

基礎杭の摩擦支持力について

准員 西田 義 親*

ON THE SUPPORTING POWER OF A FOUNDATION PILE BY FRICTION

(Trans. of JSCE March 1952)

Yoshichika Nishida, C.E. Assoc. Member

Synopsis There are many formulas on calculating the supporting power of foundation piles, but in those formulas the influence by piles to the stress distribution in the earth-body is not taken into consideration. And so the writer has theoretically studied the supporting power of a pile by friction in statics. As the result of study the writer has been able to bring out the base of calculation clearly on a friction-pile.

要旨 基礎杭の支持力式としては静力学的な計算式によるものが、比較的根本的な誤りが少ないとされ種々の公式が提案されているが、何れも杭の存在による地中応力への影響が考慮されていない。著者はこの点にかんがみ、杭支持力のうち周面摩擦によるもののみをとりあげて理論的に検討し、その根拠を明らかにした。

1. 基本式

今、地表面水平の半無限体の地中に杭が鉛直に打ち込まれてあるものとする。地表面杭中心を原点にとり鉛直(杭軸)の地中方向に z 軸をとる円筒座標 r, θ, z , を用いる(図-1 参照)。然るときは、基本の釣合の微分方程式は、杭軸に関して対称の関係より次の2つになる。

$$2(m-1)\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right)\right\} + (m-2)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + (m-2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + 2(m-1)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \rho z = 0 \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 m : 土のポアソン数; u, w : 土の r, z , 方向の変位, ρ : 土の密度。式(1)及び式(2)をそれぞれ z, r , で微分し、その両式より $\partial w/\partial r$ 又は $\partial u/\partial z$ を消去すれば

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 y = 0, \quad y \equiv \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{又は} \quad \frac{\partial w}{\partial r} \dots\dots\dots(3)$$

この解は¹⁾

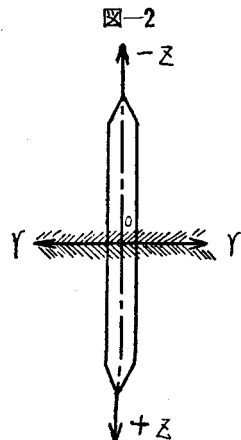
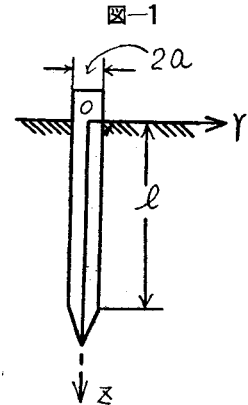
$$y = \sum [A \cos(kz + \alpha) I_1(kr) + B \cos(kz + \beta) K_1(kr) + C r \cos(kz + \gamma) I_0(kr) + D r \cos(kz + \delta) K_0(kr) + F z \cos(kz + \eta) I_1(kr) + G z \cos(kz + \theta) K_1(kr)] \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 $A, B, C, D, F, G, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \theta$, は積分常数, $I_1(kr), I_0(kr), K_1(kr), K_0(kr)$ は k をパラメータとし r を変数とするベッセル函数で I_1, K_0 , 等と記号する。従つて

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum [A \cos(kz + \alpha) I_1 + B \cos(kz + \beta) K_1 + C r \cos(kz + \gamma) I_0 + D r \cos(kz + \delta) K_0 + F z \cos(kz + \eta) I_1 + G z \cos(kz + \theta) K_1] \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \sum [A' \cos(kz + \alpha') I_1 + B' \cos(kz + \beta') K_1 + C' r \cos(kz + \gamma') I_0 + D' r \cos(kz + \delta') K_0 + F' z \cos(kz + \eta') I_1 + G' z \cos(kz + \theta') K_1] \dots\dots\dots(6)$$

今、図-2 の如く r 軸に対称に反対方向に重力の作用する2つの半無限体を重ねると、 w は z の奇函数であり、 u は z の偶函数であることが分るから、この性質より次のようにおかねばならない。



* 金沢大学講師, 工学部土木教室

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \alpha' = \beta' = \gamma' = \delta' = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots(7)$$

$$\theta = \theta' = 0 \dots\dots\dots(8)$$

2. 境界条件

さて地中に杭が打ち込まれた場合、杭から相当に離れた所では、杭による変形の影響は消失する筈である。

従つて $r \rightarrow \infty$ のときは杭のない場合と同じであるから、 u は勿論 $\partial w / \partial r$ も 0 である。所が $r \rightarrow \infty$ のとき $K_1 \rightarrow 0, rK_0 \rightarrow 0$ となるが、 $I_1 \rightarrow \infty, I_0 \rightarrow \infty$ となるから、実際の事情に適合するには次の如くおかねばならない。

$$A = C = F = A' = C' = F' = 0 \dots\dots\dots(9)$$

式(7), (8), (9)を式(5), (6)に代入すると

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \Sigma[-B \text{sinc} k z K_1 - D r \text{sinc} k z K_0 + G z \text{cos} k z K_1] \dots\dots\dots(10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \Sigma[-B' \text{sinc} k z K_1 - D' r \text{sinc} k z K_0 + G' z \text{cos} k z K_1] \dots\dots\dots(11)$$

所が土を一応弾性体と考えて検討しているのであるが、この土に比べて杭は相当の剛度をもつ剛性体とみなすことができる。今、杭を一樣の太さと仮定すれば杭に接した所の $r = a$ (a : 杭の半径)では $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ である。これが z の如何にかかわらず成立するためには式(10)より次のようになる。

$$G = 0 \dots\dots\dots(12)$$

$$D = -\frac{B}{a} \frac{K_{1a}}{K_{0a}} \dots\dots\dots(13)$$

但し、 K_{1a}, K_{0a} はそれぞれ $r = a$ のときの K_1, K_0 である。式(10), (11)をそれぞれ積分すると

$$u = f(r) + \Sigma[BK_1 \frac{1}{k} \text{cos} k z + D r K_0 \frac{1}{k} \text{cos} k z] \dots\dots\dots(14)$$

$$w = g(z) + \Sigma[B'K_0 \frac{1}{k} \text{sin} k z + D' r K_1 \frac{1}{k} \text{sin} k z - G' z \text{cos} k z - \frac{1}{k} K_0] \dots\dots\dots(15)$$

さて杭の存在しない半無限体の地中の鉛直方向の垂直応力 σ_z は深さに比例するものとし、 $\sigma_z = \rho z$ とおくことができる。従つてこのときの鉛直方向の垂直歪 ϵ_z は $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{(m-2)(m+1)}{Em(m-1)} \rho z$ となる。杭が存在するときでも $r \rightarrow \infty$ では全く同じであり、更に $z = 0$ のときは $w = 0$ ($r \rightarrow \infty$ の場合)を考えに入れると、結局式(15)の $g(z)$ は次のようになる。

$$g(z) = \frac{(m-2)(m+1)}{Em(m-1)} \frac{1}{2} \rho z^2 \dots\dots\dots(16)$$

次に剪断応力と z 方向の垂直応力について考える。

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{mE}{m+1} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \dots\dots\dots(17)$$

$$\sigma_z = \frac{mE}{(m+1)(m-2)} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{m(m-1)E}{(m+1)(m-2)} \frac{\partial w}{\partial z} \dots\dots\dots(18)$$

但し上の各式のうちの E は土のヤング係数である。

地表に於ては剪断応力も z 方向の垂直応力も共に作用しない。式(14), (15), (16)を式(17)に入れてみると $z = 0$ で $\tau = 0$ であることは明らかである。従つて次に、 $z = 0$ で $\sigma_z = 0$ であるために、式(14), (15), (16)を式(18)に代入して、次の関係を充さねばならない。

$$(m-1)\Sigma\left[B'K_0 + D'rK_1 - G'K_0 \frac{1}{k}\right] + \frac{f(r)}{r} + \Sigma\left[B \frac{K_1}{r} \frac{1}{k} + DK_0 \frac{1}{k}\right] + \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \Sigma\left[-B \left(\frac{K_1}{r} \frac{1}{k} + K_0\right) + DK_0 \frac{1}{k} - D'rK_1\right] = 0 \dots\dots\dots(19)$$

この式を積分して $f(r)$ を求めると

$$f(r) = \Sigma\left[K_1 \left\{-\frac{B}{k} - 4\frac{D}{k^2} + (m-1)\frac{B'}{k} - (m-1)\frac{G'}{k^2} + (m-1)D' \frac{2}{k^2}\right\} + rK_0 \left\{\frac{D}{k} + (m-1)D' \frac{1}{k}\right\}\right] + \frac{C_*}{r} \dots\dots\dots(20)$$

所が杭を地中に打ち込むと、土は側方に圧して排除せられ、すぐに降伏状態に達して塑性状態になる。従つて $r = a$ で $u = 0$ である。この関係を式(20)に代入すると積分常数 C_* が定まる。式(13), (14), (20)より

$$O_* = \Sigma \left[aK_{1a} \left\{ \frac{B}{k} + 4 \frac{D}{k^2} - (m-1) \frac{B'}{k} + (m-1) \frac{G'}{k^2} - (m-1) D' \frac{2}{k^2} \right\} - a^2 K_{0a} \left\{ \frac{D}{k} + (m-1) \frac{D'}{k} \right\} \right] \dots\dots\dots(21)$$

式 (21) を式 (20) に代入すれば式 (14) の $f(r)$ が定まる。

以上の結果より未知の係数は B, B', D', G' の 4 個のみとなる。

次に杭周面に作用する剪断応力と半径 r 方向の垂直応力 σ_r との比は、杭と土との最大摩擦係数 μ を超えないのである。即ち

$$r=a \text{ で } \tau \leq \mu \sigma_r \dots\dots\dots(22)$$

$\tau = \mu \sigma_r$ なる等式が杭周辺の何れの点に生じるかは明らかでない。然しながら杭にかかる荷重が増大すると、最初に杭周面の或る 1 点にて、 $\tau = \mu \sigma_r$ なる関係が成立するであろう。更に載荷重が増加すると、杭周面に於て $\tau = \mu \sigma_r$ なる関係の成立する範囲が増してくる。而して杭が將に滑動せんとする瞬間には杭周面全体にわたつて上述の等号が成立する筈である。但し上にのべた考察は杭と土との粘着力を無視するものとしている。以上の考えより

$$\sigma_r = \frac{m(m-1)E}{(m+1)(m-2)} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{mE}{(m+1)(m-2)} \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dots\dots\dots(23)$$

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{mE}{m+1} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \dots\dots\dots(24)$$

$r=a$ で $u=0, \frac{\partial u}{\partial z}=0$ を考えに入れ、式 (14), (15), (16) を代入して $\tau = \mu \sigma_r$ とおくと

$$\begin{aligned} & \Sigma \frac{1}{2} [-B'K_{1a} \sin kz - D'aK_{0a} \sin kz + G'K_{1a} z \cos kz] \\ & = \Sigma \mu \frac{m-1}{m-2} \left[\frac{\partial f(a)}{\partial r} - B \left(\frac{K_{1a}}{ak} + K_{0a} \right) \cos kz + D \left(\frac{K_{0a}}{k} - aK_{1a} \right) \cos kz \right] \\ & + \mu \frac{(m+1)}{Em(m-1)} \rho z + \Sigma \frac{\mu}{m-2} \left[\left(B'K_{0a} + D'aK_{1a} - G' \frac{K_{0a}}{k} \right) \cos kz + G' z \sin kz K_{0a} \right] \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

今上式の右辺第 2 項をフーリエの級数に展開すると、杭長を l として、

$$\mu \rho \frac{m+1}{Em(m-1)} z = \mu \rho \frac{(m+1)}{Em(m-1)} \frac{8l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{2n+1}{l} \frac{\pi}{2} z \dots\dots\dots(26)$$

$(n=0, 1, 2, 3, \dots\dots\dots) \quad (0 \leq z \leq l)$

式 (26) を式 (25) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} & \sum_0^{\infty} \left[\frac{1}{2} (B'K_{1a} + D'aK_{0a}) \sin kz - \frac{1}{2} G'K_{1a} z \cos kz + \mu \frac{m-1}{m-2} \frac{\partial f(a)}{\partial r} - \left\{ B \left(\frac{K_{1a}}{ak} + K_{0a} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - D \left(\frac{K_{0a}}{k} - aK_{1a} \right) \right\} \mu \frac{m-1}{m-2} \cos kz + \mu \rho \frac{(m+1)}{Em(m-1)} \frac{8l}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{2n+1}{l} \frac{\pi}{2} z \right. \\ & \left. + \left(B'K_{0a} + D'aK_{1a} - G' \frac{K_{0a}}{k} \right) \frac{\mu}{m-2} \cos kz + G'K_{0a} \frac{\mu}{m-2} z \sin kz \right] = 0 \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

式 (27) が z の如何にかかわらず常に成立するためには、次の如くおかねばならない。

$$k = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} \dots\dots\dots(28)$$

$$G' = 0 \dots\dots\dots(29)$$

$$\frac{1}{2} (B'K_{1a} + D'aK_{0a}) + \mu \rho \frac{m+1}{Em(m-1)} \frac{8l}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 0 \dots\dots\dots(30)$$

$$\left. \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \dots\dots\dots(31)$$

$$(m-1) \left\{ D \left(\frac{K_{0a}}{k} - aK_{1a} \right) - B \left(\frac{K_{1a}}{ak} + K_{0a} \right) \right\} + \left(B'K_{0a} + D'aK_{1a} - G' \frac{K_{0a}}{k} \right) = 0 \dots\dots\dots(32)$$

以上の結果を総合すると、最初にあたえられた未知の常数は、 B, B', D, D', G, G', k の 7 個であり、これに対して式 (12), (13), (28), (29), (30), (31), (32) の 7 個の条件式が成立する。従つてこれらの式を連立に解くことにより、上述の 7 個の常数を一義的に決定することができる。従つてまた、これらの常数を式 (14), (15) に代入し、更に式 (17), (18), (23) 等を用いて、地中に生じる応力状態を知ることができる。

3. 杭の摩擦支持力

杭の摩擦支持力は、杭周面の剪断応力によるのであるから $r=a$ における τ を求めると式 (24) より

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2} \frac{mE}{m+1} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{1}{2} \frac{mE}{m+1} \sum [-B'K_{1a} - D'aK_{0a}] \sin kx \\ &= \frac{\mu\rho}{m-1} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{8l}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} z = \mu\rho \frac{1}{m-1} z \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

従つて杭の摩擦全支持力は

$$T = 2\pi a \int_0^l \tau_{r=a} dz = \mu\rho \frac{1}{m-1} \frac{1}{2} l^2 \cdot 2\pi a \dots\dots\dots(34)$$

即ち杭周辺の摩擦力分布は深さに比例して直線的に変化し、従つてまた摩擦支持力は杭の長さの平方に比例して増加する。このことは Dörr のあたえた杭の支持力公式のうちの摩擦支持力計算の根拠を妥当とするものである。Dörr によれば摩擦支持力は

$$T_1 = \mu\rho 2\pi a \epsilon_1 \frac{l^2}{2} \dots\dots\dots(35)$$

但し土の内部摩擦角を φ とすれば、 ϵ_1 は $\tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ と $\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ の中間の値であり、一般には $\epsilon_1 = 1 + \tan^2\varphi = 1/\cos^2\varphi$ とし弛く成層した地盤では $\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ 又は $\cos^2\varphi$ をとるとしている。著者の導いた式 (33) 又は式 (34) のなかの $1/(m-1)$ はこの Dörr 式の ϵ_1 に相当するわけである。 m と φ との間には次の関係式があるとされている。即ち乾燥砂のようなものについては²⁾、

$$m = 2/1 - \sin\varphi \dots\dots\dots(36)$$

$$\therefore \frac{1}{m-1} = \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \dots\dots\dots(37)$$

即ち弛く成層した乾燥砂質の地盤では式 (34) と式 (35) は一致する。然しながら式 (34) の m は実際の土について実測された値を用いて計算した方が正しいと思われる。このことは式の誘導には φ を考えていないことから当然と考えられる。

m の実測値の一例として次のようなものがある(表-1 参照³⁾)。

$1/m = 0.47$ とすれば $1/(m-1) = 0.885$ となる。式 (36) よりこの m に相当する φ は約 $0^\circ 21'$ となる。従つて内部摩擦角より m を求めるのは適当でないと思われる。星筈博士があたえた杭支持力公式⁴⁾ のうち摩擦支持力の項は式 (34) と同じ形式であり、ただ $m=2$ とおけばよい。しかしこれは理論上うなずき難いが実測のポアソン比が $0.47 \sim 0.48$ をとる場合は星筈公式による値とかなり一致するものと思われる。

土の内部の粘着力の影響は m に含ませて考えればよい。以上は全て杭と土との附着力を無視して来たが、もしこの附着力を考えるとこれを ν とすれば、

$$r=a \text{ で } \tau = \mu\sigma_r + \nu \dots\dots\dots(38)$$

従つて式 (31) の代りに

$$\nu + \sum_0^{\infty} \mu \frac{m-1}{m-2} \left| \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \dots\dots\dots(39)$$

なる式を用いればよいことになる。

4. 場所詰杭 (Pile in situ) の摩擦支持力の一計算法

この場合は勿論 $u=0$ である。又、砂質の地盤に杭を打ちこんだ場合、最大主応力が nr の面内に生じるものと考えられるから、砂質の性質上、塑性条件の関係から $u=0$ でなければならない。従つて式 (13), (14) から

$$f(r) = B = D = 0 \dots\dots\dots(40)$$

$z=0$ で $r=0$ は明らかである。更に $z=0$ で $\sigma_z=0$ であるためには式 (14), (15), (18), (40) より

$$D' = 0, \quad B' = \frac{1}{k} G' \dots\dots\dots(41)$$

以上の結果を整理し式 (23), (24) により剪断応力及び半径方向の垂直応力を示すと

表-1 土のポアソン比と密度

種類	密度(ρ)	ポアソン比 $1/m$
埋土, 表土	1.5	0.35~0.37
粘土	2.0	0.47~0.48
粘土混り砂礫	2.0	0.26
砂	1.38	0.41
ローム	1.30	0.33

備考 砂の含水率は 6.11%, 空隙率は 36.8%, ロームの含水率は 50.3%

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{mE}{m+1} \sum_0^{\infty} G' K_1 \left(z \cos kz - \frac{1}{k} \sin kz \right) \dots\dots\dots(42)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{m-1} \rho z + \frac{mE}{(m+1)(m-2)} \sum_0^{\infty} G' z \sin kz \cdot K_0 \dots\dots\dots(43)$$

$$= \sum_0^{\infty} \left[\frac{8l\rho}{(m-1)\pi^2} \sin \frac{(-1)^n}{2} \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l} z + \frac{mE}{(m+1)(m-2)} G' K_0 z \sin kz \right] \dots\dots\dots(44)$$

(n=0, 1, 2, …… 0 ≤ z ≤ l)

r=a で τ ≤ μσ_r である。而して杭周面の或る 1 点に於て τ = μσ_r となつた場合をこの杭の摩擦支持力をあたえるものと仮定する。この等号が杭の何れの点に生じるかは明らかでないが、杭が沈下をしようとする時は、その尖端で土を側方に排除するわけであるから、杭軸に平行な周面の最深部 z=l で上述の関係があるものと仮定をする。そのときは式 (42), (44) より k = $\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l}$ として G' をきめると

$$G' = - \frac{m+1}{Em(m-1)} \mu \frac{8}{\pi^2} \frac{\rho}{(m-1)(2n+1)^2} \left\{ \frac{K_{1a}}{K_{0a}} \frac{1}{(2n+1)\pi} + \frac{\mu}{m-2} \right\} \dots\dots\dots(45)$$

式 (45) を式 (42), (43) に代入することにより杭周面に作用する摩擦支持力及び側圧を求めることができる。

一例として、m=4、(φ=30°)、μ=0.5 として計算した結果を図-3, 4, 5 に示す。

図-3 は杭径 20 cm、杭長 10 m としたときの杭周面の応力分布を示す。杭径や杭長を変化させてもこれと同じような形の分布をなす。図の σ_r の分布は『一般に含水量の少ない地盤では一定の深さまで土圧は直線的に増加し、それ以上の深さでは一定の値をとるとするのが適当である』⁹⁾ という傾向に一致し、これを説明するものと言える。

図-4 は、杭長を 10m としして杭径を変化させたときの全摩擦支持力 $2\pi a \int_0^l \tau_{r=a} dz$ を示す。杭径を太くすると支持力は杭径に比例する以上に増加するから、杭周の合計が同じなら細い杭を多く使用するより、太い杭を少なく用いる方が有利と思われる。但し實際上、他のいろいろの関係から制限をうけるから、図について言えば、杭長 10m なら直径 30~40 cm が最も適当と思われる。

図-5 は杭径 20 cm のとき、杭長を変化させたときの全摩擦支持力を示す。深さとともに曲線的に増大するが、必ずしも深さの平方に比例しては増加しない。

5. 結 言

以上の如くして従来、比較的不明の問題の多い基礎杭の支持力について、弾性学的に検討しその理論的根拠を一部明らかにすることができた。基礎杭としては更に、杭尖端支持力や群杭支持力等の問題があるが、著者は目下これらについて研究中である。終りに著者は御助言を頂いた京都大学の村山及び郡両先生に厚く謝意を表するものである。

註 1) 例えば木村二郎: 土木学会誌 第 17 卷 第 8 号 昭.6-8, p.717
 2) 水野高明: 九大工学彙報 第 17 卷 第 1 号, p.31
 3) 那須信治, 萩原尊礼, 表俊一郎: 地震研究所彙報 第 14 号 昭.11
 4) 星 隼 和: 建設工学 第 2 卷 第 9~11 号 p.5
 5) 例えば, 原口忠次郎, 米田正文: 新稿土と杭の工学 昭.26 p.169

図-3 Stress Distributions on the Surface around a Friction-Pile

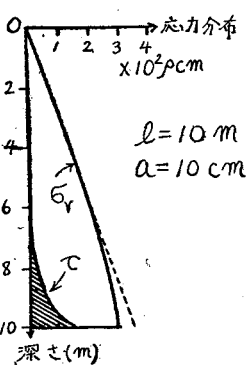


図-4 l=10m Relations between Supporting Power of a Friction-Pile and Radius of the Pile (Pile-Length is 10m)

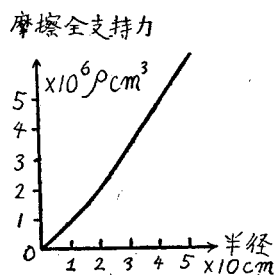


図-5 a=10cm Relations between Supporting Power of a Pile by Friction and Length of the Pile (Pile-Radius is 10cm)

