が存在するための重要な必要条件であつて、勾配および  $R$  数がともに小さく(28)式を満足しない流れにおいては、たとえ攪乱が与えられて転波列が発生しても、安定して存在することができないことを示す。われわれは前論文<sup>11)</sup>において流れに微小攪乱を与えて、その攪乱が発達してゆくための条件を導いたが(28)式は全くその条件と一致する。すなわち発生限界と存在するための必要条件とは全く同一のものであることがわかる。図-6は勾配と発生限界の  $R_{e0}$  数との関係を示したものであるが、同図より普通、転波列が観察されない  $1/100$  以下の緩勾配の場合でもなおかつ転波列が存在しうることが見出される。しかしわれわれの実験においては、明らかに転波列が発生していると認められるのは大体  $I_R < 0.3 \sim 0.4$  の場合であつて、 $I_R$  の値が  $0.4$  程度より1に近くなると明瞭に認められなくなる。 $I_R \leq 1/3$  の

図-3 波形記録装置

Fig.3 Wave profile recorder.

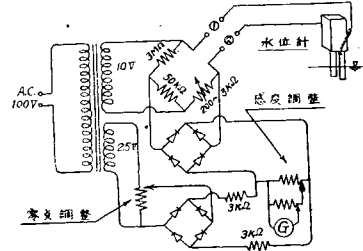


図-4 較正曲線の一例

Fig.4 An example of calibration curve

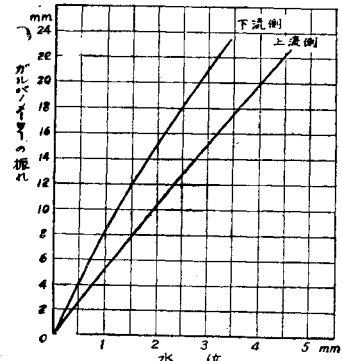


図-5 波形記録の一例 ( $\sin \theta = 0.1$ ,  $R_{e0} = 165.8$ , 水位計の間隔 13.6 cm)

Fig.5 An example of wave profile record ( $\sin \theta = 0.1$ ,  $R_{e0} = 165.8$ , distance of wave meters 13.6 cm)

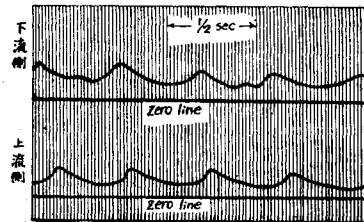
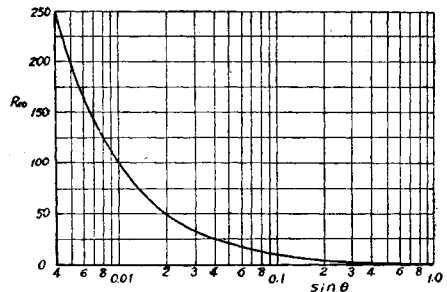


図-6 勾配と転波列の発生限界 Reynolds 数との関係

Fig.6 Relation between bed slope and critical Reynolds Number to roll-wave trains generation



場合に(28)式の最初の式は  $U_0 \geq \sqrt{gH_0 \cos \theta}$  となり、前論文<sup>11)</sup>で述べた実験的発生限界と一致する。 $I_R=1/3$ のとき  $\sin \theta=1/200$  で発生限界  $R_{e0}$  は 600 となり、等流の場合の遷移領域内に入ってしまう<sup>10)</sup>。おそらく衝撃のような擾乱があると、層流から遷移領域への限界  $R_e$  数が等流の場合のそれよりさらに小さくなっていると考えられ、遷移領域ないしは乱流における転波列の発生条件を詳細に検討する必要があるであろう。

(2) 波の速度 見かけの流量が一定であることを示す (9) 式は  $c=U_0\{1+(K/R_{e0}^2)\}$  と変形され、また(13)式より  $c=U_0\{(6/5)+\sqrt{(6/25)+3I_R}\}$  となるから、両式を等しいと置き、さらに  $K$  および  $c$  をそれぞれ無次元量  $K'$  および  $c'$  を用いて

$$K' = (g \cos \theta / c^3) K \dots\dots\dots (29)$$

$$c' = (1/gq_0 \cos \theta)^{1/3} c \dots\dots\dots (30)$$

と置換し、波の速度を無次元表示すれば

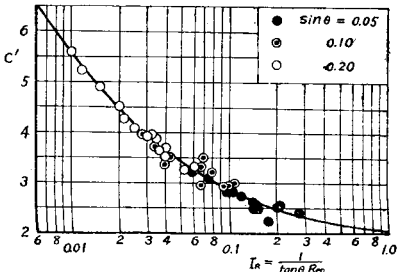
$$c' = \{(1/5) + \sqrt{(6/25) + 3I_R}\}^{1/3} K'^{-1/3} \dots\dots\dots (31)$$

が得られる。ここに  $q_0$  は等流における単位巾の流量である。

(15) および (29) 式から明らかのように  $K'$  は  $I_R$  のみの函数であるから、(31) 式の右辺は  $I_R$  のみの函数となる。

図一7 波の速度の無次元表示

Fig.7 Dimensionless representation of wave velocity



水の動粘性係数は温度の函数であるから、波の速度は平均流量  $q_0$  と斜面あるいは水路の傾斜角  $\theta$  および水温のみが与えられると理論的に決定され、 $c$  の値が定量的に求められる。図一7に示す曲線は (31) 式の関係をあらわしたものであつて、実験の結果と非常によく一致している。波の速度の実験値は、大体1波長程度の一定距離隔てて設置した上下流2個の水位計の間を波が通過するに要する時間と、水位計間の距離とから算出されたものであつて、時間はブロマイド紙の記録から読みとる。図一5においてわかるように、それぞれの波の速度にはかなりの相違があるが、図一7には約10個の波について平均した値がプロットされている。

(3) 波形および波長 波の速度  $c$  で動く座標系よりみたときの見かけの流量  $K$  は一定であるが、いま水路のある固定断面より見た場合の平均流量  $q_0$  は (9) 式より

$$q_0 = (c/\lambda) \int_0^\lambda H d\zeta - K \dots\dots\dots (32)$$

とあらわされる。無次元表示をするため流量  $q_0$ 、変数  $\zeta$ 、水深  $H$  および波長  $\lambda$  をそれぞれ

$$q_0' = (g \cos \theta / c^3) q_0, \dots\dots\dots (33)$$

$$H' = (g \cos \theta / c^2) H, \dots\dots\dots (35)$$

$$\zeta' = (g \cos \theta / c^2) \zeta \tan \theta, \dots\dots\dots (34)$$

$$\lambda' = (g \cos \theta / c^2) \lambda \tan \theta \dots\dots\dots (36)$$

の無次元量を用いて (32) 式を変換すると、

$$(1/\lambda') \int_0^{\lambda'} H' d\zeta' = q_0' + K' \dots\dots\dots (37)$$

となる。 $q_0'$  は (13), (14) および (33) 式より

$$q_0' = 3 I_R \left\{ \frac{(6/5) - \sqrt{(6/25) + 3 I_R}}{(6/5) - 3 I_R} \right\}^3 \dots\dots\dots (38)$$

であらわされ、 $K'$  とともに  $I_R$  のみの函数であるから (37) 式の右辺は同じく  $I_R$  のみの函数である。また (35) 式に従つて

$$\left. \begin{aligned} H_A' &= (g \cos \theta / c^2) H_A, & H_B' &= (g \cos \theta / c^2) H_B, & H_b' &= (g \cos \theta / c^2) H_b, \\ H_f' &= (g \cos \theta / c^2) H_f, & H_0' &= (g \cos \theta / c^2) H_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

の無次元量を用いると、(18) 式および  $H_b, H_f$  と  $\lambda$  との関係式 (25) はそれぞれ

$$\zeta' = \frac{H_A'^2 + (6/5)(K'^2 H_A' / H_0'^2) + (6/5)(K'^2 / H_0')}{H_A' - H_B'} \log_e \frac{H' - H_A'}{H_0' - H_A'} - \frac{H_B'^2 + (6/5)(K'^2 H_B' / H_0'^2) + (6/5)(K'^2 / H_0')}{H_A' - H_B'} \log_e \frac{H' - H_B'}{H_0' - H_B'} + (H' - H_0'), \dots\dots\dots (40)$$

$$\lambda' = \frac{H_A'^2 + (6/5)(K'^2 H_A' / H_0'^2) + (6/5)(K'^2 / H_0')}{H_A' - H_B'} \log_e \frac{H_b' - H_A'}{H_f' - H_A'} - \frac{H_B'^2 + (6/5)(K'^2 H_B' / H_0'^2) + (6/5)(K'^2 / H_0')}{H_A' - H_B'} \log_e \frac{H_b' - H_B'}{H_f' - H_B'} + (H_b' - H_f') \dots\dots\dots (41)$$

となり、最大波高と最小波高の関係式 (23) は

$$H_f' = (1/2) \{ [H_b'^2 + (8K'^2/H_b')]^{1/2} - H_b' \} \dots\dots\dots (42)$$

と書きかえられる。(40)式より  $I_R$  をパラメーターとして  $H'$  と  $g'$  との関係が求められ、また (41) および (42) 式から  $H_f'$  を消去すれば  $H_b'$  と  $I_R$  との関係が  $I_R$  をパラメーターとして得られる。これらの関係を用いて (37) 式より trial に  $I_R$  と  $H_b'$  との関係が求められる。このようにして波長が決定されると同時に最大波高および最小波高も決まり、波形を画くことができる。図-8 は理論から求めた波形と測定結果から座標を変換して得られた波形との比較を示したもので、波の形は前端部付近を除いてよく一致している。実際の転波列はこの図に示したように一様な波長で流下するものは少なく、図-5 に示したようになりに不規則であつて、図-8 に示したものはとくに規則的なものを選んだ。また図-14 に  $R_{e0}$  数および勾配によつて決定される数  $I_R$  の値に対応して波形がどのように変化するかを鎖線で示している。さらに図-9 は無次元波長と  $I_R$  の関係を図示したものである。

図-8 波形の理論計算結果と実験結果との比較  
Fig.8 Comparison between calculated result from the theory and experimental one of wave profile.

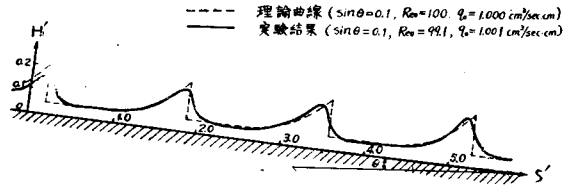
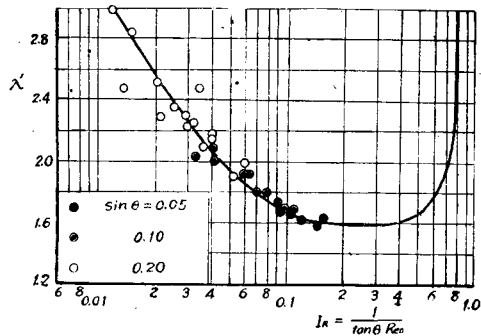


図-9 無次元波長と  $I_R$  との関係  
Fig.9 Relation between dimensionless wave length and  $I_R$



実験における転波列の測定記録をみたり、観察を行つていると、現在の6mの実験水路でも長さが充分ではなく、ときどき完全に発達していない波が現われるようであり、また  $I_R$  が減少するにつれて、すなわち勾配が急になり  $R_{e0}$  数が大きくなるにつれて波が分裂し、理論値の 1/2 あるいは 1/3 という波長をもつた Elementary wave ができる傾向のあることもわかつた。波長は直接測定できないので記録からよみとつた週期  $T$  の値から  $\lambda = cT$  という関係を用いて求めたものである。波の速度の実験値に比べてその数が少ないのは、上述のように波が Elementary wave に分かれ、理論値の 1/2, 1/3 となつてでたものを省いたためであり、また波の速度以外の測定結果が 0.3 近くの  $I_R$  の値に対する実験値に欠けているのは、波高が小さく不規則のため正確によみとれなかつた理由による。

なお、前報告<sup>(1)</sup>において実験の結果から波長と平均流速とは勾配に無関係に正比例すると述べたが、この理論より検討した結果によれば、この前の実験の範囲内では波長と平均流速とはほぼ直線関係に近く、勾配の影響は実験値の散らばり程度であることがわかつた。

(4) 波高 波高は (3) で述べたように波長を求めると同時に必然的に決定される。図-10 は最大波高と

図-10 無次元最大波高と  $I_R$  との関係

Fig.10 Relation between dimensionless maximum wave height and  $I_R$

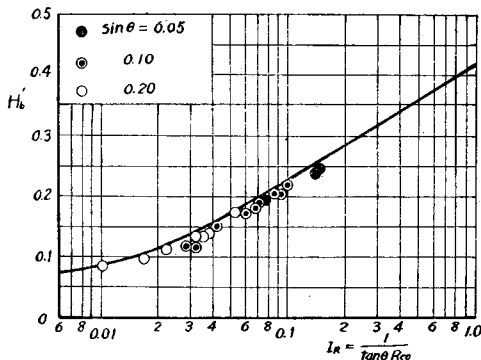


図-11 最大波高と等流水深の比と  $I_R$  との関係

Fig.11 Relation between ratio of maximum wave height to normal depth and  $I_R$

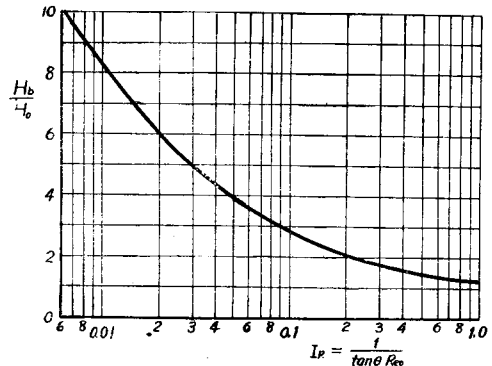


図-12 無次元等流水深と  $I_R$  との関係  
Fig.12 Relation between dimensionless normal depth and  $I_R$

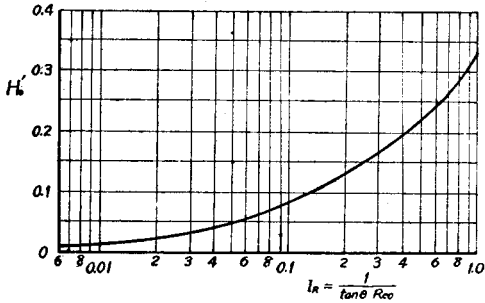
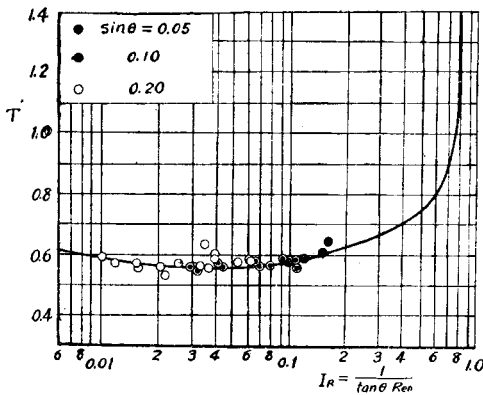


図-13 無次元週期と  $I_R$  との関係  
Fig.13 Relation between dimensionless period and  $I_R$



VI. 転波列の流れとしての特性

ここでは転波列をともなる進行波流れがこれをともなわない等流状態の流れに比較して、どのように流れとし

図-14  $I_R$  の種々の値に対する波形と平均流速、流量および摩擦速度の分布

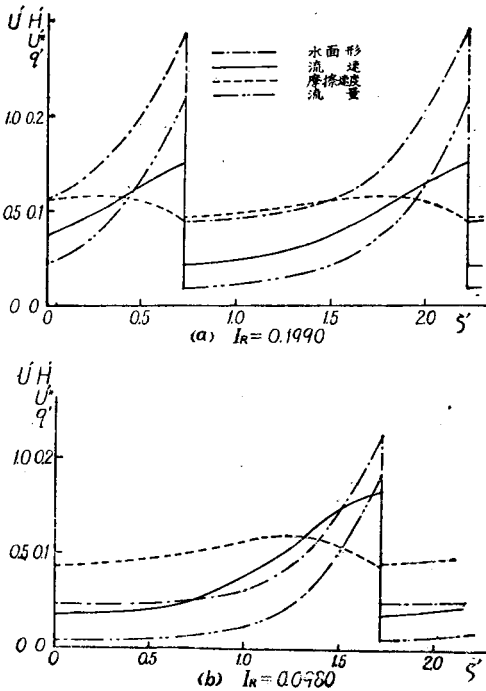
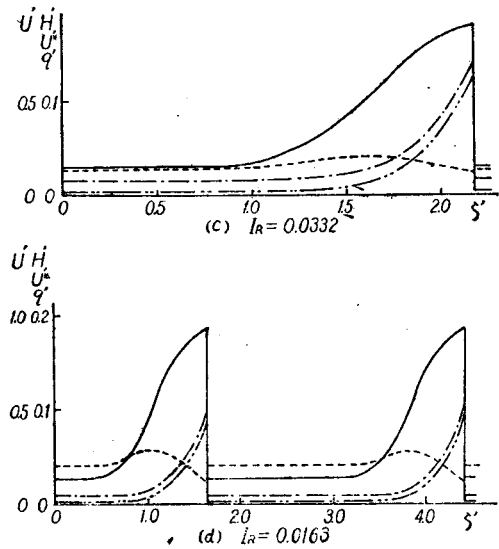


Fig.14 Wave profile and distribution of mean velocity, discharge rate and friction velocity corresponding to various values of  $I_R$



$I_R$  の関係を示したもので、実験値が理論値より平均して約 10% 程度小さいという結果を示しているが、実際の転波列は表面張力の関係から理論波形のように尖ることはあり得ないので、当然のことであろう。また最大波高等流水深との比と  $I_R$  の関係を 図-11 に示す。なお無次元等流水深と  $I_R$  との関係は (14) 式から 図-12 のようにあらわされる。図-11 から  $I_R$  の値が 0.006 の場合最大波高が等流水深の 10 倍にもなり、 $I_R$  が増加するにつれて漸次減少し、 $I_R$  が 1 という極限の場合はその比は 1.21 の値をとることがわかる。

(5) 週期 週期  $T$  を  $T' = (g \cos \theta)^{1/3} q_0^{1/3} \tan \theta T/c^2$  の無次元量であらわし、 $T = \lambda/c$ 、 $T' = \lambda'/c'$  という関係より 図-7 および 図-9 の波の無次元速度  $c'$  と無次元波長  $\lambda'$  の理論値を用いて算出したのが 図-13 である。図-13 にプロットされたわれわれの実験の範囲内においては無次元週期はほとんど一定であつて、実際の週期は 0.5 sec 前後であるが、 $I_R \rightarrow 1$ 、すなわち極限に近づくにつれて、波長は増大し、波の速度は小さくなるから、週期は大きくなる。しかし、この近傍の測定は現在の装置では困難であつて、この興味深い理論結果は実証することができなかつた。

以上転波列の波としての特性はいずれも理論結果と実験結果とがよく一致しており、転波列を不連続週期解であらわす方法はこの現象を解析するに最も適当なものであると考えられる。



ての水利学的特性を変化するかを考察する。

(1) 流速 断面平均流速は(9)式より、 $U=c-(K/H)$  となり、従つて

$$U' = U/c \dots\dots\dots(43)$$

とにおいて無次元流速を導入すれば、

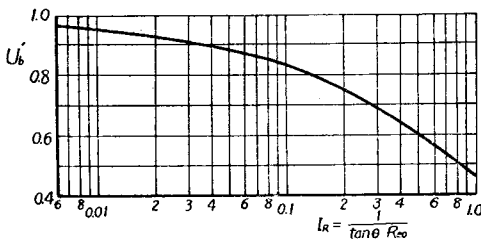
$$U' = 1 - (K'/H') \dots\dots\dots(44)$$

とあらわされる。 $U' > 0$  であるから(44)式より  $K' < H'$ 、従つて  $U' < 1$  となり、流速は波の速度より常に小さいということが容易に示される。図-14の実線は(43)式より種々の  $I_R$  値に対する流速の分布を求め図示したものである。

この図からわかるように最大断面平均流速は波の前端と一致している。またこの無次元最大平均流速  $U_b'$  を  $I_R$  の函数として図示したものが図-15であつて、 $I_R$  の減少にともなつて波頂における流速は波の速度に近づくこ

図-15 無次元最大平均流速と  $I_R$  との関係

Fig.15 Relation between dimensionless maximum mean velocity and  $I_R$



とを示す。またこの最大平均流速が転波列をともしなわなない等流状態の流れの流速に比較してどの程度の増加を示すかを知るため  $U_b'/U_0$  と  $I_R$  との関係をあらわしたものが図-16であつて、 $I_R$  が1に近いところを除けば、大体全領域に亘り、等流流速の1.5~1.6倍の値をもつことがわかる。なお図-17に  $U_0' = U_0/c$  と  $I_R$  との関係を示す。

(2) 流量 ある固定断面における流量は(9)式より、

$$q = U \cdot H = c \cdot H - K$$

(33)式によつて無次元表示をすれば、

$$q' = U' \cdot H' = H' - K' \dots\dots\dots(45)$$

となり、流量と水深は1次の関係にあることがわかるし、図-14における2重鎖線は1波形内の流量の分布を示し、図-18は無次元最大流量  $q_b'$  と  $I_R$  の関係を、図-19は等流状態の流量との比  $q_b'/q_0$  を同じように  $I_R$  の函数としてあらわしたものであるが、 $I_R$  の値が1に近いところでも約2倍を示し、 $I_R$  が減少するにつれてその比は急激に増大する。たとえば  $I_R = 0.02$

(これは  $\sin \theta = 0.1$  では  $R_{00} \approx 500$ 、 $\sin \theta = 0.2$  では  $R_{00} \approx 245$  の場合に相当する)においては、その波頂は等流状態の流れに比べて約9.5倍の流量をもち、転波列をともしなう流れではほとんどその波頂に水塊が集中して流れることになる。これは図-16に示すように  $I_R$  が変化しても流速比はあまり変化しないから、流量の急激な変化は主として図-11に示すように波高比の急激な変化によるものである。なお図-20に無次元等流流量と  $I_R$  との関係を示す。

(3) 摩擦速度 われわれはすでに基礎方程式において底面の摩擦応力は等流状態における法則に支配されるものと仮定して解析を行つてきたのであるが、ここにおいてもこの仮定に従つて摩擦応力の変化を考察してみよう

図-16 最大平均流速と等流平均流速の比と  $I_R$  との関係

Fig.16 Relation between ratio of maximum mean velocity to normal mean velocity and  $I_R$

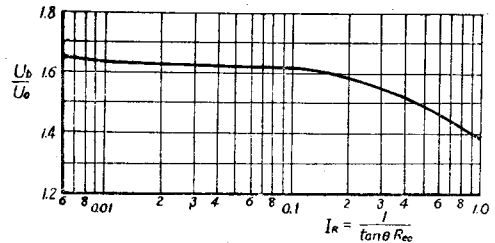


図-17 無次元等流平均流速と  $I_R$  との関係

Fig.17 Relation between dimensionless normal mean velocity and  $I_R$

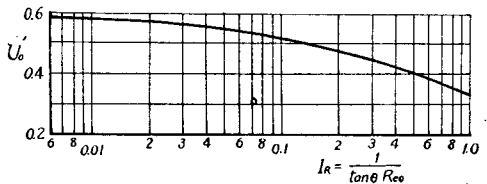


図-18 無次元最大流量と  $I_R$  との関係

Fig.18 Relation between dimensionless maximum discharge rate and  $I_R$

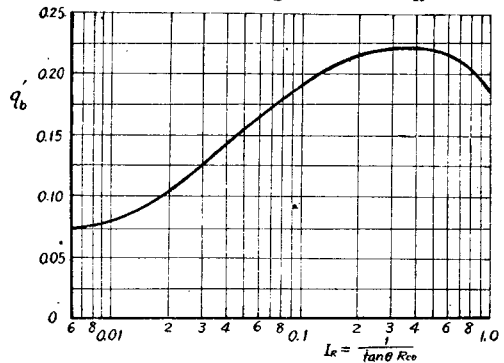


図-19 最大流量と等流流量の比と  $I_R$  との関係

Fig.19 Relation between ratio of maximum discharge rate to normal discharge rate and  $I_R$

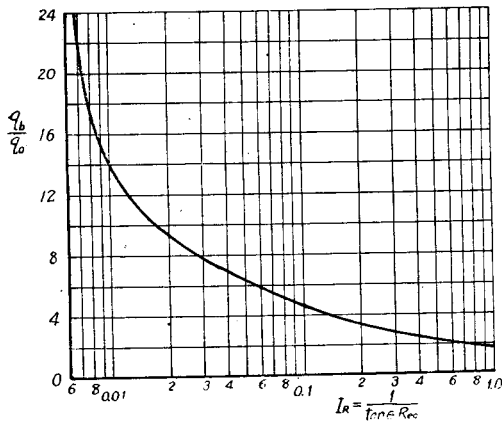
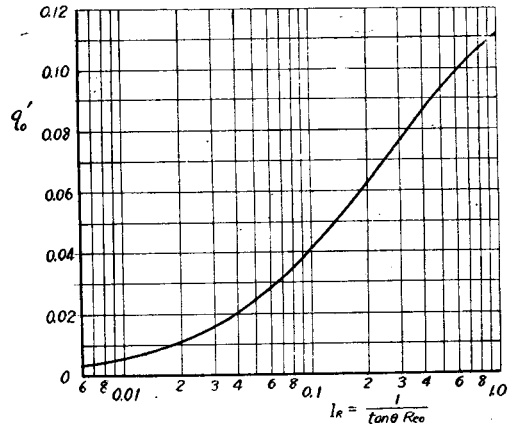


図-20 無次元等流流量と  $I_R$  との関係

Fig.20 Relation between dimensionless normal discharge rate and  $I_R$



いま、摩擦応力を速度の次元をもつ摩擦速度  $u^*$  によつてあらわすと、  $u^{*2} = 3\nu u/h = 3\nu U/H$

ここで  $\nu' = (g \cos \theta / c^3) \nu, \dots \dots \dots (46)$   $U^* = U^*/c \dots \dots \dots (47)$

とおいて、動粘性係数および摩擦速度を無次元表示すれば、(9) 式の関係を用いて、

$$U^{*2} = 3\nu' (1/H' - K'/H'^2) \dots \dots \dots (48)$$

という関係がえられる。これは無次元摩擦速度を無次元水深の函数として表示したものであつて、 $H' = 2K'$  という無次元水深において、

$$U^{*'}_{max} = \sqrt{3\nu' / (4K')} \dots \dots \dots (49)$$

なる最大値をもち、その分布状態は 図-14 における破線で示すようになり、最大値をとる位置が波の前端部より後にくる。またこの図から転波列の発生によつて摩擦応力にあまり急激な変化のないことが容易にわかる。

図-21 は無次元最大摩擦速度を  $I_R$  の函数として表示したもので、図-22 はそれと等流状態の摩擦速度との比  $U^{*'}_{max}/U_0^*$  と  $I_R$  との関係を示したものである。 $I_R < 0.4$ 、すなわちわれわれの測定しえなかつた程度の勾

図-21 無次元最大摩擦速度と  $I_R$  との関係

Fig.21 Relation between dimensionless maximum friction velocity and  $I_R$

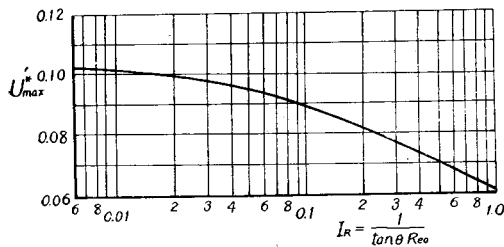


図-23 無次元等流摩擦速度と  $I_R$  との関係

Fig.23 Relation between dimensionless normal friction velocity and  $I_R$

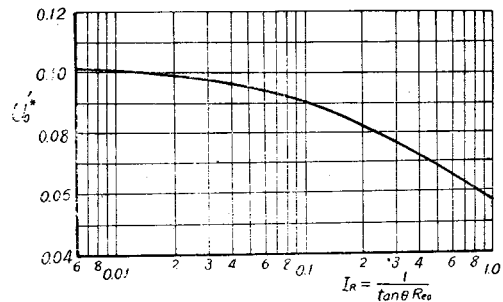
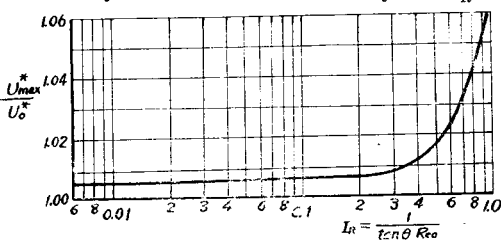


図-22 最大摩擦速度と等流摩擦速度の比と  $I_R$  との関係

Fig.22 Relation between ratio of maximum friction velocity to normal friction velocity and  $I_R$



配が緩くかつ  $Re_0$  数の小さい場合以外には、その最大摩擦応力は等流状態の流れの摩擦応力に比べてほとんど増加せず、その増大の割合は 1% 以下であつて、1 波長あたりの平均値はかえつて等流の場合の値より小さくなる。なお 図-23 に無次元等流摩擦速度と  $I_R$  との関係を示す。

(4) 衝撃におけるエネルギー損失 衝撃におけるエネルギー損失は (9) 式、(20) 式および (22) 式より、

$$P = \frac{dE}{dt} = \rho K g \cos \theta (H_b - H_f)^2 / (H_f \cdot H_b).$$

これより  $P' = P/(\rho Kc^2)$  とおけば、1波長あたりのエネルギー損失の無次元表示は、

$$\frac{P'}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda'} \frac{(H_b' - H_f)'}{4 H_f' \cdot H_b'} \dots\dots\dots (50)$$

となる。ただし  $P'/\lambda'$  と  $P/\lambda$  との関係は、

$$\frac{P'}{\lambda'} = \frac{(P/\lambda)}{\rho K' c^3 \tan \theta} = \frac{(P/\lambda)}{\rho g K' c'^3 q_0 \sin \theta} \dots\dots\dots (51)$$

$\lambda'$ ,  $H_f'$  および  $H_b'$  は  $I_R$  のみの関数であるから、(50) 式の右辺は  $I_R$  のみの関数であることがわかる。

図-24 は  $P'/\lambda'$  と  $I_R$  との関係を図示したもので、 $I_R$  の値の減少とともに  $P'/\lambda'$  が急激に増大するが、 $I_R = 0.06$  のあたりで極大値があらわれ、それより小さい  $I_R$  の値に対しては変化はあまり急激でないことがわかる。

**VII. 泥砂輸送に対する転波列の効果**

以上週期的な波として流下する転波列の流れとしての特性が明らかになったが、これらの結果に基づいて泥砂輸送に対する効果を考察しよう。この泥砂輸送に関係する転波列の要素は、波頂附近に水が集中し水塊となつて流下して行くことによる Impulse と、それによる擾乱現象ならびに摩擦速度および平均流速であると考へてよいであろう。このうち大きい砂礫に対しては主として Impulse および平均流速が関係し、微細な泥砂に対しては擾乱現象および摩擦速度が関係すると考へて考察を進めてみよう。

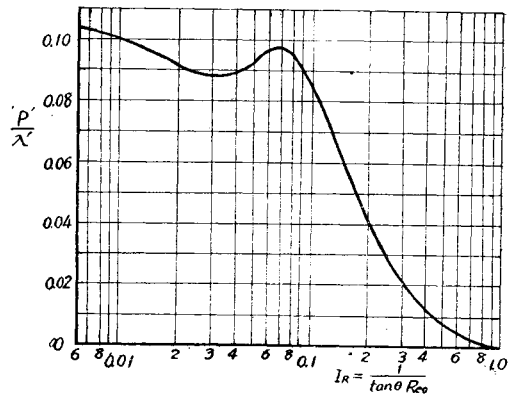
(1) 微細な泥砂に対する効果 図-22 に示すように最大摩擦速度は等流の値に較べて  $I_R < 0.4$  の場合はせいぜい1%程度以下しか増加しない。従つて掃流力は転波列が発生してもほとんど変化はないといつてよい。しかしながら等流の掃流力によつて動かされ、それに擾乱が加わつた場合、容易に浮游するような微細な泥砂で斜面が構成されているとき、転波列の泥砂輸送に対する効果は相当大きいことが予測される。このことは舗装されない路面上を多くの自動車がある一定の間隔で砂塵を舞い上らせながら自動車より遅い風速の追風の状態の中を走つている比喻によつて説明される。この場合砂塵を舞い上らす自動車が転波列の波頂における衝撃に相当する。衝撃において消費されるエネルギーは擾乱のエネルギーを経て熱エネルギーに変わるものであるから、このエネルギーが大きいほど擾乱の強さが大きく、泥砂を浮游させる効果が大きくなる。図-24 および (51) 式からわかるように、1波長当りの衝撃におけるエネルギー損失は  $I_R$  の値が小さくなれば増大してゆくから、平均  $R_0$  数または平均流量および勾配が大きくなればなるほど、衝撃における擾乱による泥砂の浮游輸送の効果が非常に顕著となることが理解される。

(2) 等流の掃流力によつてわずかに移動する程度の細砂に対する効果 この程度の大いさの砂に対しては衝撃による擾乱の効果と(3)で述べる Impulse 効果はほとんどないと考へてよいから、もつぱら掃流力の大小が輸送に影響する。従つて摩擦速度の変化が  $I_R < 0.4$  に対して1%以下であるという前述の理由から、このような大いさの砂で構成されている斜面に対しては、転波列の効果はあまりないと考へてよいであろう。

(3) 大きな砂礫に対する効果 (2) に述べた程度の粒径のものより大きい砂になると、その砂粒が流れからうける力は流速に関係してくる。いまこの抵抗力が流速の2乗に比例するものとすれば、図-16 からわかるように最大平均流速と等流平均流速の比は大体 1.5~1.6 程度であるから、波頂附近における最大の抵抗力は等流の場合に較べて 2.3~2.6 倍となる。さらに粒径が大きくなり、図-25 に示すような最大波高程度となれば、衝撃による Impulse が効果的となるであろう。Impulse は運動量の変化に関係するから、このような大きい粒径の砂礫に対しては(流量×速度)の衝撃前後の差が問題となる。図-19 に示されるように最大流量と等流流量の比は  $I_R$  の値が減少すれば急激に増大し、また上述のように最大流速の比も 1.5~1.6 を示すから、衝撃後の(流量×流速)の値は等流における値の数倍から 10 数倍に達する。一方衝撃前のこの値は計算の結果では  $I_R$  が減少するに従つて急激に小さくなり、たとえば  $I_R = 0.1$  の場合の値は等流における値の 0.066 倍という結果が得られるから、衝撃前後のこれらの値の差は衝撃後の値そのままと考へてよい。従つて Impulse は  $I_R$  の減少とと

図-24 衝撃における1波長当りの無次元エネルギー損失と  $I_R$  との関係

Fig.24 Relation between dimensionless energy loss per wave length at the shock and  $I_R$



もに急激に増大することになる。換言すれば、平均の  $R_0$  数または平均流量および勾配が大きいときは、波頂における Impulse の効果がいちじるしく大きくなることが推察される。転波列の発生している流れの中へ砂礫粒を混入すると、波頂が砂礫粒を通過する瞬間ごとに断続的に下流へ移動してゆくことがわれわれの実験においても観察され、波頂における Impulse の効果を知ることができた。

このような転波列を伴う急斜面上の流れが泥砂輸送に及ぼす効果については、さらに実験を行つて以上の考察の結果を確かめ、さらに定量的にこの効果を明らかにしたいと考えている。

### VIII. 結 論

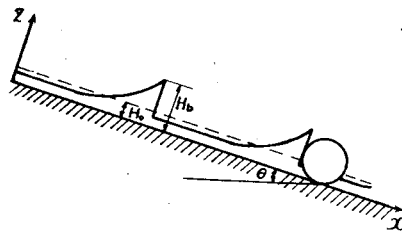
鉛直方向の加速度を無視した層流状態の流水の運動量方程式を基本方程式とし、これを Dressler の方法によつて解き、この解を衝撃条件を用いて不連続週期解とすることによつて実験結果ときわめてよく一致する結果が得られた。さらにこの解析によつて転波列をともなう流れのもつ水理学的特性を明らかにすることができたが、これを要約すれば次のようになる。

- (1) 転波列が存在する条件は、われわれがすでに微小振動法によつて導いた発生条件と全く一致し、 $I_R = 1/(\tan \theta \cdot R_{00}) \leq 1$  あるいは  $U_0 \geq \sqrt{(1/3)g H_0 \cos \theta}$  によつて与えられる。
- (2) 転波列の水理学的特性は、それらを無次元形にすることによつてすべて  $I_R$  の函数としてあらわされ、 $I_R$  が層流における転波列の諸特性を支配する重要な Index であることがわかつた。
- (3) 転波列の諸特性はすべて平均流量  $q_0$ 、斜面の傾斜角  $\theta$  および水の温度または動粘性係数  $\nu$  を与えることにより、一義的に決定され、波としての特性については、詳細な実験によつてその理論結果の正しいことが確認された。
- (4) 転波列をともなう流れのもつ運動量の大部分はその波頂附近に集中し、とくに  $I_R$  が減少するほど急激に増大するから、転波列をともなわなう等流の流れにおいては輸送され得ないような大きい砂礫が容易に輸送されることが明らかにされた。
- (5) また掃流力は転波列の発生によつてほとんど増加せず、かえつて平均の掃流力は減少することがわかつたが、等流の場合においても容易に移動する程度の微細土砂粒子は、衝撃によつて浮游するため、転波列にともなう擾乱によつて泥泥砂量は相当増加することが推測できた。

### 参 考 文 献

- 1) V. Cornish: "Waves of the sea and other water-waves", 1910.
- 2) H. Jeffreys: "The flow of water in an inclined channel of rectangular section", Phil. Mag., Ser. 6, Vol. 49, 1925.
- 3) R. E. Horton: "Rain wave-trains", Trans. Amer. Geophys. Union, 1938.
- 4) G. H. Keulegan and G. W. Patterson, "A criterion for instability of flow in steep channels", Trans. Amer. Geophys. Union, 1940.
- 5) H. Thomas: "The propagation of waves in steep prismatic conduits", Proc. of Hydraulic Conference, Univ. of Iowa Studies in Engineering, Bull. 20, 1940.
- 6) H. J. Putman: "Unsteady flow in open channels", Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 29, No. 2, 1948.
- 7) F. F. Escoffier: "A graphical method for investigating the stability of flow in open channels or in closed conduits flowing partly full", Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 31, No. 4, 1950.
- 8) R. F. Dressler: "Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels", Communication on Pure and Applied Mathematics, Vol. II, No. 2/3, 1949.
- 9) V. V. Vedernikov: "Conditions at the front of a translation waves disturbing a steady motion of a real fluid", Acad. Sci. U.R.S.S., Vol. 48, No. 4, 1945.
- 10) 栗原道徳, 椿東一郎: "浅い水路に於ける転波に就いて", 九大流体力学研究所報告, 第6巻第1号, 昭24.
- 11) 石原藤次郎, 岩垣雄一, 石原安雄: "薄層流に関する研究(第3報), 雨水波列について", 土木学会誌, 第36巻第1号, 昭24.
- 12) J. J. Stoker: "The formation of breakers and bores", Communications on Applied Mathematics. Institute for Mathematics and Mechanics, Vol. 1, No. 1, 1948.
- 13) P. Forchheimer; "Hydraulik" 1930, S. 237.
- 14) S. Hayami, T. Ishihara and Y. Iwagaki: "Some studies on beach erosions", Disaster Prevention Research Institute, Bulletin No. 5, 1953
- 15) 石原藤次郎, 岩垣雄一, 末石富太郎: "流砂のある場合の流速測定について", 京大工学研究所彙報, 第5輯, 昭29.
- 16) 石原藤次郎, 岩垣雄一, 合田健: "薄層流に関する研究(第1報)", 土木学会論文集第6号, 昭26. (昭29. 1. 12)

図—25 転波列と大きい砂礫の移動  
Fig. 25 Roll-wave trains and movement of large sand grain



# 土木学会刊行物在庫一覽

土木工学論文抄録	第3集	A 4判	230頁	実費	500円	(送料 60円)
"	第4集	A 4判	173頁	"	450円	( " 60円)
土木学会論文集	第3号	B 5判	183頁	"	160円	( " 30円)
"	第4号	B 5判	134頁	"	200円	( " 30円)
"	第5号	B 5判	140頁	"	250円	( " 30円)
"	第6号	B 5判	140頁	"	250円	( " 30円)
"	第9号(小西博士)	B 5判	9頁	"	20円	( " 10円)
"	第10号(岡本博士)	B 5判	18頁	"	40円	( " 10円)
"	第11号(林 泰造)	B 5判	11頁(英文)	"	50円	( " 10円)
"	第12号(沼田・丸安・黒崎)	B 5判	26頁	"	60円	( " 10円)
"	第14号	B 5判	54頁	"	120円	( " 10円)
"	第15号(結城博士)	B 5判	9頁(英文)	"	60円	( " 10円)
"	第16号	B 5判	66頁	"	120円	( " 10円)
"	第17号(猪股俊司)	B 5判	90頁	"	250円	( " 20円)
"	第18号	B 5判	66頁	"	120円	( " 10円)
コンクリート標準示方書(昭和26年度)		B 6判	266頁	"	180円	( " 30円)
コンクリート標準示方書解説		B 5判	167頁	"	300円	( " 30円)
水理公式集		A 5判	167頁	"	200円	( " 20円)
最新土質工学		B 5判	138頁	"	150円	( " 30円)
土木製図基準(I)		B 5判	46頁	"	200円	( " 30円)
第6回年次学術講演会講演概要		B 5判	100頁	"	150円	( " 20円)
第7回	"	B 5判	120頁	"	200円	( " 20円)
第8回	"	B 5判	103頁	"	150円	( " 20円)
第9回	"	B 5判	115頁	"	150円	( " 20円)
昭和26年	夏季講習会パンフレット	B 5判	66頁	"	150円	( " 20円)
	I コンクリートとダム	B 5判	66頁	"	150円	( " 20円)
	II 橋	B 5判	92頁	"	200円	( " 20円)
昭和27年	夏季講習会パンフレット	B 5判	176頁	"	300円	( " 30円)
	建設機械化	B 5判	176頁	"	300円	( " 30円)
昭和28年	夏季講習会パンフレット	B 5判	190頁	"	300円	( " 30円)
	プレストレストコンクリートと構造力学	B 5判	190頁	"	300円	( " 30円)
昭和28年度土木学会名簿		A 5判	472頁	"	200円	( " 45円)
学術用語集土木工学篇		B 6判	416頁	"	315円	( " 35円)

## 土木工学叢書

(1)	杉戸 清著	下水道学(前編)	B 5判	258頁	定価	500円	(送料 70円)
(2)	福田 武雄著	木構造学(再版)	B 5判	243頁	"	500円	( " 70円)
(3)	広瀬 孝六郎著	上水道学(前編)	B 5判	177頁	"	450円	( " 70円)
(4)	岡田 信次著	鉄道線路	B 5判	168頁	"	350円	( " 70円)
(5)	平井 敦著	鋼橋(1)(再版)	B 5判	530頁	"	1000円	( " 80円)
(6)	横道 英雄著	鉄筋コンクリート橋(再版)	B 5判	469頁	"	1300円	( " 80円)
(7)	杉戸 清著	下水道学(後編)	B 5判	238頁	"	500円	( " 70円)
(8)	岡本 舜三著	応用力学	B 5判	130頁	"	350円	( " 70円)

昭和29年4月10日印刷  
昭和29年4月15日発行

土木学会論文集  
第19号

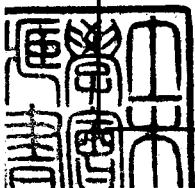
定価 120円

編集兼発行者  
印刷者  
印刷所

東京都千代田区大手町2丁目4番地  
東京都港区赤坂溜池5番地  
東京都港区赤坂溜池5番地

中川 一 美  
大沼 正 吉  
株式会社 技報 堂

東京中央局区内 千代田区大手町2丁目4番地 電話 和田倉(20) 3945番  
4078番  
発行所 社団法人 土木学会 振替東京16828番





# TRANSACTIONS

OF THE

## JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS

NO. 19

---

### C O N T E N T S

	Page
An Exact Method of Solving the Linear Simultaneous Equations with the Principal Diagonal Coefficients and those Adjacent to them Only <i>By Dr. Eng., Takaichi Shingō, C. E. Member</i> .....	1
The Wave Velocities of Transverse Vibrations of Rectangular thin Plates, Considering Rayleigh's Rotatory Moment of Inertia and Timoshenko's Effect of Shear <i>By Dr. Eng., Takaichi Shingō, C. E. Member</i> .....	8
Theory of Clay Consolidation by Variable Load <i>By Dr. Eng., Sakurō Murayama, C. E. Member, Kiichi Tanimoto, C. E. Assoc. Member</i> ...	12
On the Stress Distribution Around a Tunnel in the Ground Containing a Plastic Horizontal stratum <i>By Eiichi Oda, C. E. Member</i> .....	15
Solution of a Continuous Plate in one Direction and Influence of Torsional Moment in Elastically Beam on the Continuous Plate <i>By Kitami Okamoto, C. E. Member</i> .....	23
Study on the Ultimate Strength and Workable Design of Reinforced Concrete Beam <i>By Hifumi Kagami, C. E. Member</i> .....	34
Theory of the Roll-Wave Trains in Laminar Water Flow on a Steep Slope Surface <i>By Dr. Eng., Tōjirō Ishihara, C. E. Member, Yūichi Iwagaki, C. E. Member and Yoshiaki Iwasa, C. E. Assoc., Member</i> .....	46

---

April 1954

DOBOKU-GAKKAI

JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS

No. 4 2-CHOME OTE-MACHI CHIYODA-KU TOKYO, JAPAN