

APPROXIMATE METHOD OF CONFORMAL REPRESENTATION  
AND IT'S APPLICATION

(Trans. of JSCE April 1953)

Minoru Okabayashi, C.E. Member

**Synopsis** Generally, it is not easy to conformally represent the region of which boundary is any curve in  $xy$ -plane, on the semi-infinite plane of which boundary is  $X$ -axis in  $XY$ -plane. The writer explains the method of approximately conformal representation of the former on the latter.

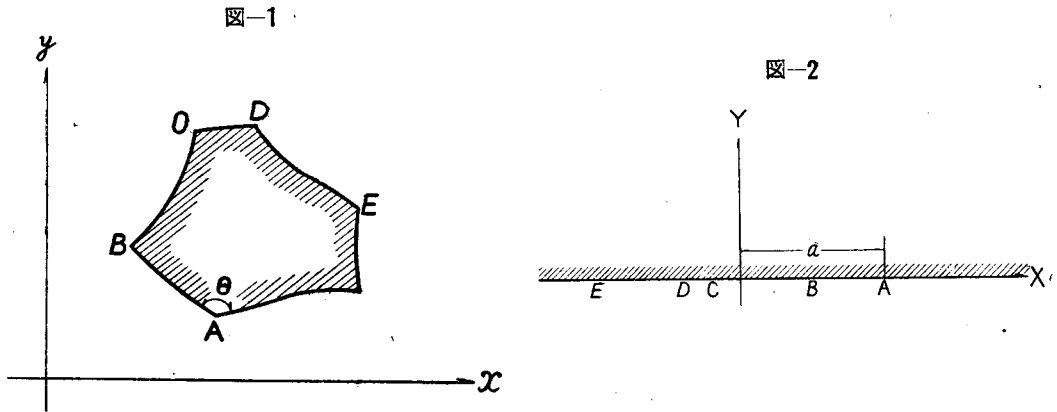
要旨  $xy$  平面における任意の曲線で囲まれた領域を  $XY$  平面における  $X$  軸を境界とする半無限平面に等角写像する函数を求めることは一般には容易でない。よつて、これを近似的に等角写像する函数を求める方法を述べる。

1. 序 説

$xy$  平面における多角形を  $XY$  平面における半無限平面に等角写像するには有名な Schwarz-Christoffel の定理があるが、任意の形状の多角形に対して、その計算を遂行することは容易でない。また流体力学では、任意の翼型を単位円に等角写像する方法があるが、それは与えられた翼型を例えば Joukowski の変換を用いてまず近似的に単位円に写像し、しかる後、これに複雑な函数を作用させて厳密な単位円にもつてくるもので、この場合にも第一段階として近似写像が必要なのである。

2. 近似等角写像法

図-1 に示す閉曲線で囲まれた領域を図-2 に示すごとく  $X$  軸を境界とする上部の半無限平面に等角写像する



函数を求める。図-1 の閉曲線の方程式を

$$y = F(x) \dots\dots\dots(1)$$

とし、図-1 と 図-2 との対応点を図示のごとくする (A, B, C, ……のうち、任意の3点までは図-2 の上で  $X$  軸上の位置を適宜指定することができる)。いま写像函数を

$$x = u(X, Y) \quad \bar{u} = \bar{u}(X, Y)$$

とおけば、 $u$  は調和函数で  $\bar{u}$  はその共軛調和函数であり、かつ両者とも  $Y > 0$  の領域内いたるところで有限でなければならない。いま

$$[u]_{Y \rightarrow 0} = f(X)$$

\* 名古屋工業大学助教授

と仮定すれば、上の条件を満足する調和函数  $u$  は

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{Y}{(t-X)^2 + Y^2} dt \\ \bar{u} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{X-t}{(t-X)^2 + Y^2} dt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

に限る。さらにこれらの境界値は (1) 式を満足しなければならないから

$$\lim_{Y \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{X-t}{(t-X)^2 + Y^2} dt \right] = F\{f(X)\} \dots\dots\dots(3)$$

が成立する。これは未知函数  $f(X)$  を求めるための積分方程式になる。この厳密解が求まれば、それが厳密な写像函数であるが、一般にはそれは容易でない。よつて、これを近似的に解くために、 $X$  軸上、適当な区間ごとに  $f(X)$  を未定常数を含む多項式で近似的に表わす<sup>2)</sup>。それを (3) 式に代入して、その誤差がなるべく小さくなるように未定常数を定めれば、近似写像函数が得られる。その場合、つぎのことを考慮しておかねばならない。すなわち、**図-2** の A 点では

$$\frac{d}{dX} [u]_{Y \rightarrow 0} \quad \text{及び} \quad \frac{d}{dX} [\bar{u}]_{Y \rightarrow 0}$$

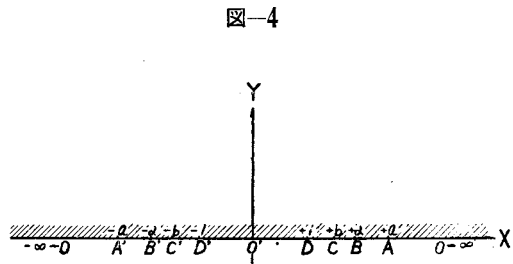
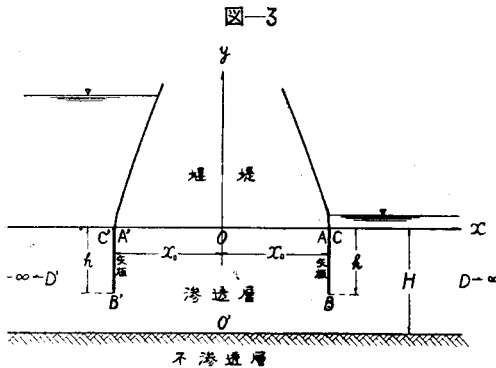
の値が **図-1** における A 点の内角を  $\theta$  とするとき

$$|X-a|^{\frac{\theta}{\pi}-1} \quad (a \text{ は } XY \text{ 平面上の A の } X \text{ 座標})$$

の order を持つことである<sup>3)</sup>。その他、B, C, ……等の点に対しても同様である。

3. 応用例

**図-3** のとき滲透流の問題を考える。この場合、問題は  $OABCD O'D'C'B'A'O$  で囲まれた領域を  $XY$  平面の  $X$  軸を境界とする上部の半平面 (**図-4**) に等角写像する (対応点図示のとおり) ことができれば、解決する<sup>4)</sup>。



いまそれをつぎのようにして近似写像する。まず  $y$  の境界値  $f(X)$  を次のごとく仮定する。

$$\left. \begin{aligned} [y]_{Y \rightarrow 0} = f(X) &= 0 \dots\dots\dots X \geq a \\ &= -\frac{H}{\pi} \cos^{-1} \frac{\{(2\alpha + \beta - 1)X + \alpha\beta - \alpha - 2\beta\}^2 \cos \frac{\pi h}{H} + (\beta + 1)^2 (X - \alpha)^2}{4(\alpha - 1)(\alpha + \beta)(X - 1)(X + \beta)} \dots\dots\dots a \geq X \geq b \\ &= 0 \dots\dots\dots b \geq X > 1 \\ &= -H \dots\dots\dots 1 > X > -1 \\ &= 0 \dots\dots\dots -1 > X \geq -b \\ &= -\frac{H}{\pi} \cos^{-1} \frac{\{(2\alpha' + \beta - 1)X - \alpha\beta + \alpha + 2\beta\}^2 \cos \frac{\pi h}{H} + (\beta + 1)^2 (X + \alpha)^2}{4(\alpha - 1)(\alpha + \beta)(X + 1)(X - \beta)} \dots\dots\dots -b \geq X \geq -a \\ &= 0 \dots\dots\dots -a \geq X \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

ただし  $\cos^{-1}$  は主値をとる。すなわち  $\pi \geq \cos^{-1} \geq 0$

$$a = \frac{\alpha(\beta+1) + (\alpha\beta - \alpha - 2\beta)\sin\frac{\pi h}{2H}}{(\beta+1) - (2\alpha + \beta - 1)\sin\frac{\pi h}{2H}} \quad b = \frac{\alpha(\beta+1) - (\alpha\beta - \alpha - 2\beta)\sin\frac{\pi h}{2H}}{(\beta+1) + (2\alpha + \beta - 1)\sin\frac{\pi h}{2H}}$$

$\alpha$  及び  $\beta$  は未定常數。

上記のごとく仮定すれば,  $X=a$  (あるいは  $=b, -a,$  及び  $-b$ ) において  $df(X)/dX$  は  $X-a^{-1/2}$  の order (あるいは  $|X-b|^{-1/2}$  等) をもっている。これを

$$y = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{Y}{(t-X)^2 + Y^2} dt \quad x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{t-X}{(t-X)^2 + Y^2} dt$$

に代入すれば, 次の関係を得る (途中の計算省略)。

$$Z = x + iy, \quad W = X + iY, \quad Z_1 = z_1 + iy_1, \quad Z_2 = z_2 + iy_2, \quad \text{及び} \quad Z_3 = z_3 + iy_3$$

として

$$\cosh \frac{\pi Z_1}{H} = \frac{(2\alpha + \beta - 1)^2 \cos \frac{\pi h}{H} + (\beta + 1)^2}{4(\alpha - 1)(\alpha + \beta)} + \frac{(\beta + 1) \left(1 + \cos \frac{\pi h}{H}\right)}{4(\alpha - 1)(\alpha + \beta)} \left\{ \frac{(\alpha - 1)^2}{W - 1} - \frac{(\alpha + \beta)^2}{W + \beta} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

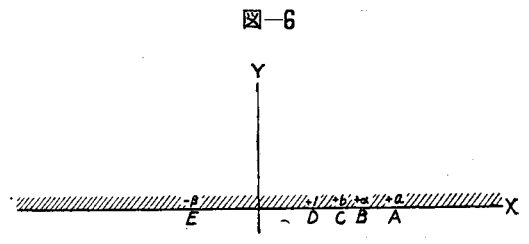
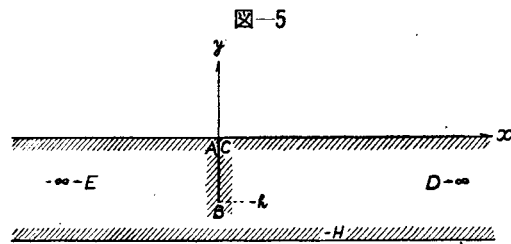
$$\cosh \frac{\pi Z_2}{H} = \frac{(2\alpha + \beta - 1)^2 \cos \frac{\pi h}{H} + (\beta + 1)^2}{4(\alpha - 1)(\alpha + \beta)} + \frac{(\beta + 1) \left(1 + \cos \frac{\pi h}{H}\right)}{4(\alpha - 1)(\alpha + \beta)} \left\{ \frac{(\alpha + \beta)^2}{W - \beta} - \frac{(\alpha - 1)^2}{W + 1} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$Z_3 = \frac{H}{\pi} \log \frac{W - \beta}{W + \beta} \dots\dots\dots (7)$$

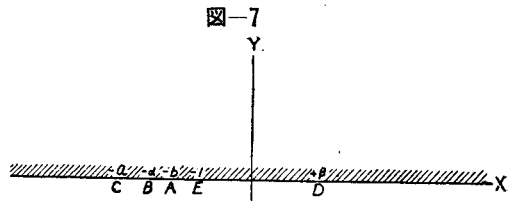
(ただし  $Y \geq 0, 0 \geq y_1 \geq -H, 0 \geq y_2 \geq -H,$  及び  $H \geq y_3 \geq 0$ )

とおけば

$$\left. \begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 \\ x &= x_1 + x_2 + x_3, \quad y = y_1 + y_2 + y_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$



このうちで(5)式のみを表わす変換は実は図-5の領域を図-6に等角写像(対応点図示のとおり)するものであり, (6)式は図-5を図-7に等角写像するものなのである。いま対称性を考慮して, 必要な部分 ( $a \geq X \geq b$ ) の  $x$  の境界値を示すと次のごとくなる。



$$[x]_{Y \rightarrow 0} = \frac{H}{\pi} [\log(P + \sqrt{P^2 - Q^2}) - \log\{4(\alpha - 1)(\alpha + \beta)(X + 1)(X + \beta)\}] \dots\dots a \geq X \geq b$$

$$\text{ただし} \quad P = \{(2\alpha + \beta - 1)X - \alpha\beta + \alpha + 2\beta\}^2 \cos \frac{\pi h}{H} + (\beta + 1)^2 (X + \alpha)^2$$

$$Q = 4(\alpha - 1)(\alpha + \beta)(X + 1)(X - \beta)$$

よつて, これが  $a \geq X \geq b$  内のすべての  $X$  に対して, できるだけ一定値 ( $=x_0$ ) に近づくように  $\alpha$  及び  $\beta$  を定めればいい。いま  $h=1, x_0=2$  として  $H=2, 3, 4,$  及び  $5$  の場合につき,  $\alpha$  及び  $\beta$  を求めてみた<sup>5)</sup>。条件としては, 1個の  $[y]_{Y \rightarrow 0}$  に対する2個の  $[x]_{Y \rightarrow 0}$  のうち,  $X$  の小さい値に対応する方が大きい値をとるという制限内(従つて,  $x=\alpha$  では  $d[x]_{Y \rightarrow 0}/dX$  は0よりわずかに小)で,  $(2 - [x]_{Y \rightarrow 0})^2$  ( $+2 - [x]_{Y \rightarrow 0}$ ) の値がなるべく小さくなるよう

表-1

H	2	3	4	5
$\alpha$	1.044 210	1.203 064	1.427 578	1.682 228
$\beta$	1.090 165	1.131 603	1.134 422	1.126 655

に定めた。その結果は表-1のごとくである。

なお、 $[x]_{r \rightarrow 0}$  の値は (図-4 参照)

- $-\infty < X < -a \dots\dots 0$  より単調に減少
- $-b < X < -1 \dots\dots$  単調に減少して  $-\infty$  に到る
- $-1 < X < +1 \dots\dots -\infty$  より単調に増加して  $+\infty$  に到る
- $+1 < X < +b \dots\dots +\infty$  より単調に減少
- $+a < X < \infty \dots\dots$  単調に減少して  $0$  に到る

のように変化しなければならぬのだが、上に求めた式ではこれが満足されていることが簡単な考察によつてわかる (説明省略)。なお、 $[y]_{r \rightarrow 0}$  の値が  $0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8,$  及び  $1.0$  となる時の  $[x]_{r \rightarrow 0}$  の値を計算すると表-2のごとくなる。

表-2

H=2 の場合											
X	1.07454614(-b)	1.307723144	1.008429770	1.012593210	1.015276377	1.044210	1.133089853	1.194378139	1.243593965	1.275729431	1.286783910(-a)
[X] <sub>r=0</sub>	2.00020373	2.00020375	2.00020376	2.00020378	2.00020382	2.00020386	2.00020396	2.00020417	2.00020450	2.00020494	2.00020540
[y] <sub>r=0</sub>	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0

H=3 の場合											
X	1.063645911(-b)	1.06511544	1.067949485	1.071847725	1.07682443	1.083064	1.431064150	1.564978321	1.66645664	1.730425478	1.762378563(-a)
[X] <sub>r=0</sub>	2.0001015	2.0001019	2.0001031	2.0001054	2.0001092	2.0001119	2.00020448	1.9997237	1.9995216	1.9993454	1.9992697
[y] <sub>r=0</sub>	0	.22	.4	.6	.8	1	.8	.6	.4	.22	0

H=4 の場合											
X	1.171842471(-b)	1.174934819	1.184839385	1.204738540	1.244732996	1.427378	1.792536387	1.995931566	2.146700812	2.241611812	2.274163877(-a)
[X] <sub>r=0</sub>	2.000280	2.000287	2.000291	2.000307	2.000332	2.000347	2.000399	1.999793	1.999570	1.999421	1.999349
[y] <sub>r=0</sub>	0	.22	.4	.6	.8	1	.8	.6	.4	.22	0

H=5 の場合											
X	1.312753767(-b)	1.317422482	1.332564513	1.362445153	1.421878647	1.62228	2.177475155	2.447750299	2.645532359	2.769904783	2.812491214(-a)
[X] <sub>r=0</sub>	2.001016	2.001024	2.001049	2.001093	2.001160	2.001202	2.000396	2.000076	1.999435	1.999301	1.999286
[y] <sub>r=0</sub>	0	.22	.4	.6	.8	1	.8	.6	.4	.22	0

もし精度が悪ければ、(4) 式の表わす境界値に

$$\gamma(a-X)(X-b) \dots\dots a \geq X \geq b$$

$$-\gamma(a+X)(X+b) \dots\dots -b \geq X \geq -a$$

のごとき簡単な項を加えて、未定常数  $\alpha, \beta,$  及び  $\gamma$  を適当に定めれば、もつと精度をあげることができるが、表-2の結果によれば、実用上は、この程度で差支えないように思われる。またこの等角写像を Schwarz-Christoffel の定理で厳密に行えば

$$Z = C \int \frac{W^2 - a^2}{(W^2 - 1)\sqrt{(W^2 - a^2)(W^2 - b^2)}} dW$$

$$= C \int \left\{ \frac{1}{\sqrt{(W^2 - a^2)(W^2 - b^2)}} + \frac{1 - a^2}{(W^2 - 1)\sqrt{(W^2 - a^2)(W^2 - b^2)}} \right\} dW \dots\dots (9)$$

となる。(C は実は  $-H/\pi$  となる。また  $a, b,$  及び  $\alpha$  は表-1 及び 表-2 の値とは厳密には一致しない) これは第1種及び第3種楕円積分の和の形をしているが、(8) 式は (9) 式の楕円積分の近似函数として用いることができるであろう。

$\alpha$  及び  $\beta$  が定まれば 図-4 の領域をさらに 図-8 矩形の内部に写像することにより、滲透流の問題は解決される。

堰堤上流側底面の水圧と下流側底面の水圧との差を  $\Delta p$  とし

$$\Delta \phi = \frac{k}{\mu} \Delta p$$

ただし  $\mu$ : 粘性係数,  $k$ : 透水性

とおけば 図-8 の  $K$  は  $\Delta \phi = 1$  にとつた時の流量を表わす。よつて、 $K$  を計算した結果は表-3のごとくである。

図-8

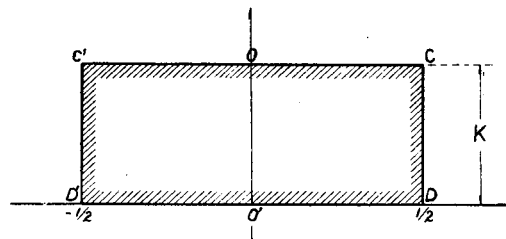


表-3

H	2	3	4	5
K	0.225	0.323	0.401	0.464

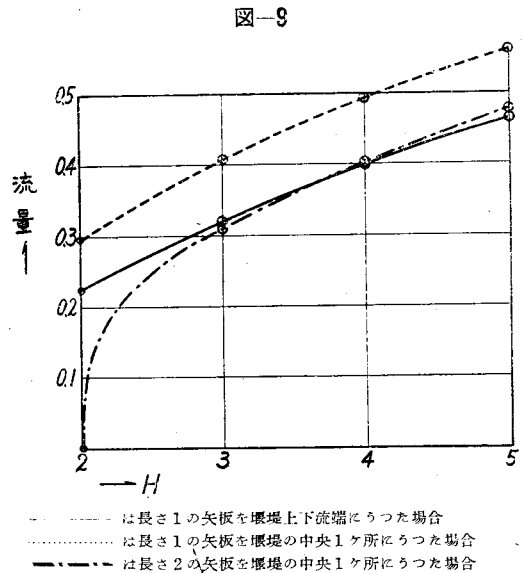
これを堰堤の中央1ヶ所に矢板をうった場合のそれと比較して図示すると 図-9のごとくである。

また矢板の長さを2倍にして堰堤中央1ヶ所にうった場合の流量は  $H=3\sim 5$  の範囲内では表-3の結果にほとんど等しく,  $H$  の増すに従つてこれより大となる傾向にある。

#### 註

- 1) 例えば, 藤本武助: 応用流体力学 p.150 参照。
- 2) 近似多項式定理によれば, この多項式の項数を増してゆけば, いかほどでも  $f(X)$  の真の値に近づけることができるはずである。
- 3) このことは Schwarz-Christoffel の定理からただちに推論される。特別な場合として, 曲線 AB に対して A 点において引いた切線が例えば  $x$  軸に平行であるような場合は少し変つてくる。
- 4) 例えば, Muskat: The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media 参照。
- 5) B (あるいは B') で数学的に厳密な尖点にしようとするれば  $d[x]_{r=0}/dX$  の値も, そこで  $|X-a|$  と同じ order で零になるように ( $[y]_{r=0}$  については, そうなっている) しなければならないが, 実際問題として, それはあまり重要とは思われないので考慮しなかつた。
- 6) この近似写像函数を作つたのと類似の方法を用いれば, 第1種, 第2種, 第3種の各楕円積分の近似函数を求めることが可能であろう。
- 7) 矢板1ヶ所の場合の値は前掲 Muskat の著書より引用した。

(昭.27.9.19)



隧道

UDC 624.191.9:628.538

## トンネル内における機関車煤煙の衛生学的考察

正員 工学博士 村山 朔郎\*

### INVESTIGATION OF THE LOCOMOTIVE SMOKE IN THE TUNNEL FROM SANITARY SCIENCE STANDPOINT

(Trans. of JSCE April 1953)

Dr. Eng., Sakurō Murayama, C.E. Member

**Synopsis** Investigating the effects of the locomotive smoke in the tunnel upon the human body, relations between the density of smoke, time and its symptoms are solved analytically in order to apply them to the ventilation engineering.

**要旨** トンネル内における機関車煤煙の生体に及ぼす影響を衛生学的に考察し, 煤煙濃度, 吸煙時間と人体障害との関係を数式的に導いて, 煤煙に関する衛生問題の工学上への適用をはかつたものである。

#### 1. 煤煙

1) 煤煙中の有害成分 坑内空気の不良化は主に機関車用炭の燃焼による空中酸素の減耗と煤煙中の有害成分による。表-1 は国鉄中特に煤煙のはなはだしい坑内の各成分実績<sup>1,2)</sup>をまとめたものである。一方数時間吸入して酸素欠乏症のあらわれる  $O_2$  量は16~12%といわれる。また  $CO_2$  ガスは外気中にも 0.3% 前後含まれる。

\* 京都大学教授, 工学部土木工学教室