土性及土質工学

粘土層振動圧密の理論

正員 工学博士 村 山 朔 郎*
准員 谷 本 喜 一**

THEORY OF CLAY CONSOLIDATION BY VARIABLE LOAD

(Trans. of JSCE, April 1954)

Dr. Eng., Sakurō Murayama, C.E. Member, Kiichi Tanimoto, C.E. Assoc. Member

Synopsis Theoretical consideration has been executed in order to make clear the behavior of clay layer when variable load is applied.

Applying the method of Laplace transformation, we have got the solution of the fundamental equation which is derived from the assumption that the skeleton of clay has visco-elasticity of Voigt type. The inquiry about the theoretical solution tells us some qualitative properties.

要 旨 本文は一定でない外力が作用する際の粘土層圧密について理論的考察を行つたものである。粘土骨格が Voigt 型の粘弾性を有するとして基礎式を導きラプラス変換を用いてこれを解いた。理論解に対する若干の吟味から二，三の定性的性質を推定した。

1. 緒 言

列車振動をうける軌道路盤，交通荷重をうける鋪装路盤あるいは振動を発生する機械の基礎地盤が粘土質土よりなる場合，その圧密あるいは脱水状況などの考察をする一助として，時間的に一定でない外力が作用した場合の粘土層の圧密を理論的に取扱つた。粘土骨格は弾性のほかに塑性をも有するいわゆる Voigt 要素で表わされるとして議論を進めた。実験は今後行う予定であつて理論結果と実験値との比較は行つていないが，二，三の定性的性質を解明することができた。

2. 基礎振動方程式の導入

Terzaghi の圧密理論を基礎として，地盤表面に鉛直な一軸的圧密を取扱う。Terzaghi の用いた仮定にさらに次の仮定をつけ加えよう。

i) 粘土骨格の応力は変形に比例するものと，変形速度に比例するものとから成る。

ii) 可変外力が作用すれば圧密現象と膨脹現象とが交互にくり返されるが，圧密係数と膨脹係数とは相等しい。

ここで i) は Voigt 要素で表現することにほかならない。ii) は粘土においては明らかに許されないが，計算の便宜上一応仮定する。

いま $q(t)$：外力，$p(z,t)$：粘土骨格応力，$w(z,t)$：過剰水圧，t：時間，z：地表面を原点として下向きにとつた座標とすれば

$$q(t)=p(z,t)+w(z,t) \quad \cdots\cdots(1)$$

で，i) より

$$p(z,t)=-\frac{\varepsilon(z,t)}{v}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial\varepsilon(z,t)}{\partial t} \quad \cdots\cdots(2)$$

である。ここに $\varepsilon(z,t)$：変形量，v,η：係数 であつて ii) より v,η は常数である。

一方 Darcy の法則を使い，Terzaghi の仮定“変形速度は間隙水の脱水速度に等しい”を採用すれば

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=k\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad \cdots\cdots(3)$$

ただし k：透水係数

(1)，(2)，(3) より

$$\frac{\partial^3 w(z,t)}{\partial t\partial z^2}+a\frac{\partial^2 w(z,t)}{\partial z^2}-b\frac{\partial w(z,t)}{\partial t}+b\frac{dq(t)}{dt}=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

ただし

$$a=\eta/v,\ b=\eta/k \quad \cdots\cdots(5)$$

(4) が基礎方程式である。

---

* 京都大学教授，工学部土木工学教室
** 同 助手 同

3. ラプラス変換による解法

(4) を解くに当り，初期条件および境界条件として次のものを考える。

$$w(z,0)=q(0) \quad \cdots\cdots(6)$$

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial z}=0 \quad \cdots\cdots(7)$$

$$w(H,t)=0 \quad \cdots\cdots(8)$$

初期条件 (6) は過剰水圧が外力を全部うけもつと考えたもので，これの正否は不明であるが一応正しいと仮定する。境界条件 (7)，(8) は地表面が鋪装され，厚さ H の粘土層の下に砂利透水層がある場合である。

さて (6)，(7)，(8) を満足する (4) の解を見出すに (4) を t についてラプラス変換すると

$$\left.\begin{aligned} u(z,s)&=L_t\{w(z,t)\}=\int_0^\infty w(z,t)e^{-st}dt \\ h(s)&=L_t\{q(t)\} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(9)$$

なる記号をつかつて

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{su(z,s)-w(z,0)\}+a\frac{\partial^2 u(z,s)}{\partial z^2}-b\{su(z,s)-w(z,0)\}+b\{sh(s)-q(0)\}=0 \quad \cdots\cdots(10)$$

となる。(6) を (10) に代入すれば次の関係がでる。

$$(s+a)\frac{\partial^2 u(z,s)}{\partial z^2}+bs\{h(s)-u(z,s)\}=0 \quad \cdots\cdots(11)$$

(11) を z についてラプラス変換すると

$$(s+a)\left\{q^2\bar{u}(q,s)-qu(0,s)-\frac{\partial u(0,s)}{\partial z}\right\}+bs\left\{\frac{h(s)}{q}-\bar{u}(q,s)\right\}=0 \quad \cdots\cdots(12)$$

ただし
$$\bar{u}(q,s)=L_z\{u(z,s)\}=\int_0^\infty u(z,s)e^{-qz}dz \quad \cdots\cdots(13)$$

この式に (7) を代入し $\phi(s)=\dfrac{bs}{s+a}$ $\cdots\cdots(14)$

とかけば
$$\bar{u}(q,s)=\frac{q}{q^2-\phi(s)}u(0,s)-\frac{\phi(s)}{q\{q^2-\phi(s)\}}h(s) \quad \cdots\cdots(15)$$

となる。

(15) において z について逆変換をとれば

$$u(z,s)=u(0,s)\cosh\sqrt{\phi(s)}z+h(s)(1-\cosh\sqrt{\phi(s)z}) \quad \cdots\cdots(16)$$

となり，$z=H$ とおけば (8) を用いて

$$0=u(0,s)\cosh\sqrt{\phi(s)}H+h(s)(1-\cosh\sqrt{\phi(s)}H) \quad \cdots\cdots(17)$$

または
$$u(0,s)=h(s)(\cosh\sqrt{\phi(s)}H-1)/\cosh\sqrt{\phi(s)}H \quad \cdots\cdots(18)$$

を得る。これを (16) に代入すれば

$$u(z,s)=h(s)\{1-f(s)\} \quad \cdots\cdots(19)$$

ここに
$$f(s)=\cosh\sqrt{\phi(s)}z/\cosh\sqrt{\phi(s)}H \quad \cdots\cdots(20)$$

(19) を t について逆変換すれば

$$w(z,t)=q(t)-\int_0^t q(t-\tau)F(\tau)d\tau \quad \cdots\cdots(21)$$

ただし
$$F(t)=L_t^{-1}\{f(s)\} \quad \cdots\cdots(22)$$

従つて $F(t)$ が求まれば解は全く定まることになる。

さて

$$F(t)=L_t^{-1}\{\cosh\sqrt{\phi(s)}z/\cosh\sqrt{\phi(s)}H\}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\beta\to\infty}\int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta}e^{st}\frac{\cosh\sqrt{\phi(s)}z}{\cosh\sqrt{\phi(s)}H}ds \quad \cdots\cdots(23)$$

を計算するに，γ は任意の正数で積分回路は **図—1** の実線 Γ である。$f(s)$ は収斂べき級数の商であるから，被積分函数は分母を0ならしめる点を除いて解析的である。また点線経路 C についての積分は $\beta\to\infty$ で消えるから $F(t)$ は Γ と C とで囲まれた領域内にある極の留数の和に等しい。

さて分母=0 の根 s_n は

$$i\sqrt{\frac{bs}{s+a}}H=\pm\frac{2n+1}{2}\pi\equiv\pm\beta_n H \quad (n=0,1,2\cdots\cdots) \quad \cdots\cdots(24)$$

より　$$s_n=\frac{-a\beta_n^2}{b+\beta_n^2}\cdots\cdots(25)$$

であつて a,b は正であるから s_n は負である。

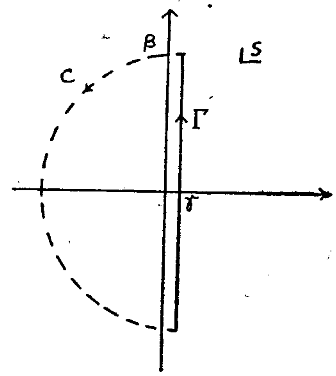
$s=s_n$ は一次の極であるから，その留数 ρ_n は

$$\rho_n=\lim_{s\to s_n}(s-s_n)e^{st}\times\frac{\cosh\sqrt{\phi(s)}\,z}{\cosh\sqrt{\phi(s)}\,H}=\frac{e^{s_nt}\cosh\sqrt{\phi(s)}\,z}{\dfrac{d}{ds_n}\cosh\sqrt{\phi(s)}\,H}\cdots\cdots(26)$$

であつて，(14)，(24)，(25) より

$$\rho_n=2(-1)^n\frac{ab\,\beta_n}{H(b+\beta_n^2)^2}\cos\beta_n z\cdot e^{s_nt}\quad\cdots\cdots(27)$$

図—1



となる。従つて

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n=\frac{2\,ab}{H}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(s_n+a)^2\beta_n\cos\beta_n z\cdot e^{s_nt}\cdots\cdots(28)$$

となるから (21) に代入して

$$w(z,t)=q(t)-\frac{2\,ab}{H}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\beta_n}{(b+\beta_n^2)^2}\cos\beta_n z\int_0^t q(t-\tau)e^{s_n\tau}d\tau\cdots\cdots(29)$$

を得る。これが (6)，(7)，(8) を満足する (4) の解である。

4. 解に対する若干の考察

(29) において二，三の吟味を行う。

A. $\eta=\infty,\ q(t)=$ 一定 $\equiv\bar q$　これは粘性がなく，一定荷重の場合であつて (29) より

$$w(z,t)=2\,\bar q\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\beta_n z}{\beta_n H}e^{-\frac{k}{v}\beta_n^2 t}\cdots\cdots(30)$$

となるが，これは Terzaghi の解に一致する。

B. $q(t)=q_0\cos\omega t$　すなわち振巾 q_0，円振動数 ω の調和振動の場合であつて (29) より

$$w(z,t)=q_0\cos\omega t-\frac{2\,abq_0}{H}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\beta_n\cos\beta_n z}{(b+\beta_n^2)^2(\omega^2+s_n^2)}\times\{-s_n(\cos\omega t-e^{s_nt})-\omega\sin\omega t\}\cdots\cdots(31)$$

となるが，級数の各項は β_n^{-3} の程度で小さくなるから，簡単のため第1項のみをとれば

$$w(z,t)\fallingdotseq q_0\cos\omega t-\frac{4\,abq_0\,\pi\cos\dfrac{\pi z}{2H}}{\omega^2(4\,bH^2+\pi^2)^2+a^2\pi^4}\left\{a\pi^2\left(\cos\omega t-e^{-\frac{a\pi^2}{4bH^2+\pi^2}t}\right)-\omega\sin\omega t\,(4\,bH^2+\pi^2)\right\}\cdots\cdots(32)$$

を得る。

(32) において $w(z,t)$ の分布は z,t によつて変化し，従つて透水方向も一定しない。t について加振の一週期だけを考えるとき，調和函数の項は脱水も吸水もなく，透水に関係するのは指数函数の項のみである。その項のみを $\bar w(z,t)$ とかけば

$$\bar w(z,t)=\frac{4a^2bq_0\pi^3}{\omega^2(4\,bH^2+\pi^2)^2+a^2\pi^4}\cos\frac{\pi z}{2\,H}e^{-\frac{a\pi^2}{4bH^2+\pi^2}t}\cdots\cdots(33)$$

となり脱水量 Q は

$$Q=k\int_0^t\frac{\partial^2\bar w}{\partial z^2}dt=A\cos\frac{\pi z}{2\,H}(e^{-\xi t}-1)\cdots\cdots(34)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{ab\,\pi^3(4bH^2+\pi^2)q_0}{H^2\{\omega^2(4\,bH^2+\pi^2)^2+a^2\pi^4\}}\\ \xi&=\frac{a\pi^2}{4\,bH^2+\pi^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(35)$$

であるから，脱水量は増加するが一定値を超えない。

次に ξ は a,b,H によつて変るが，粘土骨格の弾性が塑性に比べて大きいときには ξ は大きくなり，逆なら

ば小さくなる。

ξ および ω によつて簡単な吟味をしてみよう。

i) $\xi\simeq 1,\ \omega\gg 1$：このとき (32) より

$$w(z,t)=q_0\cos\omega t+\frac{4ab\pi q_0}{\omega(4bH^2+\pi^2)}\cos\frac{\pi z}{2H}\sin\omega t \qquad (36)$$

であつて，第2項は第1項に比べて小さいから $w(z,t)$ はほとんど外力に等しい。すなわち過剰水圧のみで外力をうけもち，しかも減衰が起らない。

ii) $\xi\simeq 1,\ \omega\ll 1$：このとき

$$w(z,t)=q_0\left(1-\frac{4b}{\pi}\cos\frac{\pi z}{2H}\right)\cos\omega t+\frac{4bq_0}{\pi}\cos\frac{\pi z}{2H}e^{-\frac{a\pi^2}{4bH^2+\pi^2}t} \qquad (37)$$

で t が大きくなるまで減衰項が効き，しかも調和振動の振巾も粘性の影響がある。

C. $q(t)=\begin{cases}q_0 & (T>t>0)\\ 0 & (t>T)\end{cases}$ すなわち衝撃力 q_0 が短時間 T だけ作用した場合であつて $s_0T\ll 1$ ならば

$$w(z,t)\fallingdotseq q(t)+\frac{2bs_0q_0T}{H\beta_0(b+\beta_0^2)}\cos\beta_0 z\cdot e^{s_0t} \qquad (38)$$

であつて $t>T$ では

$$w(z,t)\fallingdotseq\frac{2bs_0q_0T}{H\beta_0(b+\beta_0^2)}\cos\beta_0 z\cdot e^{s_0t} \qquad (39)$$

であつて緩和時間 $$-\frac{1}{s_0}=\frac{a\pi^2}{4bH^2+\pi^2} \qquad (40)$$

で過剰水圧は減衰する。

5. 結　言

以上において粘土層が Voigt 型の粘弾性を有するとして，可変外力が作用した場合の過剰水圧の変化について簡単な解析を行つた。沈下および透水の問題もこれから発展できると思われる。前節において週期荷重の場合を取扱つたが，その時土に張力が働らくように考えられるが実際的問題としては一定静荷重をつけ加えて張力が働らかないようにしなければならない。その場合には前節の取扱いは初期条件を少し変えればそのまま利用できる。本論文は理論的考察のみであつて将来実験を経て改めて考察しようと思う。 (昭.28.7.18)

土性及土質工法 随筆

塑性体としての水平層を有する地山中のトンネル応力について

正員 小田英一*

ON THE STRESS DISTRIBUTION AROUND A TUNNEL IN THE GROUND CONTAINING A PLASTIC HORIZONTAL STRATUM

(Trans. of JSCE, April 1954)

Eiichi Oda, C.E. Member

Synopsis When a tunnel is driven in the plastic stratum which is contained in the elastic ground with a horizontal surface, the material of the plastic stratum may flow plastically with slow velocity or expand towards the center of the tunnel, and then a certain state of equilibrium may be regained by supporting with timbering.

This paper describes the theory with which the streesses around the tunnel can be calculated at this state of equilibrium and the formula with which a boundary curve between a region of plastic flow and that of plastic nonflow can be calculated.

* 広島大学助教授，工学部土木建築教室