

ば小さくなる。

ε および ω によつて簡単な吟味をしてみよう。

i) ε ≃ 1, ω ≫ 1: このとき (32) より

$$w(z, t) = q_0 \cos \omega t + \frac{4ab\pi q_0}{\omega(4bH^2 + \pi^2)} \cos \frac{\pi z}{2H} \sin \omega t \dots\dots\dots (36)$$

であつて、第2項は第1項に比べて小さいから $w(z, t)$ はほとんど外力に等しい。すなわち過剰水圧のみで外力をうけもち、しかも減衰が起らない。

ii) ε ≃ 1, ω ≪ 1: このとき

$$w(z, t) = q_0 \left(1 - \frac{4b}{\pi} \cos \frac{\pi z}{2H} \right) \cos \omega t + \frac{4bq_0}{\pi} \cos \frac{\pi z}{2H} e^{-\frac{a\pi^2}{4bH^2 + \pi^2} t} \dots\dots\dots (37)$$

で t が大きくなるまで減衰項が効き、しかも調和振動の振巾も粘性の影響がある。

C. $q(t) = \begin{cases} q_0 (T > t > 0) \\ 0 (t > T) \end{cases}$ すなわち衝撃力 q_0 が短時間 T だけ作用した場合であつて $s_0 T \ll 1$ ならば

$$w(z, t) = q(t) + \frac{2bs_0q_0T}{H\beta_0(b + \beta_0^2)} \cos \beta_0 z \cdot e^{\beta_0 t} \dots\dots\dots (38)$$

であつて $t > T$ では

$$w(z, t) = \frac{2bs_0q_0T}{H\beta_0(b + \beta_0^2)} \cos \beta_0 z \cdot e^{\beta_0 t} \dots\dots\dots (39)$$

であつて緩和時間 $\frac{1}{s_0} = \frac{a\pi^2}{4bH^2 + \pi^2} \dots\dots\dots (40)$

で過剰水圧は減衰する。

5. 結 言

以上において粘土層が Voigt 型の粘弾性を有するとして、可変外力が作用した場合の過剰水圧の変化について簡単な解析を行つた。沈下および透水の問題もこれから発展できると思われる。前節において週期荷重の場合を取扱つたが、その時土に張力が働らくように考えられるが実際の問題としては一定静荷重をつけ加えて張力が働らかないようにしなければならない。その場合には前節の取扱いを少し変えればそのまま利用できる。本論文は理論的考察のみであつて将来実験を経て改めて考察しようと思う。 (昭.28.7.18)

土性及土質工法
随筆

塑性体としての水平層を有する地山中の
トンネル応力について

正 員 小 田 英 一*

ON THE STRESS DISTRIBUTION AROUND A
TUNNEL IN THE GROUND CONTAINING A
PLASTIC HORIZONTAL STRATUM

(Trans. of JSCE, April 1954)

Eiichi Oda, C.E. Member

Synopsis When a tunnel is driven in the plastic stratum which is contained in the elastic ground with a horizontal surface, the material of the plastic stratum may flow plastically with slow velocity or expand towards the center of the tunnel, and then a certain state of equilibrium may be regained by supporting with timbering.

This paper describes the theory with which the stresses around the tunnel can be calculated at this state of equilibrium and the formula with which a boundary curve between a region of plastic flow and that of plastic nonflow can be calculated.

* 広島大学助教授，工学部土木建築教室

要旨 水平な地表面を有する弾性体の地山中に塑性体とみなされる水平層が存在する場合を仮定する。この塑性層中にトンネルを穿てば、塑性体の物質はトンネル中心方向に塑性流動を起す。その後支保工で支えて応力の平衡状態をえたときのトンネル周辺の応力分布及び塑性流動限界を求める理論について考察した。

1. 緒言

従来よりトンネル応力の研究は弾性体とみなした地山中に穿つたトンネルについてなされたが弾性体としての地山中のトンネルは比較的安楽なトンネルであるが、トンネル工事で難工事となるのは塑性体とみなされる膨脹性地山中のトンネルの場合で、この問題についてはあまり十分な研究が進められていないようである。このような見地から塑性体の水平層中のトンネル応力についての理論の考察を行った。

この問題の解法においては応力の平衡条件と yielding condition とより連立偏微分方程式がえられる。これより特有連立偏微分方程式を導き、これが非廻転圧縮流体の式の場合と類似して、物理面の特有曲線が slip line となることに注目して境界条件をみたすように解を求めるのである。

2. 塑性体の二次元問題における応力の基礎方程式

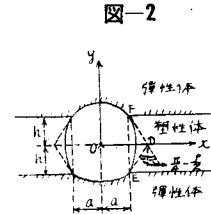
水平層は土のごとき塑性体よりなつていて、その厚さはトンネルの高さよりやや小なりとする。トンネルの構造は塑性体物質がトンネルに膨脹してきて、これを削り取つて支えることができるような膨脹に應ずることのできる構造とする。

地山がトンネルの寸法に較べて無限に拡がつていて、坑口より相当の距離の地点の応力状態を考える。しからばトンネルの軸に直交する鉛直平面上の二次元の応力問題として取り扱つてよい。故に 図-1 のごとくトンネル中心を直角座標の原点Oにとり、水平軸を x 軸、鉛直軸を y 軸とする。水平層の厚さは地山の地表面よりの深さに比較して僅少なりとすれば、水平層の自重は無視して考える。 σ_x : 水平方向の直応力、 σ_y : 鉛直方向の直応力、 τ : 剪断応力、とすれば、応力の平衡条件式は次式となる。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ρ : 塑性体の内部摩擦角、 φ : 水平軸と最大主応力のなす角、

$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ とすれば、粘着力なき場合を考えるととして 図-2 に示す



ごとく Mohr の応力円と剪断試験の限界線とが切する関係より yielding condition は次式となる。

$$\sigma_x = \sigma(1 + \sin \rho \cos 2\varphi), \quad \sigma_y = \sigma(1 - \sin \rho \cos 2\varphi), \quad \tau = \sigma \sin \rho \sin 2\varphi \dots\dots\dots (2)$$

(2) 式を (1) 式に代入して次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sin \rho \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\sigma \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \\ \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (1 - \sin \rho \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\sigma \sin \rho \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

連立偏微分方程式における特有帯の理論によつて (3) 式を解くことは次の特有連立方程式¹⁾を解くことに帰着する。ただし α, β は特有変数とする。

C_+ 曲線: $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\sin 2\varphi + \cos \rho}{\cos 2\varphi + \sin \rho} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \dots\dots\dots (4)$

C_- 曲線: $\frac{\partial y}{\partial \beta} = \frac{\sin 2\varphi - \cos \rho}{\cos 2\varphi + \sin \rho} \frac{\partial x}{\partial \beta} \dots\dots\dots (5)$

Γ_+ 曲線: $\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} = -2\sigma \tan \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \dots\dots\dots (6)$

Γ_- 曲線: $\frac{\partial \sigma}{\partial \beta} = 2\sigma \tan \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \dots\dots\dots (7)$

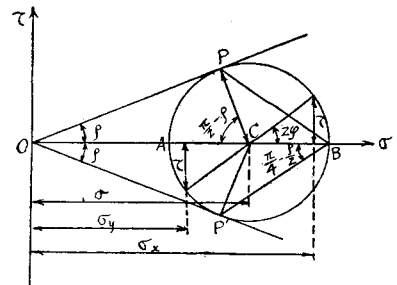
C_+, C_- 曲線は物理面 x, y 面についてであり、 Γ_+, Γ_- 曲線は応力面、 σ, φ 面についてである。

3. 物理面における特有曲線の性質

$r = \alpha, \beta$ の二つの場合に、物理面の特有曲線 C_+, C_- 曲線が副変数 r を用いて

$$x = x(r), \quad y = y(r)$$

の形で与えられているとき、特有条件式は次式となる。



$$(2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi + 2\sigma \sin^2 \rho) \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 - 4\sigma \sin \rho \sin 2\varphi \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right) + (2\sigma \sin^2 \rho - 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi) \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 = 0$$

上式を變形して

$$\frac{\{ \sqrt{2\sigma \sin \rho + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi} dy - \sqrt{2\sigma \sin \rho - 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi} dx \}^2}{\{ (\sqrt{2\sigma \sin \rho + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi})^2 + (\sqrt{2\sigma \sin \rho - 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi})^2 \} (dx^2 + dy^2)} = \frac{1 - \sin \rho}{2} \dots \dots \dots (8)^2$$

図-3 において x, y 平面においてベクトル \vec{q} の x, y 成分をそれぞれ $\sqrt{2\sigma \sin \rho + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi}$ 及び $\sqrt{2\sigma \sin \rho - 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi}$ とする。
 C_+, C_- 曲線の交点におけるこれらの曲線の切線と、この交点 P を通る \vec{q} となす角を求めるには、 C 特有曲線の方向 r の線素片の直角成分 dx, dy を用いて図-4より

$$\begin{aligned} & \sqrt{2\sigma \sin \rho + 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi} dy \\ & - \sqrt{2\sigma \sin \rho - 2\sigma \sin \rho \cos 2\varphi} dx \\ & = \vec{q} \cdot d\vec{r} \sin A \\ & dx^2 + dy^2 = d\vec{r}^2 \end{aligned}$$

ただし A : C 曲線の一つの切線と \vec{q} となす角、これらの式を (8) 式に代入して $\vec{q} = \sqrt{4\sigma \sin \rho}$ なることを用いて A を求めれば

$$A = \sin^{-1} \left\{ \pm \sqrt{\frac{1 - \sin \rho}{2}} \right\} = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \dots \dots \dots (9)$$

(9) 式において複号の現われることは C 特有曲線の二分岐 C_+, C_- のその交点 P における二切線がベクトル \vec{q} 方向と等角 $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right)$ をなすことを示す。

また P 点における C_+, C_- 曲線の切線が x 軸となす角を図-3のごとくそれぞれ w, w' とする。(4) 式及び (5) 式より $w - w' = \frac{\pi}{2} - \rho$ となる。図-2 の関係より二つの相交わる slip line のなす角は $\frac{\pi}{2} - \rho$ にして、slip line と最大主応力方向となす角は $\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$ なる角をなすことより、 \vec{q} の方向が最大主応力方向ならば、 C_+, C_- 曲線の方向は slip line の方向となる。

4. 水平層中のトンネル周辺応力の解法

(A) $\varphi = f(y)$ となる領域の解法 この場合の応力状態を決定する境界条件を考えるに、トンネルより相当距たつた所では、水平層と上下の弾性体との境界の二つの水平直線は一つの slip line となり、トンネルより右方無限遠まで考えるとき下方の水平境界直線上では最大主応力線は $+x$ 軸方向と $\varphi = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right)$ なる角をなし、上方の水平境界直線上では最大主応力線は $+x$ 軸方向と $\varphi = \frac{3}{4}\pi + \frac{\rho}{2}$ なる角をなし、この領域の水平層中では φ の値は y の変化に従い $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right)$ より $\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\rho}{2} \right)$ まで変化し x には無関係である。故にこの領域中では $\varphi = f(y)$ として (3) 式に代入して微分方程式を解けば

$$Cy = 2\varphi \sin \rho - \sin 2\varphi + C_2 \dots \dots \dots (10)$$

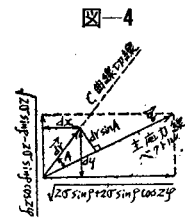
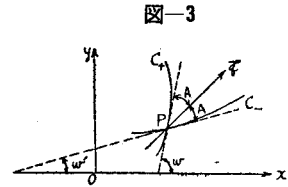
ただし C, C_2 は積分常数である。

(4) 式より $\frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\sin 2\varphi + \cos \rho}{\cos 2\varphi + \sin \rho}$

上式に (10) 式を代入したものを積分して

$$Cx = -2\varphi \cos \rho - \cos 2\varphi + \text{const.}(\beta) \dots \dots \dots (11)$$

(11) 式は C_+ 曲線を表わす。



$$\text{また(5)式より } \frac{dy}{d\varphi} \Big/ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\sin 2\varphi - \cos \rho}{\cos 2\varphi + \sin \rho}$$

上式に (10) 式を代入したものを積分して

$$Cx = 2\varphi \cos \rho - \cos 2\varphi + \text{const. } (\alpha) \dots\dots\dots (12)$$

(12) 式は C₋ 曲線を示す。

次に Γ 特有曲線の方程式を用いて σ を求める。(6) 式及び (7) 式を用いて

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} d\beta = \sigma \left\{ \tan \rho \frac{\partial(-2\varphi)}{\partial \alpha} d\alpha + \tan \rho \frac{\partial(2\varphi)}{\partial \beta} d\beta \right\}$$

Γ_+ 曲線, Γ_- 曲線はそれぞれ C₊ 曲線, C₋ 曲線に対応する故に, 上式の右辺第1項の -2φ には (11) 式を用い, 第2項の 2φ には (12) 式を用いて

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = \tan \rho \cdot d \left(\frac{Cx + \cos 2\varphi}{\cos \rho} \right)$$

$$\text{上式を積分して } \sigma = C_1 \exp \left[\frac{\tan \rho}{\cos \rho} (\cos 2\varphi + Cx) \right] \dots\dots\dots (13)$$

ただし C₁ は積分常数である。

$y=0$ のとき $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ なる故に, これを (10) 式に代入すれば $C_2 = -\pi \sin \rho$ となる。故に (10) 式は

$$Cy = (2\varphi - \pi) \sin \rho - \sin 2\varphi$$

となる。

今水平層の厚さを $2h$ とすれば, 塑性体と弾性体との下方の境界面すなわち $y = -h$ において $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$ となる故に, 上式より C は次のようになる。

$$C = \frac{(\pi + 2\rho) \sin \rho + 2 \cos \rho}{2h}$$

これを上式に代入して

$$y = 2h \frac{(2\varphi - \pi) \sin \rho - \sin 2\varphi}{(\pi + 2\rho) \sin \rho + 2 \cos \rho} \dots\dots\dots (14)$$

C の値を (13) 式に代入すれば

$$\sigma = C_1 \exp \left[\frac{\tan \rho}{\cos \rho} \left\{ \cos 2\varphi + \frac{(\pi + 2\rho) \sin \rho + 2 \cos \rho}{2h} x \right\} \right] \dots\dots\dots (15)$$

(15) 式を (2) 式に代入して

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= C_1 (1 + \sin \rho \cos 2\varphi) \exp \left[\frac{\tan \rho}{\cos \rho} \left\{ \cos 2\varphi + \frac{(\pi + 2\rho) \sin \rho + 2 \cos \rho}{2h} x \right\} \right] \\ \sigma_y &= C_1 (1 - \sin \rho \cos 2\varphi) \exp \left[\frac{\tan \rho}{\cos \rho} \left\{ \cos 2\varphi + \frac{(\pi + 2\rho) \sin \rho + 2 \cos \rho}{2h} x \right\} \right] \\ \tau &= C_1 \sin \rho \sin 2\varphi \exp \left[\frac{\tan \rho}{\cos \rho} \left\{ \cos 2\varphi + \frac{(\pi + 2\rho) \sin \rho + 2 \cos \rho}{2h} x \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

次に C の値を (11) 式及び (12) 式に代入すれば slip line の C₊, C₋ の曲線が求まる。これを (14) 式とともに書いて, φ を副変数として表わせば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} y_{1,2} &= 2h \frac{(2\varphi - \pi) \sin \rho - \sin 2\varphi}{(\pi + 2\rho) \sin \rho + 2 \cos \rho} \\ \text{C}_+ \text{-slip line } \quad x_1 &= \frac{-2\varphi \cos \rho - \cos 2\varphi}{(\pi + 2\rho) \sin \rho + 2 \cos \rho} 2h + \text{const. } (\beta) \\ \text{C}_- \text{-slip line } \quad x_2 &= \frac{2\varphi \cos \rho - \cos 2\varphi}{(\pi + 2\rho) \sin \rho + 2 \cos \rho} 2h + \text{const. } (\alpha) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ただし $y_{1,2}$ はそれぞれ y_1, y_2 を一括して表わしたものである。

(B) $\varphi = f(x, y)$ となる領域の解法 次にトンネルの側壁近傍の slip line 及び応力を求める方法について述べる。

(6) 式及び (7) 式を積分したものを (4) 式, (5) 式とそれぞれ組み合わせて

C₊-slip line 上においては

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi\right\} \text{ 及び } \log \sigma = -2 \tan \rho \cdot \varphi + 2R(\beta) \dots\dots\dots(18)$$

となる。ただし $2R(\beta)$ は β に関する函数である。故に C_+ -slip line を α -slip line と称することにする。
 C_- -slip line 上においては

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left\{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi\right\} \text{ 及び } \log \sigma = 2 \tan \rho \cdot \varphi + 2S(\alpha) \dots\dots\dots(19)$$

となる。ただし $2S(\alpha)$ は α に関する函数である。故に C_- -slip line を β -slip line と称することにする。(18)式及び(19)式において物理面の点と応力面の点との間には1対1の対応がある。

図-5

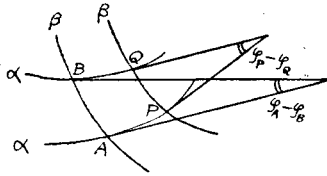


図-6

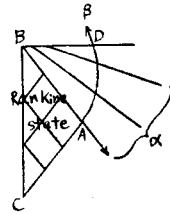


図-5において α -line と β -line との交点 Q,P,A,B の σ の値をそれぞれ $\sigma_Q, \sigma_P, \sigma_A, \sigma_B$ とし, φ の値をそれぞれ $\varphi_Q, \varphi_P, \varphi_A, \varphi_B$ とする。(18)式, (19)式を用いて

$$\sigma_Q - \varphi_P = \varphi_B - \varphi_A \dots\dots\dots(20)$$

(19)式及び(20)式より

$$\log \sigma_Q - \log \sigma_P = \log \sigma_B - \log \sigma_A \dots\dots\dots(21)$$

図-6に示す領域 ABD において AD なる曲線を β -line とし, AB なる直線を α -line とすれば, この二線によつて規定される領域 ABD 中の slip line は(20)式により, すべての α -line は直線となる。

図-7

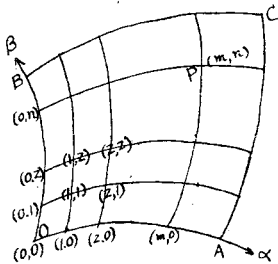
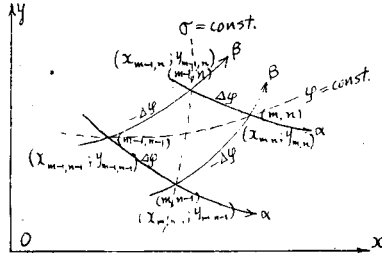


図-8



いま境界条件として1ヶの α -line と1ヶの β -line がそれぞれ(17)式の C_+ -slip line, C_- -slip line とし
 て既知の場合の解法について述べる。図-7において OA 線を base α -line, OB 線を base β -line とすれば,
 これにより規定される塑性領域 OACB 内の座標及びその点の応力を決定できる。(m,n)点の φ を $\varphi_{m,n}$ とす
 れば(20)式より

$$\varphi_{m,n} = \varphi_{m,0} + \varphi_{0,n} - \varphi_{0,0} \dots\dots\dots(22)$$

OA 線と OB 線の上では φ の値既知なる故 $\varphi_{0,0}, \varphi_{1,0}, \varphi_{0,1}$ より $\varphi_{1,1}$ を求め, $\varphi_{1,1}, \varphi_{2,0}, \varphi_{1,0}$ より $\varphi_{2,1}$ を求め,
 以下同様にしてこの領域中のすべての点の φ の値を求めることができる。

また OA 線, OB 線上にそれぞれ base point として (0,0), (1,0), (2,0).....(m,0),.....及び (0,0), (0,1),
 (0,2),.....(0,n),.....をとり, これらはそれぞれ一定の φ の増分 $\Delta\varphi, -\Delta\varphi$ の値だけ間隔をもつようにする。こ
 のようにして作られる equiangular net により σ なる応力分布を明瞭にすることができる。すなわち 図-8
 において(21)式より

$$\log \sigma_{m,n} = \log \sigma_{m,m-1} + \log \sigma_{m-1,n} - \log \sigma_{m-1,n-1} \dots\dots\dots(23)$$

これより(22)式の手続きと同様にこの領域中のすべての点の σ の値を求めることができる。また(23)式より

$$\log \sigma_{m-1,n} = \log \sigma_{m,n-1}$$

すなわち (m,n-1) 点と (m-1,n) 点なる opposite nodal points を通る diagonal curve は $\sigma = \text{const}$ なる
 曲線となる。また(20)式より

$$\varphi_{m,n} = \varphi_{m-1,n-1}$$

すなわち $(m-1, n-1)$ 点と (m, n) 点なる opposite nodal points を通る diagonal curve は $\varphi = \text{const}$ なる曲線となる。

図-7 における α -line, β -line の交点としてきまる網目の各節点の座標は approximate step-by-step procedure³⁾ により求める。すなわち 図-8 において $(x_{m-1,n-1}; y_{m-1,n-1}), (x_{m,n-1}; y_{m,n-1}), (x_{m-1,n}; y_{m-1,n})$ の3点の座標が既知のとき, $(m, n-1)$ 点を通る β -line と $(m-1, n)$ 点を通る α -line との交点 (m, n) の座標 $(x_{m,n}; y_{m,n})$ は次のごとくして求める。(18) 式, (19) 式の第1式を次の形に書き表わす

$$\alpha\text{-line 上では} \quad dy = \tan\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi\right\} dx$$

$$\beta\text{-line 上では} \quad dy = \tan\left\{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \varphi\right\} dx$$

ここで $dy \rightarrow \Delta y, dx \rightarrow \Delta x$ とし, φ の値として slip line 上の隣接せる節点の φ の平均値をとる。しからば上式よりそれぞれ次式をうる。

$$y_{m,n} - y_{m-1,n} = \left[\tan\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{2}(\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n})\right\} \right] (x_{m,n} - x_{m-1,n})$$

$$y_{m,n} - y_{m,n-1} = \left[\tan\left\{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{2}(\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1})\right\} \right] (x_{m,n} - x_{m,n-1})$$

これより $x_{m,n}, y_{m,n}$ を求めれば

$$x_{m,n} = \frac{(y_{m-1,n} - y_{m,n-1}) + \left[\tan\left\{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{2}(\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1})\right\} \right] x_{m,n-1} - \left[\tan\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{2}(\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n})\right\} \right] x_{m-1,n}}{\tan\left\{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{2}(\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1})\right\} - \tan\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{2}(\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1})\right\}}$$

$$y_{m,n} = \frac{(x_{m-1,n} - x_{m,n-1}) + \left[\cot\left\{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{2}(\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1})\right\} \right] y_{m,n-1} - \left[\cot\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{2}(\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n})\right\} \right] y_{m-1,n}}{\cot\left\{-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{2}(\varphi_{m,n} + \varphi_{m,n-1})\right\} - \cot\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right) + \frac{1}{2}(\varphi_{m,n} + \varphi_{m-1,n})\right\}}$$
(24)

この近似解法は網目を細かくするほど精度はよくなる。

図-9

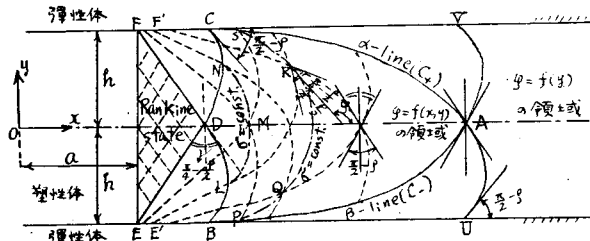


図-9 に示すごとくトンネル中心Oより右側について考える。AC, AB なる曲線より右方無限遠へは $\varphi = f(y)$ なる条件が満たされる故 slip line は (17) 式で表わされ, 応力は (16) 式により求められる。(17) 式で表わされる AC 曲線, AB 曲線はそれぞれ base α -line, base β -line で, この曲線上での σ は (15) 式で表わされる。これらの base slip line で規定される塑性域は ACDB であり, この領域では (22) 式, (23) 式, (24) 式によりそれぞれ φ, σ 及び slip line 上の各節点の座標がきまり, かつD点の応力を求められる。次に FDE なる領域は Rankine state とみなされ, slip line は直線である。そうして2組の slip line は鉛直方向と $\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$ の

角をなす。Rankine state の領域中のすべての節点では最小主応力は水平方向，最大主応力は鉛直方向となり，その値は皆等しく，D点の応力で表わされる。故にトンネルの形はトンネルの側壁の曲線がE,Fを通りEDF内に存在する形ならば，側壁に作用する水平応力 σ_{ax} は皆等しく，D点の水平応力と等しくなる。鉛直線EFはトンネル中心Oより a なる距離にあるとすれば，D点の座標もきまり図-9より $(a+h \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}), 0)$ となる。(D点の水平応力) $= \sigma_{ax}$ より C_1 なる積分常数が σ_{ax} にて表わされる。故にDC曲線，DB曲線より右方の領域の応力は σ_{ax} の函数として表わされることとなる。

次に DCF の塑性域は boundary slip line としては DC 曲線と DF 直線により規定され，曲線 DC 上の各点を通りこの曲線と $\frac{\pi}{2} - \rho$ の角をなす他の slip line は (20) 式より直線となる。たとえば曲線 DC 上の一点Nを通る直線 NF' 上ではそれぞれ (18) 式，(20) 式より σ, φ はすべてN点の σ, φ の値に等しくなるから，この領域中の応力も σ_{ax} の函数として表わされる。領域 DBE も全く同様である。

5. 塑性流動限界

水平層中にトンネルを穿ち塑性物質が塑性流動を起し，トンネルに膨張してきたものを削り取り，支保工で側壁を支えたとき，塑性流動を起した領域と起さない領域との境界，すなわち塑性流動限界の形及びその位置を求める。いま地山は水平な地表面をもつとし，トンネル中心は地表面より H なる深さにあるとする。また水平層より上にある地山の単位容積当りの重さを γ とする。 N_p : 塑性体の flow value, とすれば

$$N_p = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}\right) = \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho}$$

塑性流動限界を求める条件式は次のごとくなる。

$$\gamma H + \frac{\gamma H}{N_p} = \sigma_x + \sigma_y = 2\sigma \dots\dots\dots (25)$$

図-9 の AC, AB 両曲線より外方の $\varphi = f(y)$ の領域では σ_x, σ_y の値は (16) 式を用いて，これを (27) 式に代入して x を求める。この領域中の塑性流動限界は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2h}{(\pi + 2\rho)\sin\rho + 2\cos\rho} \left[\frac{\cos\rho}{\tan\rho} \left\{ \log \frac{\gamma H(1 + N_p)}{2C_1 N_p} \right\} - \cos 2\varphi \right] \\ y &= 2h \frac{(2\varphi - \pi)\sin\rho - \sin 2\varphi}{(\pi + 2\rho)\sin\rho + 2\cos\rho} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

すなわち x, y は φ を副変数として表わされる。ただし φ の値は $y = -h$ における $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$ なる値より $y = 0$ における $\varphi = \frac{\pi}{2}$ なる値を通過して， $y = h$ における $\varphi = \frac{3}{4}\pi + \frac{\rho}{2}$ なる値まで変化する。

次に 図-9 の ABCD なる領域における塑性流動限界を求める。2組の slip line の交点の中で opposite nodal points となる点を通る diagonal curve が x 軸を切る点でその切線の方向が鉛直となるごとき diagonal curve に沿い σ はすべて等しく，この σ が (25) 式を満足するとき，この diagonal curve が塑性流動限界となる。FDC 及び EDB の領域中の塑性流動限界を求めるには，たとえば 図-9 における E'LMNF' なる線に沿つて σ はすべて等しく，この σ が (27) 式を満たせば，この線が塑性流動限界となる。

6. 数値計算例

トンネルの形は矩形とし $a = h = 2\text{ m}$, $\rho = 16^\circ$, $H = 300\text{ m}$, $\gamma = 2.4\text{ t/m}^3$ とする。いま approximate step-by-step procedure により計算するため， $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} = 37^\circ$ より $\varphi = \frac{3}{4}\pi + \frac{\rho}{2} = 143^\circ$ まで 12 等分して $d\varphi = 8^\circ 50'$ の間隔に分けて計算を行えば，図-9 に示す ACDB 及び DCF, DBE の領域の slip line は 図-10 のごとなる。 σ_x, σ_y の状態は 図-11 に示し， τ の状態は 図-12 に示す。また塑性流動限界と σ_{ax} との関係は 図-13 に示す。

7. 結 語

図-11, 12 から次のことがいえる。

(1) σ_x, σ_y, τ の値はトンネルに近くなるほど小となる。これはトンネルの近くでは塑性流動すなわち膨張をなして，このトンネルに膨み出した塑性物質を除去して支保工で支えれば，膨張しないときの応力より軽減されることを示し，トンネルより塑性流動限界まで応力は増し，ここで主応力の平均値 σ が初期応力の σ と等しくなつて，それより外方では塑性流動は起さないこととなる。

図-10

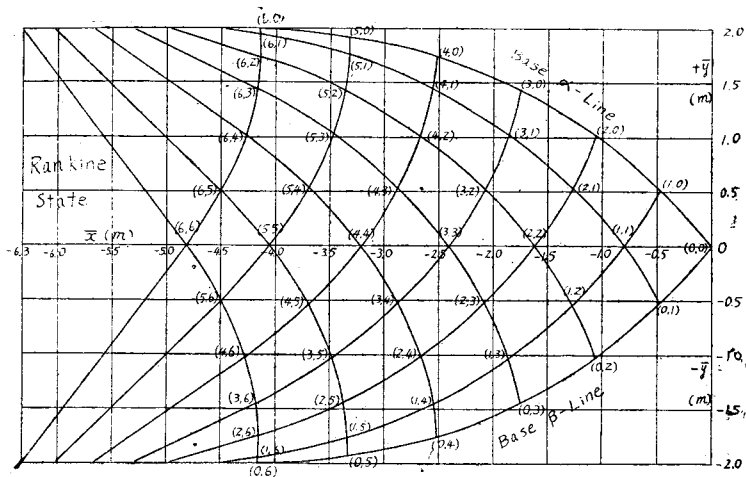


図-11

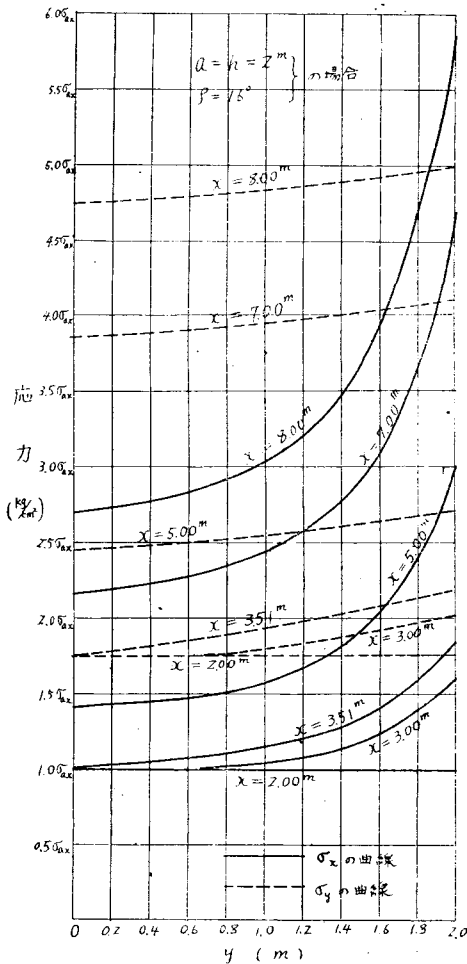
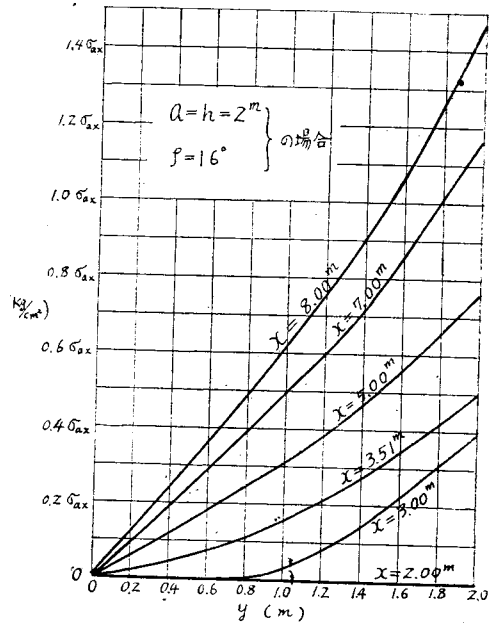


図-12



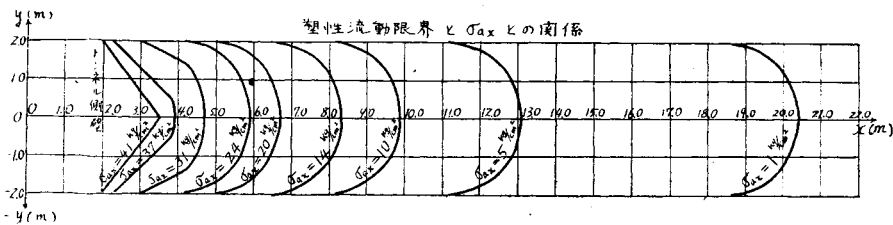
(2) $\sigma_x, \sigma_y, |\tau|$ は塑性体としての水平層と弾性体との上下の境界面に向うに従い、その大きさを増すのは、この境界面による摩擦力に影響されるためである。またx軸に近い塑性物質ほどトンネル中心に向い塑性流動をなす。

本文においては応力はすべて σ_{ax} で表わされているが、塑性流動を起すに従い上盤、下盤の変形が大となり、この変形とトンネル中心より塑性流動限界までの距離との関係が判明すれば、変形の限度のときの塑性流動限界がきまり、従つてこのときの σ_{ax} が決定する。しからば本問題の

応力の数値が求められるが、今後さらにこの問題につき研究を進めてゆきたい。

終りに本研究には京大教授村山朔郎先生より多大の御援助、御助言を得たことを附記し厚く謝意を表するものである。

図-13



参考文献

- 1) 犬井鉄郎：“応用偏微分方程式論” 1951, p. 338
- 2) Nobuo Inoue ; “Application of the Theory of Supersonic Flow to the Two-dimensional Isostica Problem in the Theory of Plasticity.”
Journal of the Physical Society of Japan, Vol.6, No.6, Nov.-Dec. 1951
- 3) R. Hill : “The Mathematical Theory of Plasticity.” 1950, p. 141 (昭. 28. 9. 1)

応用力学
構造物

弾性梁に支持される連続版の解法並びに弾性梁の
振りモーメントが連続版に及ぼす影響について

正員 岡元北海*

SOLUTION OF A CONTINUOUS PLATE IN ONE DIRECTION
AND INFLUENCE OF TORSIONAL MOMENT IN ELASTICALLY
BEAM ON THE CONTINUOUS PLATE

(Trans. of JSCE, April 1954)

Kitami Okamoto, C.E. Member

Synopsis This article presents solution of a continuous plate in one direction and explains the influence of torsional moment in elastically beam on the continuous rectangular plate simply supported on two sides and on the other two sides by elastic beams.

要旨 相対する2辺にて単純に支持され、その辺に直角な方向において弾性梁にて支えられた矩形平版の一般解法を示し、並びに梁の振りモーメントが矩形平版に及ぼす影響について論じたものである。

目次

- | | |
|--------------|-------------|
| 1. 緒言 | 5. 連続版の一般解法 |
| 2. 版の基本公式の誘導 | 6. 計算例 |
| 3. 双曲線函数の性質 | 7. 結言 |
| 4. 版の基本公式の証明 | |

1. 緒言

従来弾性梁に支持される連続版においては、梁の振りモーメントを無視して計算している。実際においては版と梁とは一体になつていて、梁の振りモーメントを無視できない場合が多い。筆者は相対する辺において単純に支持されている連続版が弾性梁に支持されている場合、梁の振りモーメントを考慮に入れた一般解法を試み、その影響を論じたものである。この版の計算に当たり、仮定した事項は次のとおりである。

1. 版はうすくその撓みは厚さに比べて小さい。
2. 版は相対する2辺で単純に支持されている。

なおこの2辺と直角の方向に間隔をおいて単純梁で支持され、梁と版は接合辺に沿うて等しい撓みをなし、

* 北海道開発局土木試験所、構造研究室長