

- 2) 山川浩その他; 鉄道大臣官房保健課衛生試験所報告, Vol. 1, No. 1, 昭. 15-7. p. 4, 36
 3) E.M. Killick; Carbon Monoxide Anoxemia, Physiological Reviews, Vol. 20, No. 3, 1940-7 p. 313~344
 4) F.J.W. Roughton; The Kinetics of Haemoglobin, Proc. of the Royal Society of London Vol. 115-B, 1934-8 p. 451
 5) 正路倫之助; 医用生理学 上巻
 6) E.M. Killick; Journal of Physiology, No. 87, 1936
 7) 前掲 3) p. 322 より引用 (原著: Journal of Industrial Hygiene No. 3, 1921, p. 137)
 8) 正木利正; 隧道内保線作業員の健康状態に関する研究, 鉄道労務科学研究, Vol. 3, No. 2, 昭. 17-11. p. 72
 9) R.R. Sayer & W.R. Yant; U.S. Public Health Service, Carbonmonoxide Literature, 1952 (昭. 27. 9. 19)

整理
 土性及土質工学

UDC 627.821.2.04:624.131.52

堤体2次元圧密の研究

—堤体基礎の閥隙圧分布—

准員 赤井 浩 一*

STUDY ON THE TWO DIMENSIONAL CONSOLIDATION OF EMBANKMENT

(Trans. of JSCE April 1953)

Kōichi Akai, C.E. Assoc. Member

Synopsis In this paper, the distribution of the pore water pressure in the foundation of earth dam is treated as the two dimensional problem. Starting from the fundamental theoretical equation of the two dimensional consolidation, the research is performed for the foundation which has infinite depth or under which a perfectly rigid and smooth rock base exists at any depth. First, applying Neuber's theory of elasticity, the stress distribution just after loading is obtained, and using it as the initial condition, the solution of the consolidation equation is represented in the form of Fourier's integral or Fourier's series with regard to each boundary condition. Next, performing the numerical calculation for the case of uniformly distributed load, the pore water pressure is computed as to the sudden loading and also as to the gradual loading on the semi-infinite foundation within the allowable error. Comparing these calculations with each other, the change of the distribution of the pore water pressure in respect of station and time has become clear at each loading condition.

要旨 アースダムまたは普通の堤状構造物のごとく1方向に相当長く延長した荷重によつて上載された軟弱基礎地盤の安定解析に当つて、2次元圧密の現象が支配的な要因であるということに着目し、堤体基礎に生ずる閥隙圧の分布を明らかにするために、種々の境界条件に対する理論式を展開し、若干の数値計算を実施した結果を述べたものである。とり上げた境界条件は地盤が半無限体であると仮定した場合の地表面瞬時載荷と漸増載荷の両者について、及びある深さの所に岩盤を有する地盤の場合についてである。

1. まえがき

最近、水力発電、洪水調節または灌漑などの目的のために高いアースダムが建設されるようになってきた。しかしこれらのアースダムは普通のコンクリートダムを造ることができないような貧弱な地盤を基礎としているものが多いため、その安定解析に当つて軟弱地盤の圧密沈下に対する考察をゆるがせにはならない。事実過去におけるアースダムの破壊の多くは建設中、あるいは完成直後に生じた基礎地盤内の剪断応力の増加に原因しており、その対策として施工時地盤内の過剰水圧を実測し、これが極端に大きくならないように盛土の施工をコントロールする方法を採っている²⁾。

* 京都大学講師, 工学部土木教室

普通、アースダムの建設に当つては、ダムの土は基礎地盤に対して比較的透水性の大きいものを使い、その締め固めを充分にして最大乾燥密度を得るように努めることになつてゐる。一方、この時、原地盤は上載した土により載荷直後には、空隙水が荷重の全部を受け持ち、その後、時とともに水が逃げ出すにつれて、荷重の一部を順次土粒子実質部分に負担させてゆくのであるから、初期において地盤内に過剰水圧を生ずる。これを空隙圧と称しており、一時的な載荷では、この空隙圧は時間の経過とともに漸次消滅するが、それに要する時間は地盤の透水性とその点の位置によつて異なる。

この論文はアースダム基礎地盤内に発生する空隙圧の分布を2次元問題として明らかにするものである。Biot⁽⁶⁾によつて導入された3次元圧密の一般理論をここでは2次元的な堤体基礎の圧密過程として提出するのであるが、理論式の展開に先き立つて、次の仮定を設けておく。すなわち堤体基礎は均質等方な完全弾性体であり、従つて応力変位関係は直線可逆的であるものとし、かつ土粒子の空隙は完全に水で飽和されていると仮定する。軟弱地盤を構成する粘土層は載荷によつて応力集中の現象が起ることは少ないから、前者の仮定は無理ではなく、またダム基礎、あるいは防潮堤基礎などにあつては後者の仮定も許されてよいであろう。また空隙水の移動速度はきわめて小さいから Darcy の法則に従うものと考えられる。なお上載荷重の分布はダム底面に一樣な等分布荷重として取扱う。

2. 2次元圧密の基本理論式

上記の仮定の下で生ずる2次元的な圧密においては、空隙圧 w に対して次の偏微分方程式が成立する⁽⁵⁾。

$$\dot{w} = c \nabla^2 w \dots\dots\dots (1)$$

$$c = \frac{k}{\gamma w} \quad (\gamma : \text{水の比重})$$

ここに c は圧密係数であつて圧密が進行すれば空隙比は減少し、従つて透水係数 k 、空隙減少率 v はともに小さくなり、取扱う歪変化が微小な範囲では k/v の値を一定と仮定してもあまり誤差の生じないことが予想される⁽⁵⁾ から、式(1)の係数 c は常数であると考える。

式(1)は2次元熱伝導の微分方程式にはかからないが、これを解くためには境界条件のほか初期条件として載荷時の空隙圧分布を知らねばならない。基礎地盤の上に延長の大きい堤体が載せられた場合に地盤内に生ずる応力は、堤軸に垂直な平面内における平面変形の問題として処理することができる。このような2次元問題において Neuber⁽⁷⁾ に従つて u を変位ベクトル、 φ_0 を座標 x, y のスカラー調和函数、 Φ をその座標成分 φ_x, φ_y がいずれも調和函数であるようなベクトルとし、 r を位置ベクトル、 Θ を u の発散、 ν をポアソン比とすると、

$$\left. \begin{aligned} u &= -\text{grad}(\varphi_0 + r\Phi) + 4(1-\nu)\Phi \\ \Theta &= \text{div } u = -\text{div grad}\varphi_0 - \text{div grad } r\Phi + 4(1-\nu)\text{div } \Phi \\ &= 2(1-2\nu)\text{div } \Phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

いま G を剪断弾性係数として式(2)を用いて応力成分を書き表わすと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{2G} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu\Theta}{1-2\nu} = \frac{\partial u}{\partial x} + 2\nu \text{div } \Phi \\ \frac{\sigma_y}{2G} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu\Theta}{1-2\nu} = \frac{\partial v}{\partial y} + 2\nu \text{div } \Phi \\ \frac{\tau_{xy}}{G} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

となるが式(3)を用いて応力を求めるに当つて、まず地盤が半無限平面であると考えた場合と、次に深さ h の所に完全剛性で完全に滑らかな岩盤を有する場合の兩者について考察してみよう。このいずれの場合とも応力分布はポアソン比 ν に無関係であるから、以下では簡単のために地盤を非圧縮性と考えて $\nu=0.5$ とおくと、応力分布はこれには何らの制限を受けるものではない。

3. 半無限地盤の載荷時応力分布

半無限平面よりなる地盤に対しては x 軸を地表面上堤軸に垂直にとり、 y 軸はダム底面中心から鉛直下方を正にとる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= (Ae^{\lambda y} + Be^{-\lambda y}) \cos \lambda x \\ \varphi_y &= (Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}) \cos \lambda x \\ \varphi_x &= 0 \quad (A, B, C, D, \lambda : \text{常数}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

とおけば、式 (3) により応力成分は $\nu=0.5$ に対して、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{2G} &= -\left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\sigma_y}{2G} &= -\left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + y \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\tau_{xy}}{G} &= -2\left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial x \partial y}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

となるが、 $y \rightarrow \infty$ に対して $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \rightarrow 0$ となるべきであるから、

$$A=C=0$$

となり、さらに地表面 $y=0$ で $\tau_{xy}=0$ であるから、

$$B=0 \quad \therefore \varphi_0=0$$

$$\varphi_y = D e^{-\lambda y} \cos \lambda x$$

となつて、式 (5) の応力成分は結局次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{2G} &= -D \lambda e^{-\lambda y} \cos \lambda x (1-y\lambda) \\ \frac{\sigma_y}{2G} &= -D \lambda e^{-\lambda y} \cos \lambda x (1+y\lambda) \\ \frac{\tau_{xy}}{G} &= -2 D \lambda^2 y e^{-\lambda y} \sin \lambda x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

D を決定するには地表面の載荷条件を導入しなければならないが、いま堤体基礎にかかる荷重が垂直方向に $q_0 \cos \lambda x$ であると考え、

$$q_0 = 2 G D \lambda$$

となるから応力成分はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_x &= q_x = q_0 e^{-\lambda y} (1-y\lambda) \cos \lambda x \\ -\sigma_y &= q_y = q_0 e^{-\lambda y} (1+y\lambda) \cos \lambda x \\ -\tau_{xy} &= q_{xy} = q_0 e^{-\lambda y} y \lambda \sin \lambda x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となる。いま y 軸に関して対称な任意の表面荷重 $p_0(x)$ を Fourier の積分で書き表わすと、

$$p_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\xi p_0(\xi) \cos \lambda x \cos \lambda \xi$$

となり、 $y=y$ における圧力分布 $q(x)$ は $p_0(x)$ が $-a < \xi < a$ の間に等分布される場合、すなわち、 $p_0(\xi) = q$ に対して次のようになる。

$$\begin{aligned} q_y(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\xi p_0(\xi) e^{-\lambda y} (1+y\lambda) \cos \lambda x \cos \lambda \xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_0^a q \cos \lambda \xi d\xi \right\} e^{-\lambda y} (1+y\lambda) \cos \lambda x d\lambda \\ &= \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y} (1+y\lambda) \sin a\lambda \cos x\lambda d\lambda \end{aligned}$$

$y\lambda = \alpha, d\lambda = d\alpha/y$ とおけば、

$$\begin{aligned} q_y(x) &= \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{1+\alpha}{\alpha} e^{-\alpha} \sin \alpha \left(\frac{x}{y}\right) \cos \alpha \left(\frac{x}{y}\right) d\alpha \\ &= \frac{q}{\pi} \int_0^\infty \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) e^{-\alpha} \left\{ \sin\left(\frac{x+y}{y}\alpha\right) - \sin\left(\frac{x-y}{y}\alpha\right) \right\} d\alpha \end{aligned}$$

となる。しかるに、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin b\alpha d\alpha &= \frac{b}{a^2 + b^2} \\ \therefore \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \sin b\alpha d\alpha &= \int \frac{b}{a^2 + b^2} da = \cot^{-1} \frac{b}{a} \end{aligned}$$

であるから、この式で

$$x = \alpha, \quad a = 1, \quad b = \frac{x+a}{y} = b_1, \quad b = \frac{x-a}{y} = b_2$$

とおけば,

$$\begin{aligned} q_y(x) &= \frac{q}{\pi} \left(\frac{b_1}{1+b_1^2} - \frac{b_2}{1+b_2^2} + \cot^{-1} b_2 - \cot^{-1} b_1 \right) \\ &= \frac{q}{\pi} \left\{ \frac{b_1(1+b_2^2) - b_2(1+b_1^2)}{(1+b_1^2)(1+b_2^2)} + \cot^{-1} \frac{b_1 b_2 + 1}{b_1 - b_2} \right\} \\ &= \frac{q}{\pi} \left[\frac{2ay(a^2 + y^2 - x^2)}{\{(x+a)^2 + y^2\}\{(x-a)^2 + y^2\}} + \cot^{-1} \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2ay} \right] \end{aligned}$$

となる。いま 図-1 を参照して,

$$2\varepsilon = \beta_2 - \beta_1, \quad 2\psi = \beta_1 + \beta_2$$

を用いると,

$$\cot^{-1} \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2ay} = 2\varepsilon \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\sin 2\varepsilon = \frac{2ay}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \sqrt{(x-a)^2 + y^2}}$$

$$\cos 2\psi = \frac{a^2 + y^2 - x^2}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \sqrt{(x-a)^2 + y^2}}$$

である⁸⁾ から結局,

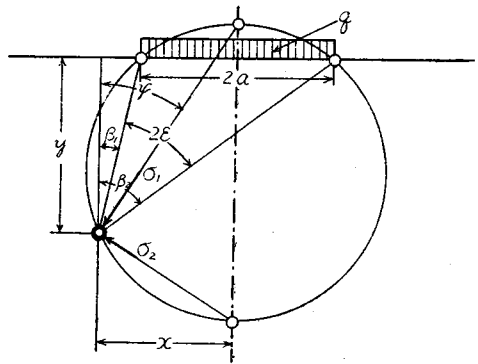
$$q_y(x) = -\frac{q}{\pi} (2\varepsilon + \sin 2\varepsilon \cos 2\psi)$$

同様に,

$$q_x(x) = \frac{q}{\pi} (2\varepsilon - \sin 2\varepsilon \cos 2\psi) \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$q_{xy}(x) = -\frac{q}{\pi} \sin 2\varepsilon \sin 2\psi$$

図-1 等分布帯状荷重 q を受ける半無限地盤内の主応力 σ_1, σ_2



となり、この式 (9) は Boussinesq が半無限弾性地盤の表面に集中荷重を作用せしめた場合に地盤内に生ずる圧力分布を計算した結果を、無限の載荷長さ $2a$ の範囲に積分した値と一致していることがわかる。

式 (9) により地表面載荷によつて地盤内に生ずる応力の成分が判明したのであるが、さきに述べたように圧密する粘土層の表面に載荷した瞬間の地盤内の初期応力はすべて間隙水が受け持つことになる。しかるに水は剪断応力には抵抗しないから、この場合の水の負担は剪断応力の生じないような方法、すなわち主応力に対してなされる。そしてこの場合最大、最小の主応力の平均値を受け持つと考えるのが合理的であろう⁹⁾。

式 (9) を主応力を用いて書き表わすと、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{q}{\pi} (2\varepsilon + \sin 2\varepsilon) \\ \sigma_2 &= -\frac{q}{\pi} (2\varepsilon - \sin 2\varepsilon) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9')$$

となるから、点 (x, y) における平均主応力は式 (8) と式 (9') により、

$$w_0 = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{q}{\pi} \cdot 2\varepsilon = \frac{q}{\pi} \cot^{-1} \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2ay} \quad \dots\dots\dots(10)$$

で与えられ、この式 (10) から w_0 の等応力線は y 軸上に中心を有し荷重端を通るような円弧群であることが知られる (図-1 参照)。

4. 半無限地盤内の間隙圧分布

以上で半無限地盤内の間隙圧 w に関する偏微分方程式 (1) を解くに必要な初期条件が求められたから、つぎに地盤が半無限であるという境界条件を合わせて式 (1) の解を求めることにする。まず始めに上載等分布荷重 q が一瞬に載せられる場合を取扱い、つぎに時間とともに漸次増加するような荷重の場合を考えてみよう。

(1) 瞬時載荷の場合

式 (1) は、

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots(11)$$

境界条件は, $(w)_{y=0} = 0 \dots\dots\dots(12)$

初期条件は, $(w)_{t=0} = f(x, y) = \frac{q}{\pi} \cot^{-1} \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2ay} \dots\dots\dots(13)$

である。式 (12), (13) を満足する式 (11) の解を求めるために, 式 (13) の $f(x, y)$ を Fourier の 2 重積分をもつてつぎのように表わす。

$$f(x, y) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_{-\infty}^\infty d\lambda \int_0^\infty d\mu f(\lambda, \mu) \cos \alpha(x-\lambda) \sin \beta y \sin \beta \mu$$

この時式 (11) の解は,

$$\begin{aligned} w &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_{-\infty}^\infty d\lambda \int_0^\infty d\mu f(\lambda, \mu) \exp\{-c(\alpha^2 + \beta^2)t\} \cos \alpha(x-\lambda) \sin \beta y \sin \beta \mu \\ &= \frac{1}{4\pi ct} \int_{-\infty}^\infty d\lambda \int_0^\infty d\mu f(\lambda, \mu) \left[\exp\left\{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}{4ct}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y+\mu)^2}{4ct}\right\} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi^2 ct} \int_{-\infty}^\infty d\lambda \int_0^\infty d\mu \cot^{-1} \frac{\lambda^2 + \mu^2 - a^2}{2a\mu} \left[\exp\left\{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}{4ct}\right\} \right. \\ &\quad \left. - \exp\left\{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y+\mu)^2}{4ct}\right\} \right] \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

となる。式 (14) の 2 重積分はこのままでは実施することができないので, これを近似的につぎのように表わして数値積分を行うのである。

$$\begin{aligned} w &= \frac{q}{4\pi^2 ct} \lim_{\substack{\Delta\lambda \rightarrow 0 \\ \Delta\mu \rightarrow 0}} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \cot^{-1} \frac{\lambda^2 + \mu^2 - a^2}{2a\mu} \left[\exp\left\{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}{4ct}\right\} \right. \\ &\quad \left. - \exp\left\{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y+\mu)^2}{4ct}\right\} \right] \Delta\lambda \Delta\mu \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

(2) 漸増載荷の場合

上式が適合するような一時的な載荷の際には, 間隙圧は時間とともに減少してゆくであろうことが推測されるのであるが, 現実のアースダムなどの施工では一瞬に全土量が載せられるのではなく, 時間 0 において荷重 0 から徐々に土が盛られてゆく。この場合には間隙圧の分布を与える式 (1) に, 単位時間に増加する間隙圧 $Q(x, y, t)$ を附加させてつぎの基本式を成立せしめる。すなわち,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + Q(x, y, t) \dots\dots\dots(16)$$

境界条件は, $(w)_{y=0} = 0 \dots\dots\dots(17)$

初期条件は, $(w)_{t=0} = 0 \dots\dots\dots(18)$

である。式 (16) の解を求めるには, まず $Q(x, y, t)$ を Fourier の 2 重積分によつて,

$$Q(x, y, t) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_{-\infty}^\infty d\lambda \int_0^\infty d\mu Q(\lambda, \mu, t) \cos \alpha(x-\lambda) \sin \beta y \sin \beta \mu$$

と書く。 w はやはり同様な積分の形,

$$w = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_{-\infty}^\infty d\lambda \int_0^\infty d\mu \chi(\lambda, \mu, t) \cos \alpha(x-\lambda) \sin \beta y \sin \beta \mu$$

で表わされると仮定して式 (16) に代入し, さらに初期条件式 (18) を満足するように $\chi(\lambda, \mu, t)$ を決定すると結局,

$$\begin{aligned} w &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_{-\infty}^\infty d\lambda \int_0^\infty d\mu \exp\{-c(\alpha^2 + \beta^2)(t-\tau)\} \\ &\quad \times Q(\lambda, \mu, \tau) \cos \alpha(x-\lambda) \sin \beta y \sin \beta \mu \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{-\infty}^\infty d\lambda \int_0^\infty d\mu Q(\lambda, \mu, \tau) \left[\exp\left\{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}{4c(t-\tau)}\right\} \right. \\ &\quad \left. - \exp\left\{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y+\mu)^2}{4c(t-\tau)}\right\} \right] \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

となる。

いま $Q(x, y, t)$ が時間 t に無関係で、従つて時間的に一様な増加荷重 \bar{q} によつて生ずる間隙圧の増加を示すものとすれば、式 (10) により、

$$Q(x, y, t) = \frac{\bar{q}}{\pi} \cot^{-1} \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2ay}$$

であるから式 (19) は、

$$\begin{aligned} w &= \frac{\bar{q}}{4\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} d\mu \cot^{-1} \frac{\lambda^2 + \mu^2 - a^2}{2a\mu} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \\ &\quad \left[\exp\left\{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}{4c(t-\tau)}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y+\mu)^2}{4c(t-\tau)}\right\} \right] \\ &= \frac{\bar{q}}{4\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} d\mu \cot^{-1} \frac{\lambda^2 + \mu^2 - a^2}{2a\mu} \left[-Ei\left\{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}{4ct}\right\} + Ei\left\{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y+\mu)^2}{4ct}\right\} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

また近似的に、

$$\begin{aligned} w &= \frac{\bar{q}}{4\pi^2 c} \lim_{\substack{\Delta\lambda \rightarrow 0 \\ \Delta\mu \rightarrow 0}} \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \cot^{-1} \frac{\lambda^2 + \mu^2 - a^2}{2a\mu} \left[-Ei\left\{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2}{4ct}\right\} \right. \\ &\quad \left. + Ei\left\{-\frac{(x-\lambda)^2 + (y+\mu)^2}{4ct}\right\} \right] \Delta\lambda \Delta\mu \end{aligned} \quad (21)$$

と書くことができる。この式 (20) または (21) の最初の指数積分は $x=\lambda, y=\mu$ なる座標に対して一見有限でないように思われるが、 λ, μ についてそれぞれ積分してしまえば、その点においても有限確定な値を与えることが証明できる。

式 (14), (15) と式 (20), (21) とを比較すると大括弧の中が指数函数と指数積分との相異である。しかし前者では2重積分の前の項の分母に現在時間 t があつて間隙圧は時とともに減少するが、後者ではそれがなないため一様増加の载荷が続く限り、地盤内の間隙圧は増加し続けるものであることを示している。これらの相異を後に数値計算のところで明らかにする。

5. 岩盤を有する地盤内の間隙圧分布

いま深さ h の所に完全剛性かつ完全に滑らかな岩盤を有する地盤の場合について考察する。まず偏微分方程式 (1) の初期条件を見出すのであるが、この場合には水平な岩盤の表面を x 軸に、 y 軸を鉛直下方にとり、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= A \cosh \lambda y \cos \lambda x \\ \varphi_y &= B \sinh \lambda y \cos \lambda x \\ \varphi_x &= 0 \quad (A, B, \lambda: \text{常数}) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

とおいて前と同様に境界条件を定めれば、

$$\varphi_y = -A \frac{\sinh \lambda h}{h \cosh \lambda h} \sinh \lambda y \cos \lambda x$$

となり、これに载荷条件として $y = \pm h$ で垂直荷重分布 $q_0 \cos \lambda x$ をいれると、式 (7) に相当するものとして次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_x = q_x &= \frac{2(-\lambda h \cosh \lambda h \cosh \lambda y + \lambda y \sinh \lambda h \sinh \lambda y + \sinh \lambda h \cosh \lambda y)}{\sinh 2\lambda h + 2\lambda h} q_0 \cos \lambda x \\ -\sigma_y = q_y &= \frac{2(\lambda h \cosh \lambda h \cosh \lambda y - \lambda y \sinh \lambda y \sinh \lambda y + \sinh \lambda h \cosh \lambda y)}{\sinh 2\lambda h + 2\lambda h} q_0 \cos \lambda x \\ -\tau_{xy} = q_{xy} &= \frac{2(-\lambda h \cosh \lambda h \sinh \lambda y + \lambda y \sinh \lambda h \cosh \lambda y)}{\sinh 2\lambda h + 2\lambda h} q_0 \cos \lambda x \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

前と同様に等分布荷重 $p_0(\xi) = q$ を与えて Fourier の積分を用いると、たとえば $q_y(x)$ に対しては次のような結果になる。すなわち $y=y$ において、

$$\left. \begin{aligned} q_y(x) &= \frac{q}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} g(\alpha) \sin b_1 \alpha \, d\alpha - \int_0^{\infty} g(\alpha) \sin b_2 \alpha \, d\alpha \right\} \\ \text{ここに、} \quad g(\alpha) &= \frac{2(\beta \alpha \cosh \beta \alpha \cosh \alpha - \alpha \sinh \beta \alpha \sinh \alpha + \sinh \beta \alpha \cos h \alpha)}{\alpha(\sinh 2\beta \alpha + 2\beta \alpha)} \\ \alpha &= y\lambda, \quad \beta = \frac{h}{y}, \quad b_1 = \frac{x+a}{y}, \quad b_2 = \frac{x-a}{y} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

しかるに、

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \sin bx \, dx = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

であるから、いま $x = \alpha$, $a = k$ とおいて函数 $g(\alpha)$ を、

$$g(\alpha) = \sum_n f(\alpha^n e^{-k\alpha}) \dots\dots\dots (25)$$

なる級数の和で展開できれば、式 (24) の積分を近似的に行うことが可能である¹⁰⁾。同様なことが $q_x(x)$, $q_{xy}(x)$ についてもあてはまるから、たとえ近似的にはあるが半無限地盤の場合と同じく載荷時の間隙圧 w_0 を算定することができる。

さて式 (1) は、

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (26)$$

境界条件は岩盤の所で面に垂直方向の水流がないから、

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \dots\dots\dots (27) \quad (w)_{y=h} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

初期条件は、 $(w)_{t=0} = f(x, y)$ $\dots\dots\dots (29)$

となる。 $w(x, y, t) = T(t)X(x)Y(y)$ とおいて式 (26) を解くと、

$$\begin{aligned} w &= \frac{2}{\pi h} \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 ct}{4h^2} \right\} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2h} y \\ &\quad \times \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^h d\mu f(\lambda, \mu) \exp \{ -c\alpha^2 t \} \cos \alpha(x-\lambda) \cos \frac{(2n+1)\pi}{2h} \mu \\ &= \frac{1}{h\sqrt{\pi ct}} \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 ct}{4h^2} \right\} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2h} y \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} d\mu f(\lambda, \mu) \exp \left\{ -\frac{(x-\lambda)^2}{4ct} \right\} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2h} \mu \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

となる。これらの諸式の y は前節までと異なつて岩盤の表面を原点にとつていることに注意せねばならない。

6. 数値計算例

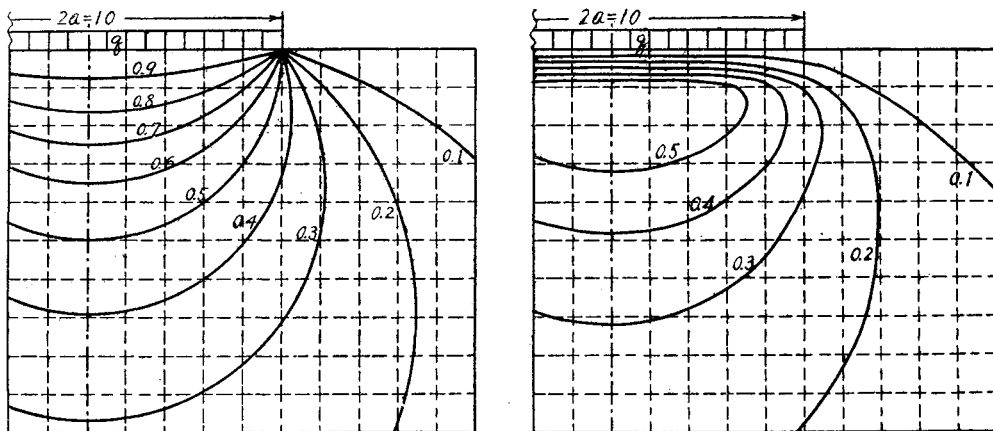
4. で述べた半無限地盤内の間隙圧分布を考察するために、荷重強度 q なる等分布荷重が巾 $2a=10$ なる範囲に載せられた場合について数値計算を行つた。

図-2(a)は瞬時載荷の際の初期間隙圧分布を与えるものであつて、式(10)の w_0 の q に対する比を示している。この w_0/q の等高線は前述のごとく対称軸上に中心を有し、荷重端を通るような円弧群になつている。図-2(b)は式 (15) において $4ct = 1$ とした時の地盤内間隙圧の場所的分布を見るための近似計算の結果である。計算に

図-2 等分布帯状荷重 q を受ける半無限地盤内の $\frac{w}{q}$ の等高線

(a) 載荷直後

(b) $t = \frac{1}{4c}$ 時間後 (1次近似)



当つては $\Delta\lambda, \Delta\mu=1$ なるごとく地盤を正方形の格子にわけ、その各節点 (x, y) に対する自己及び他の節点 (λ, μ) からの寄与を集計して時刻 $t=1/4c$ なる時の間隙圧 $w(x, y, 1/4c)$ を求めた。式 (15) の中の指数函数をみるとわかるように、節点 (y, μ) に対する寄与は自己からのものが最大であつて寄与を及ぼす他の節点 (λ, μ) が遠くなればなるだけその効果は小さくなつてゆく。ただあとの指数函数の方は $(y-\mu)^2$ でなくて $(y+\mu)^2$ なる因数が入っているため y, μ が非常に小さい地点、すなわち地表面附近の点を考える時には上述のことがあてはまらないように思われるが、この場合は第1と第2の指数函数の差が非常に小さいものとなるから總体的な寄与も小さくなる。故にいずれにしても考えている節点 (x, y) のごく近傍だけで集計すれば、僅かの誤差で間隙圧 w の値を求めることができるから、式 (15) のような数値積分が有効であることがわかる。図-2(b) においては1次近似として各節点について (x, y) 自身及びすぐ隣の4つの節点からの寄与を集計した。

図-2(b) は 図-2(a) より $t=1/4c$ 時間後の間隙圧分布を与えるものである。これを見ると等高線の最高は載荷中心の直下比較的浅い所にあり、間隙圧の勾配がここから地表面に向つているのがわかる。この様子をもつと詳しくみるために 図-3(a) について考察することにする。

図-3 等分布帯状荷重によつて上載された半無限地盤内の間隙圧分布

(a) 瞬時荷重の場合 ($4ct=1$) (b) 漸増荷重の場合 ($4c=1, t=1$)

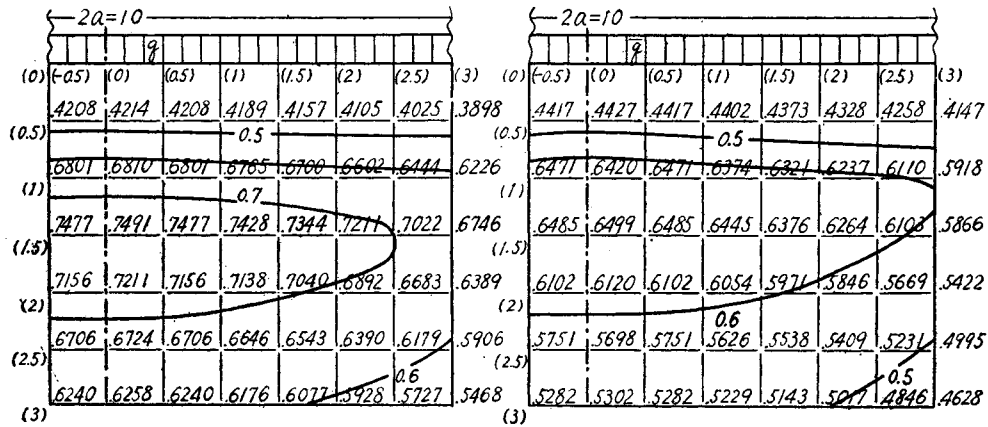


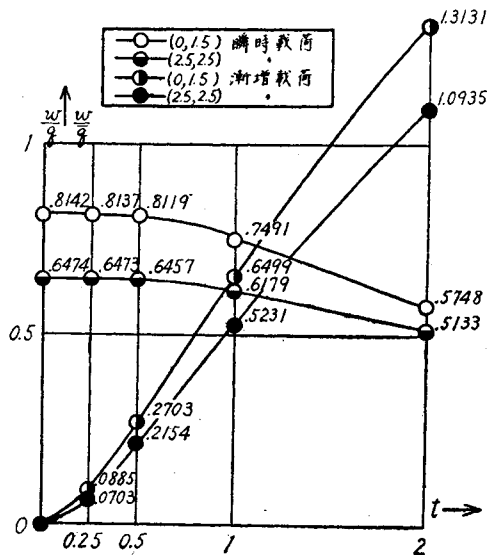
図-3(a) は載荷中心附近 $x=\pm 3, y=3$ なる範囲で式 (15) を用いて一層詳細な計算を行つた結果を示す。この場合は計算の精度を高めるために $\Delta\lambda, \Delta\mu=0.5$ なる格子を組み、各節点について自己を含めてその周囲 41 の節点からの寄与を集計した。式 (15) の中の $\cot^{-1}(\lambda^2+\mu^2-a^2)/2a\mu$ は割合単調な函数であるから、この図のように $\Delta\lambda, \Delta\mu=0.5$ とすれば充分な精度が得られる。各節点の値はいずれも約 8% 前後の誤差である。

図-3(b) は式 (21) に適合する漸増荷重の場合の間隙圧 w と単位時間内の増加荷重 \bar{q} との比を表わしている。この場合の計算は 図-3(a) と同じようにして行つたが、その結果も大体前と似た分布状態が得られた。なお各節点の値についての誤差は 3~4% 程度である。

つぎに間隙圧の時間的な変化の様子を考察するために、図-3(a), (b) の中から $(x=0, y=1.5), (x=2.5, y=2.5)$ なる2つの節点に生ずる間隙圧を時刻 $t=0.25, 0.5, 1, 2$ (ただし簡単のために $4c=1$ とする) に対して求めた結果を 図-4 に示す。この図によつて 4. で述べたように瞬時荷重では間隙圧は時間とともに減少するが、漸増荷重では一様増加の載荷が続く限り間隙圧も増加し続けることが明らかになつた。

なおここにあげた間隙圧の分布を示す図は、たとえば Anderson Ranch Dam の基礎地盤内の間隙圧実測の結果¹¹⁾ とよく似た状態を示していることがわかる。

図-4 間隙圧分布の経時変化



7. あとがき

いままで述べてきたことによつて堤体基礎に生ずる間隙圧の場所的及び時間的分布を理論的に算出することができるようになった。さらにここで触れなかつた基礎の境界条件の存在する場合、たとえば

- (1) 土粒子間隙中に空気が存在する場合
- (2) 圧密係数 c が $fn.(x, y)$ として表わされる場合
- (3) 上載荷重が任意の分布をしている場合
- (4) 粘土の2次圧密を考慮する場合

などについては以上の基本式をもとにして理論式を誘導することができるので今後の研究にまちたいと思う。またアースダム自身の内部に生ずる間隙圧分布を探究し、さらに進んで堤体の圧密沈下量を算定できるものと信じている。

終りに、本研究に関して絶えず熱心な御指導をたまわつた京大教授村山博士に厚くお礼を申し上げるとともに、「堤体の土質工学的研究」として文部省科学研究費の援助を受けたことに対しても感謝の意を表するものである。

参 考 文 献

- 1) J.D. Justin, J. Hinds & W.P. Creager; Engineering for Dams, Vol. III, pp. 660—662, (1947).
- 2) K. Terzaghi & R.B. Peck; Soil Mechanics in Engineering Practice, pp. 394—406, (1948).
- 3) M.A. Biot; General Theory of Three-Dimensional Consolidation, J. Applied Physics, Vol. 12, pp. 155—164, (1941).
- 4) M.A. Biot; Consolidation Settlement under a Rectangular Load Distribution, J. Applied Physics, Vol. 12, pp. 426—430, (1941).
- 5) K. Terzaghi; Theoretical Soil Mechanics, pp. 290—296, (1948).
- 6) 石井晴丸; 大阪の地盤沈下に関する研究 pp. 107—109, (1949).
- 7) V.H. Neuber; Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie, Z. angew. Math. Mech. Vol. 14, pp. 203—212, (1934).
- 8) O.K. Fröhlich; Druckverteilung im Baugrunde, pp. 36—41, 76—81, (1934).
- 9) 三笠正人; On the Settlement of Clay Layer by Partial Load, Proc. 1st Japan National Congress for Applied Mechanics, pp. 303—308, (1951).
- 10) M.A. Biot; Effect of Certain Discontinuities on the Pressure Distribution in a Loaded Soil, Physics, Vol. 6, pp. 367—375, (1935).
- 11) G. P. Tschebotarioff; Soil Mechanics, Foundations, & Earth Structures, pp. 562—565, (1951).

(昭.27.10.16)

UDC 624.131.6:532.546

台地の滲透流について

正 員 工学博士 内 田 茂 男*

ON THE PERCOLATION FLOW THROUGH TABLE-LANDS

(Trans. JSCE April 1952)

Dr. Eng., Shigeo Uchida, C.E. Member

Synopsis In the presented paper viscous percolations through table-lands are investigated. Applying conformal transformations, analytical solutions of typical flows are obtained in the exact forms and are compared with the experiments. A new method of experiments with special considerations to the law of similarity is introduced, giving an excellent result in the comparison with analytical calculation.

要旨 シラスなど滲透性台地の内部における地下滲透流を、理想化した境界条件を用いて多少組織的に調べたものである。ポテンシャル流としての解を、表面張力の省略できるような新しい実験法によつて検証した。従来不明とされていた滲出速度の高い部位が明らかとなつて、それらが定性的には侵蝕のはなはだしい箇所と一致することがわかつた。

1. 緒 言

主として火山噴出物より成る滲透性灰砂層台地は南九州のシラス地帯を始め内外各地に分布しており、いずれも顕著な侵蝕性によつて有名である。その急激な崩壊は地表水の集中落下が主因と考えられるが、地下水の噴出

* 東京大学講師，東京大学工学部土木教室