

十字材法によるラーメンの解法へ応用せる 撓角分配法

准 員 大 平 彰*

METHOD OF SLOPE DISTRIBUTION APPLIED TO THE ANALYSIS OF RIGID FRAMES REGARDING THEM AS SYSTEMS OF SPOKEWISE CONNECTED MEMBERS

(Trans. of JSCE April 1953)

Akira Ōhira, C.E. Assoc. Member

Synopsis The purpose of this paper is to illustrate a method of analysis of rectangular rigid frames, considering them as systems of spokewise connected members, by the Takabeya's method of slope distribution. It produces very rapid convergencies of approximate slopes in iteration. It is inevitable, however, that the preliminary computations become more complicated and troublesome than by the current method. To save these labours the author established simple and easily memorable rules by observing physical properties of a spoke system, and succeeded to mechanize the whole computation works.

The scope of this paper is confined to the frames without sidesways.

要 旨 矩形ラーメンを十字材系と見なして、これを解くに当り、鷹部屋教授の撓角分配法を応用することを述べたものである。イテラションにおける近似値の収斂が迅速なことが特徴であるが、準備計算に費す手数が多いので、これをできるだけ容易に、かつ機械化するため、十字材の力学的性状を観察し、簡単な記憶しやすい計算規則を与えた。

取扱うラーメンは節点に変位しないものに限つた。

1. 緒 言

本誌第 21 巻第 1 号所載の不静定構造の解法に應用せる撓角分配法（鷹部屋福平氏）の所説と、第 36 巻第 10 号の十字材系としてのラーメンの解法（村上正氏）とを対照するときは、ともに十字形に組まれた部材系を考察することにおいて類似した点があることに気づかれるであろう。以下、鷹部屋先生の方法を現行法とよび、村上先生の方法を十字材法とよぶこととする。

本文は、十字材法でラーメンを解くに当り、現行法の算法を應用することを述べたものである。現行法では、相隣る節点の撓角が互いに干渉し合う関係を知る目的で十字材が考察されているのに対して、十字材法ではラーメンを十字材の集合系とみて、十字の周囲にある節点の撓角が相互に及ぼす影響を考える点に著しい相違がある。

筆者は今春九州大学を卒業するに当り、村上先生の御指導の下にラーメン解法の研究を行い、本文の成果を卒業論文の一部として提出することを得た。部材の力学的性状をとらえて計算規則を定め、公式に頼る盲目的計算を排する方針をとつたのであるが、このことは、現行法の改善に役立つこともあろうかと考えられるので、先生のおすめに従つて発表させていただくこととした。原稿の校閲は先生の手を煩わしたのであつて、特に記して謝意を表する。

2. 単独の部材の性状

本文では節点に変位しないラーメンを考察の対象とし、その部材はすべて一様断面と定める。かかるラーメンの一部材 am の a 端を固定し、 m 端に単位の撓角 ($\theta_m = 1$) を起させるためには、つぎのモーメントを加うべきことは周知である。

$$M_{ma} = 4EK_{am} = 4EK_0k_{am} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 E : 材料のヤング係数、 I : 部材の断面 2 次モーメント、 S : 部材長、 $K = I/S$: 部材剛度、 K_0 : 特に選ばれた一部材の剛度（基準剛度）、 $k = K/K_0$: 剛比

* 清水建設株式会社、土木部

(1)式のモーメントが大きいほど m 端は廻転させにくく(曲げにくく)、小さいほど廻転させやすい(曲げやすい)。すなわち、このモーメントは m 端の廻転に対する抗抵を表わすもので、これを m 端の剛度という。いま便宜上、

$$2EK_0\theta_m = \phi_m \dots\dots\dots(2)$$

と定める。 ϕ はモーメントのデメンジョンをもち、普通撓角モーメントといわれる。撓角分配法では θ の代りに ϕ を用い、これを単に撓角とよび、あたかも θ そのものとみなすことが多い。このようにしても(2)式の関係は記憶する限り重大な混乱は起らないからで、本文でもこの方法に従う。 ϕ を用いれば(1)式は

$$M_{ma} = 2k_{am} \dots\dots\dots(3)$$

となり、材端剛度は、その端に単位撓角($\phi=1$)を与えるに要するモーメントと定義されることになる。

3. 節点の剛度とその撓角

いくつかの部材が集まる節点を考える。部材の他端を固定して、単位の回転角を起させるには、部材ごとに(3)式のモーメントを要するから、これらの総和に等しいモーメントを働かせなくてはならぬ。このモーメントを j で表わし、考える節点の剛度という。

$$j = 2 \sum k \dots\dots\dots(4)$$

j はその節点の廻転に対する抵抗を表わすのであるから、その逆数は単位モーメントを加えたとき、その節点が起す廻転角を与えることがわかる。従つて、

$$(\text{加えたモーメント}) \times \frac{1}{j} = (\text{その節点の撓角}) \dots\dots\dots(5)$$

4. 十字材の性状

A. 荷重をうけない十字材の周点をすべて固定する。中央点 a に単位のモーメントを加えると、任意のスポーク am が得る分配モーメントは、

$$\frac{k_{am}}{k_{a1} + k_{a2} + \dots} \times 1 = \frac{2k_{am}}{j_a}$$

この半分、すなわち k_{am}/j_a なるモーメントが周点 m へ到達し、それは加えたモーメントと同符号である。上のモーメントは、また、中央点 a から周点 m への到達率と考えてよい。これを記号 γ_{ma} で表わせば、

$$\gamma_{ma} = k_{am}/j_a \dots\dots\dots(6)$$

B. 無載荷、周点固定の十字材 a の、任意の周点 m を選んでその拘束を解き、これに単位の撓角 $\phi_m=1$ を与える。このために加うべきモーメントを周点 m の剛度と名づける。

まづ、 a を一時固定して上の操作を行うとき(図-2.(a)) m へ加うべきモーメントは(3)式により $2k_{am}$ 、その半分、すなわち k_{am} が a へ到達する。つぎに、 m を撓角 $\phi_m=1$ の位置で固定し、 a に $-k_{am}$ を加えてその拘束を解けば(図-2.(b)) m へ $-\gamma_{ma}k_{am}$ なるモーメントが到達する。この2段の操作の結果を総合して、周点 m はつぎの剛度をもつことがわかる。

$$\text{周点 } m \text{ の剛度} = 2k_{am} - \gamma_{ma}k_{am} \dots\dots\dots(7)$$

$\gamma_{ma}k_{am}$ は m へ加えたモーメントが中央点へ到達し、ここから逆に m へ到達するモーメントである。これを後方到達モーメントまたは、反射モーメントと名づけることとする。

$$\left. \begin{aligned} \text{後方到達モーメント} &= -\gamma_{ma}k_{am} \\ \text{後方到達率} &= -\gamma_{ma}/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

m へモーメント $2k_{am}$ を加えれば、他の周点 i へ $-\gamma_{ia}k_{am}$ なるモーメントが到達することは容易に知られる(図-2.(b))。中央点をとびこえて m から i へ到達するという意味から、これを前方到達モーメントとよぶこととする。

図-1

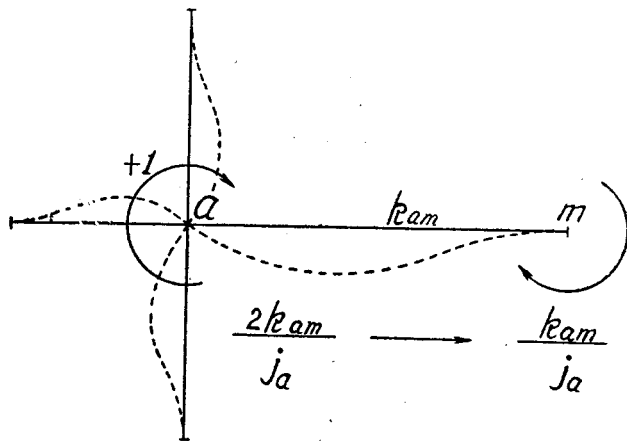
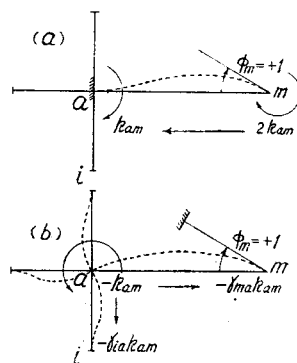


図-2



$$\left. \begin{aligned} \text{前方到達モーメント} &= -\gamma_{ia}k_{am} \\ \text{前方到達率} &= -\gamma_{ia}/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

前方及び後方到達モーメントはともに加えたモーメントと逆符号である。

5. 接続点の剛度

十字材 a の周点 m は、am を単独の部材と考えた場合よりも低い剛度を示す。その剛度低下は反射モーメントに等しいことは(7)式が示すとおりである。このことからただちに、つぎの関係が知られる。

いま、節点 m に十字材 a, b, c……が結ばれているとする(図-3)。かかる節点を特に十字材の接続点とよぶ。他の周点をみな固定して、接続点 m に単位撓角を与えるには(7)式のモーメントを総和しただけのモーメントを要するから、

$$\text{接続点 } m \text{ の剛度} = j_m - (\gamma_{ma}k_{am} + \gamma_{mb}k_{bm} + \dots\dots\dots)$$

j_m は am, bm 等を十字材に無関係な独立の部材と考えるとき、これらが集まる節点 m の剛度である。m が接続点であるときはその剛度が反射モーメント和だけ j_m より低下するのである。接続点の剛度を J で表わせば、

$$J_m = j_m - \Sigma(\text{反射モーメント}) \dots\dots\dots (10)$$

6. 十字材の固定端モーメント

荷重をうける十字材の一周点の撓角をちょうど0に拘束すべきモーメントをその点の固定端モーメントという。図-4(b)の周点に働くモーメントがそれである。同図(a)のように全節点の撓角を0に拘束すれば、中央点に $\Sigma C_{ai}(i=1, 2, \dots\dots)$ なる不釣合モーメントを生ずる。これを逆向モーメントで打消せば周点 m は $\gamma_{ma}(-\Sigma C_{ai})$ なる到達モーメントを得る。すなわち前述の固定端モーメントは次の値をとる。記号 \bar{C} で表わせば、

$$\bar{C}_{ma} = C_{ma} - \gamma_{ma}\Sigma C_{ai} \dots\dots\dots (11)$$

十字材の周点の固定端モーメントは、そのスポークを単独の部材と考えた場合の固定端モーメントより減少する。その減少値は中央点の不釣合モーメントをバランスすることによって、その周点へ到達するモーメントに等しい。

7. 接続点の撓角

m で接続された十字材系(図-5(a))の全節点を固定して、これに荷重を加えれば、m において $\Sigma \bar{C}_{mr}(r=a, b, c, \dots\dots)$ なる不釣合モーメントが存在することとなる。これをバランスするとき m が示す撓角を $\phi_m^{(1)}$ で表わせば(5)式の関係と同じ理由から、

$$\phi_m^{(1)} = (-\Sigma \bar{C}_{mr})/J_m \dots\dots\dots (12)$$

8. 撓角の到達率

図-5(a)の状態にある十字材系の全節点の廻転を拘束した後に、任意の周点 i を選んでその拘束を解きこれに撓角 ϕ_i を起させる。このとき m へ到達するモーメントは $-(\gamma_{mb}k_{bi})\phi_i$ であるから、これを逆向モーメントでバランスすれば、m が $\phi_m^{(1)}$ の位置から新たに起す廻転角は $(\gamma_{mb}k_{bi}\phi_i)/J_m$ 。これを i から m への到達角という。図-5(b)はこの操作の結果を示すもので結局 m の撓角 ϕ_m は、

$$\left. \begin{aligned} \phi_m &= \phi_m^{(1)} + \epsilon_{mi}\phi_i \\ \epsilon_{mi} &= (\gamma_{mb}k_{bi})/J_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ϵ_{mi} を i から m への撓角の到達率とよぶ。

9. 撓角の到達ルート

前節の i は十字材 b に属する周点であつて、これを操作すれば

図-3

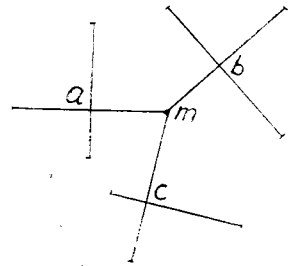


図-4

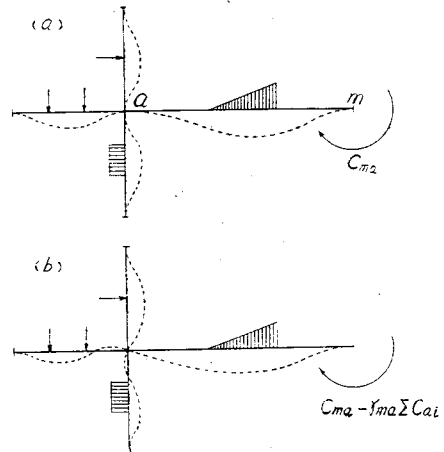
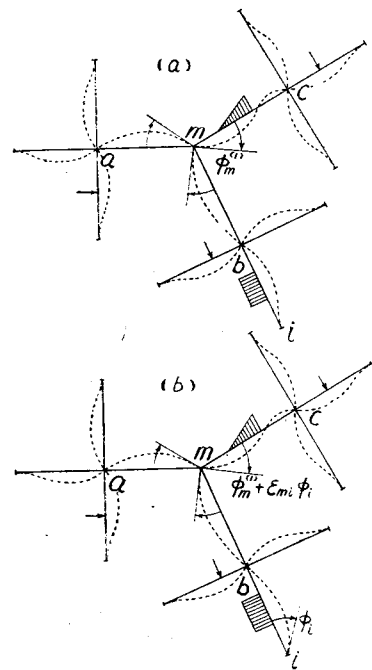


図-5



$i \rightarrow b \rightarrow m$ なるルートによつて m へ撓角が到達したわけである。いま、**図-6** の i' のごとき、他の十字材 a との接続点を考えて、これを操作すれば $i' \rightarrow b \rightarrow m$ と $i' \rightarrow a \rightarrow m$ の2つのルートを経て m へ撓角が到達する。このような場合には、合成到達率 ϵ' なるものを考え、これを用いて i' から m へ対角線的に撓角が到達するものと定める。

$$\epsilon'_{m i'} = (\epsilon_{m i'})_a + (\epsilon_{m i'})_b \dots\dots\dots(14)$$

図-6

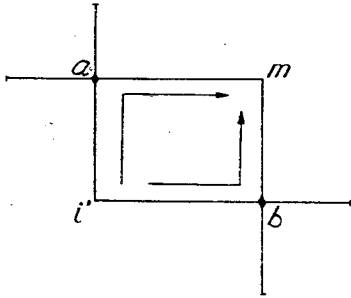
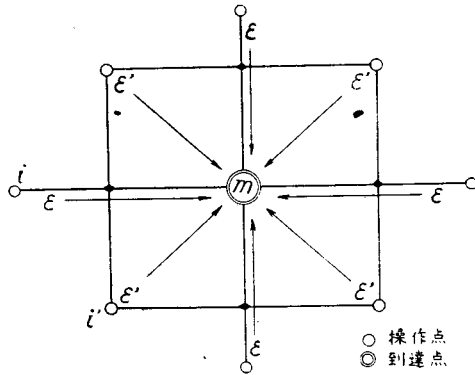


図-7



括弧につけた添字 a, b はそれぞれ ϵ を十字材 a 及び b について計算することを意味する。**図-7** は1接続点 m へ影響を及ぼす周点と、これらの周点から m へ撓角が到達するルートを示す。この図を見て、 m はこれら周点の廻転の影響を受けて一般につきの撓角を示すことがわかる。

$$\phi_m = \phi_m^{(1)} + \sum \epsilon_{m i} \phi_i + \sum \epsilon'_{m i'} \phi_{i'} \dots\dots\dots(15)$$

10. イテラチオン法

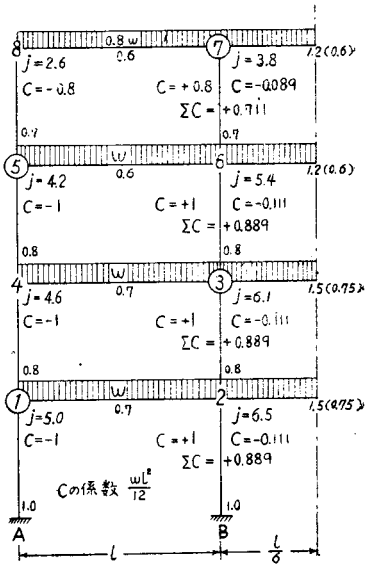
十字材系としてラーメンを解くのは、接続点ごとに撓角を求めることに帰着するが、それには (15) 式を用いてイテラチオンの算法をとる。すなわち各接続点の $\phi^{(1)}$ を求めてこれを第1近似値と定め、(15) 式の示す操作を行つて第2近似値 $\phi^{(2)}$ を求める。同様に $\phi^{(2)}$ を利用して第3近似値 $\phi^{(3)}$ を算出、この方法を繰返せば、そのたびに ϕ の近似度が高められて實際上十分正確な解が得られるのである。

11. 準備計算

図-8 のラーメンを例にとつて以上に述べた算法を説明しながら、これを解いてみよう。本例は鷹部屋先生がラーメン新論の中 (p. 165) で用いられた問題である。

(1) まづ、ラーメン図に荷重、部材の剛比等の与えられたデータを記入する。剛比 k は部材の途中に傍記。本例は対称ラーメンで、第2スパンの梁が対称変形を示す。かかる部材の k はあらかじめ1/2に補正しておけば対称軸から片側だけを取扱うことができる(説明省略)。括弧内に記された数字が k の補正值である。このデータから各節点の剛度 j を求める。例えば、 $(j) = 2(1 + 0.8 + 0.7) = 5$, $j_6 = 2(0.6 + 0.6 + 0.7 + 0.8) = 5.4$, 所定の荷重条件に対して部材ごとに固定端モーメント C を算出。その算式、符号は撓角法において周知のところである。節点ごとに C を合計して不釣合モーメント ΣC を知る。これらの結果は **図-8** に記入したとおりである。

図-8



(2) ラーメンを十字材に分ける。分け方は一通りには決まらないが、ここでは**図-8** に示すように分けた。すなわち○で囲んだ節点を接続点と考えたのである。柱 A1 のごときは唯一つのスポークよりなる十字材と見なされる。かくして、まづ接続点ごとに不釣合モーメント \bar{C} を求める。十字材ごとに中央点の不釣合モーメントをバランスさせればよいわけで、**図-9** にこの計算を示す。部材の傍に記した数字は到達率 γ で、矢は到達の方向である。対称変形材は k の補正を行つた後はもはや存在せぬものと見なしてよい。

(3) 各接続点の剛度 J を定める。考える接続点を単位角度廻転させたとき中央点から反射してくるモーメントを j から差引けばよい。

図-9

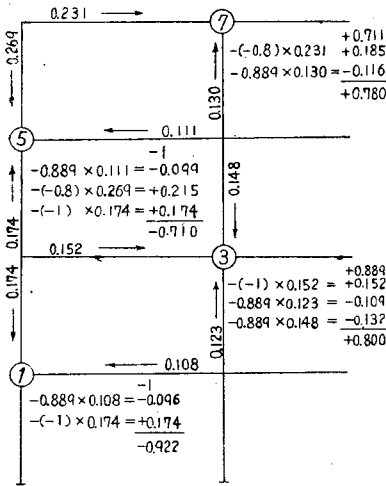


図-10

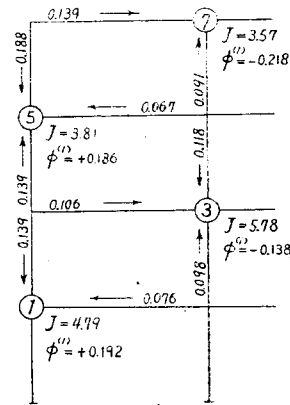


図-10はこの計算で反射モーメントは部材に傍記したとおり。例えば、 $J_5 = 4.2 - (0.188 + 0.139 + 0.067) = 3.81$ 。この結果を用いて各接続点の $\phi^{(1)}$ が求まる。 $\phi^{(1)}$ は不釣り合いモーメントをバランスしたときに起る撓角であるから、図-8の $\Sigma \bar{C}$ を J で割つて符号を変えればよいのである。図に記入の結果が得られる。

(4) 接続点から接続点への撓角到達率と、 ϵ' を決める。図-11のごとく到達ルートをも矢で示して置けば、これを頼りにして求められる。その物理的意味は8.~9.で述べたとおりで、前方到達モーメントを到達点の J で割り符号を変えればよい。図によつてその算法は明らかであろう。本図は次節の計算に有力な助けとなるのである。

図-11

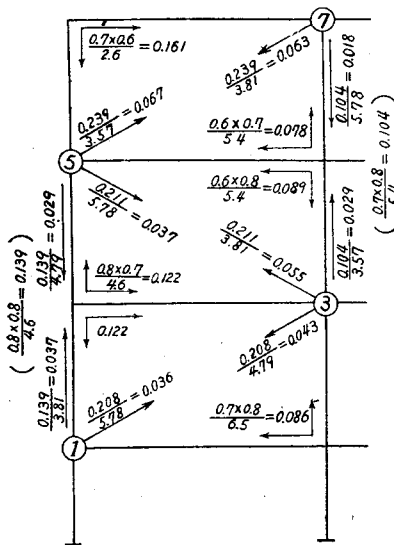
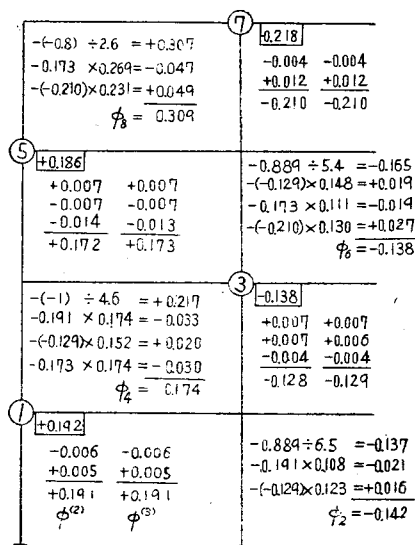


図-12



12. イテラチオン

以上で準備を終り、最後に 10. のイテラチオンを実施して接続点の撓角 ϕ を求める (図-12参照)。

まず、さきに求めた ϕ の第1近似値 $\phi^{(1)}$ をそれぞれの位置へ転記する。□ で包んだ数字がそれである。この $\phi^{(1)}$ を用いて第2近似値 $\phi^{(2)}$ を求める。計算はどこから始めてもよいが、やはり一定の順序をとるのがよい。いま、接続点1を考えよう。この点は接続点3及び5の撓角の影響を直接受け、その関係は図-11で示されている。この図を見ながら表-1の計算を行う。

求めた到達角 -0.006 と $+0.005$ を接続点 1 へ記入し $\phi_1^{(1)} = +0.192$ と合成して $\phi_1^{(2)} = +0.191$ を得る。つぎに、接続点 3 を考える。この点の撓角に直接影響するのは接続点 1, 5 及び 7 であるから図-11 の関係を見ながら、即座に表-2 の計算を行うことができる。

接続点 1 の撓角として $\phi_1^{(1)}$ よりも近似度の高い $\phi_1^{(2)}$ を仮定した点に注意されたい。得た到達角を所定の位置へ記入、 $\phi_3^{(1)} = -0.138$ と合算して $\phi_3^{(2)} = -0.128$ が算定される。以下、このような計算を繰返すのである。ここでは第 3 近似値 $\phi^{(3)}$ も求めたが、事実上第 2 近似値と等しいこと図に見るとおりである。

接続点の撓角が求まったら、次の関係に従って各十字材ごとに中央点の撓角を算定する。

$$\phi = -\frac{1}{j} (\text{不釣合モーメント}) + \Sigma' (\text{周点からの到達角})$$

図-12 の余白にこの計算を記した。上式中周点からの到達角は $-\gamma_{am}\phi_m$ で与えられる。何となれば図-2 (b) における中央点撓角 ϕ_a は 3. によれば $\phi_a = (-k_{am})/j_a = -\gamma_{am}$, ここに $\gamma_{am} = \gamma_{ma}$ であつて、これはすでに計算して図-10 に記入されている。

これで、全節点の ϕ が見出されたので、最後に撓角式を用いて端モーメントを決定して計算を終了する。

14. 結び

十字材法では与えられたラーメンを十字材の集合系とみなすから、十字材の中央点に当る節点が省略され、実際に取扱う節点数は約半数に減らされる結果となる。これに、現行法の算法を取入れるときは中央点をとびこえて周点から周点へ到達する撓角が考察される。この到達率は一般にきわめて小さく、イテラチオンにおける近似値が速かに収斂することは大きな利益である。

しかしながらその反面、準備計算が複雑さを加え、それに費やす手数が増大することは不可避的であつて、このために上の効果が大きく相殺される結果になる。この損失をできるだけ防ぐには、簡単に記憶しやすい計算規則を与えて公式を駆逐するほかはない。この目的は十字材の力学的性状を観察することによつて達せられ、計算をすべて図上で機械的に進めることに成功した。

(昭. 27. 7. 20)

コンクリート

UDC 666.97:620.17
658.562:519.24

現場コンクリートの品質を管理するに 際しての 2, 3 の問題について

正 員 水 野 俊 一*

SOME PROBLEMS ABOUT QUALITY CONTROL OF FIELD CONCRETE

(Trans. of JSCE April 1953)

Shun-ichi Mizuno, C.E. Member

Synopsis In this paper, the number of test specimens in order to know reasonably the quality and uniformity of concrete in the field, and degree of confidence to estimate variance of strength of concrete are described. The author's viewpoints for article 92 in Standard Specifications for Reinforced Concrete published by the Japan Society of Civil Engineers, and the method of rejecting data are also presented.

* 東京大学助手, 生産技術研究所第五部