

# 一般剛節構造物の解法及びその極限状態附近における性状について<sup>(1)</sup>

正員 工学博士 小 西 一 郎<sup>(2)</sup>

## ON THE SOLUTION OF RIGID FRAMED STRUCTURES AND THEIR ELASTIC BEHAVIOUR IN THE NEIGHBOURHOOD OF CRITICAL STATE

*Dr. Eng. Ichiro Konishi, U.E. Member.*

**Synopsis** In this paper, the universal fundamental equations necessary to calculate the deformations and member stresses of any plane rigid framed structures, which are applicable to the neighbourhood of critical state, are derived, and the methods of solution of these fundamental equations are explained. At the same time, a consideration is made on the buckling and elastic failure of the rigid framed structures.

The procedures and the elastic behaviours are explained by examples of the calculations for specific trusses and vierendeel trusses.

**要旨** 本文は断面一定の直線部材よりなる一般平面剛節構造物について、極限状態附近を包含した範囲において、変形、部材力を算定するに必要な一般基礎方程式を誘導し、その解法を示すと共に、剛節構造物の挫屈、弾性破損について一考察を行ったものである。

### 目 次

- |             |                   |
|-------------|-------------------|
| 1. 緒言       | 4. 挫屈、弾性破損に関する一考察 |
| 2. 基礎方程式の誘導 | 5. 数値計算例          |
| 3. 基礎方程式の解法 | 6. 結言             |

### 1. 緒 言

剛節構造物の実用解法については、今迄、既に多くの研究結果が発表せられている。これ等はいずれも、設計のために必要な計算法を取扱つたものであるから、構造物が過荷重を受けて極限状態に近接した場合については、何等言及されていない。然しながら、構造物の極限状態附近における変形、応力について明確な認識を持つことは、構造物の本質を把握し、設計を合理化し、又、終極強度を確認する上に、是非共必要である。

斯様な極限状態附近にある構造物の解法は、場合により有限変位理論、塑性理論等に立脚すべきものであるが、我々の取扱う構造物については、要求せられる剛性、材料の強度等を考えると、変位の有限値を用いないでも、極限状態附近迄の性状を解明することの出来る場合が、相当多いように考えられる。

さて、剛節構造物については、夫々の部材が何れも、端モーメント及びこれに附随する剪断力、軸力及び中間荷重を受けるものとして、忠実に解釈する必要がある。処で、部材の力学が示す通り、軸力と端モーメントを同時に受ける部材については、撓み変形と軸力とは1次関係にない。即ち、非線型関係を示すものであるから、極限状態附近を考察する場合には、是非共この関係を考える必要がある。この点に関しては、Manderla が、剛節トラスの2次応力を計算する際に若干の考慮を払つている<sup>(3)</sup>。

本文は、断面一定の直線部材よりなる一般平面剛節構造物について、極限状態附近を包含した範囲において、その性状を明確にするため、変形、部材力の算定、部材の端部固定度及び挫屈の諸問題を取扱つたものである。方法としては、各節点の変位  $u$ ,  $v$  及び節点回転角  $\theta$ 、計1節点について3個の未知量を計算するに必要な基礎方程式を誘導した。

次に、この基礎方程式の解法を示すと共に、外力を次第に増大して、極限状態に近接した場合の性状を明らか

- (1) 昭和23年6月26日 日本応用力学会第3回講演会において発表、講演題目：剛節結構の解法について  
昭和23年12月14日 土木学会第7回月例研究発表会において発表、講演題目：剛節構造物の解法について
- (2) 京都大学教授 工学部土木工学教室
- (3) Johnson, Bryan and Turneaure: The Theory and Practice of Modern Framed Structures (1917), Part II, pp. 507-514

にするため、各荷重状態に応ずる変形及び断面力を近似的に上式によつて求め、これによつて、挫屈又は弾性破損の限界を明らかにした。

以上の理論を簡単なワーレン橋トラス、フィレンディール・トラスに応用して、本法の一適用法を示すと共に、変形、応力を計算し、又部材の端部固定度、挫屈荷重について考察を加えたものである。

2. 基礎方程式の誘導

図-1において、任意の圧縮材 AB の圧縮力を  $S$ 、端モーメントを  $M_{ab}$ 、 $M_{ba}$  とすれば、撓み曲線は、

$$y = \frac{M_{ab}}{S} \left[ \frac{\sin k(l-x)}{\sin kl} - \frac{l-x}{l} \right] - \frac{M_{ba}}{S} \left[ \frac{\sin kx}{\sin kl} - \frac{x}{l} \right] \quad (1)$$

但し、 $k = \sqrt{S/EI}$ 、 $I$  = 圧縮材 AB の断面 2 次モーメント  
 従つて A 及び B 端の撓み角は式 (1) より

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ab} &= \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ab} - \varphi M_{ba}), \\ \tau_{ba} &= \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ba} - \varphi M_{ab}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

茲に  $K = I/l$  = 剛度、

$$\varphi = \frac{6}{kl} \left( \frac{1}{\sin kl} - \frac{1}{kl} \right), \quad \psi = \frac{3}{kl} \left( \frac{1}{kl} - \frac{1}{\tan kl} \right) \dots\dots\dots (3)$$

同様に、任意の引張材 AB については、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ab} &= \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ab} - \phi M_{ba}), \\ \tau_{ba} &= \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ba} - \phi M_{ab}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{茲に } \phi = \frac{6}{kl} \left( \frac{1}{kl} - \frac{1}{\sinh kl} \right), \quad \psi = \frac{3}{kl} \left( \frac{1}{\tanh kl} - \frac{1}{kl} \right) \dots\dots\dots (5)$$

今図-2 に示す如く、任意の圧縮材 AB の変形前の位置を AB、変形後の位置を A'B' とすれば、A'B' については式 (2) をそのまま用いることが出来る。

又幾何学的関係より、

$$\tau_{ab} + R = \theta_{ab}, \quad \tau_{ba} + R = \theta_{ba} \dots\dots\dots (6)$$

式 (6) に式 (2) を用いると、圧縮材 AB について

$$\theta_{ab} = \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ab} - \varphi M_{ba} + 6EKR), \quad \theta_{ba} = \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ba} - \varphi M_{ab} + 6EKR) \dots\dots\dots (7)$$

同様に引張材については、

$$\theta_{ab} = \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ab} - \phi M_{ba} + 6EKR), \quad \theta_{ba} = \frac{1}{6EK} (2\psi M_{ba} - \phi M_{ab} + 6EKR) \dots\dots\dots (8)$$

式 (7)、(8) を夫々端モーメント  $M$  について解けば

圧縮材について、

$$M_{ab} = 2EK(2a\theta_{ab} + b\theta_{ba} - 3cR), \quad M_{ba} = 2EK(2a\theta_{ba} + b\theta_{ab} - 3cR) \dots\dots\dots (9)$$

$$\text{或は } M_{ab} = 2EK(2a\tau_{ab} + b\tau_{ba}), \quad M_{ba} = 2EK(2a\tau_{ba} + b\tau_{ab}) \dots\dots\dots (9')$$

$$\text{茲に } a = \frac{3\psi}{4\psi^2 - \varphi^2}, \quad b = \frac{3\varphi}{4\psi^2 - \varphi^2}, \quad c = \frac{1}{2\psi - \varphi} \dots\dots\dots (10)$$

引張材については、

$$M_{ab} = 2EK(2A\theta_{ab} + B\theta_{ba} - 3CR), \quad M_{ba} = 2EK(2A\theta_{ba} + B\theta_{ab} - 3CR) \dots\dots\dots (11)$$

$$\text{或は } M_{ab} = 2EK(2A\tau_{ab} + B\tau_{ba}), \quad M_{ba} = 2EK(2A\tau_{ba} + B\tau_{ab}) \dots\dots\dots (11')$$

$$\text{茲に } A = \frac{3\psi}{4\psi^2 - \phi^2}, \quad B = \frac{3\phi}{4\psi^2 - \phi^2}, \quad C = \frac{1}{2\psi - \phi} \dots\dots\dots (12)$$

$a, b, c, A, B$  及び  $C$  は式 (10)、(12) に示す如く、何れも  $kl$  の函数である。 $kl$  によるこれ等の各量の変化の状況は図-3 に示す如くである。

次に剪断力  $Q$  は図-2 において、モーメントの釣合条件より、 $Q_a = \frac{1}{l}(M_{ab} + M_{ba})$

故に圧縮材については式 (9) を上式に用いて、

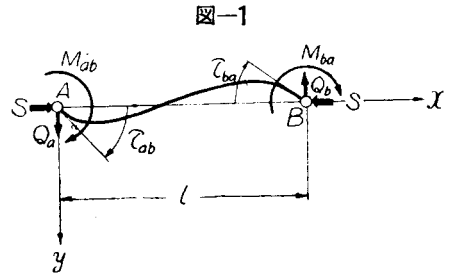


図-1

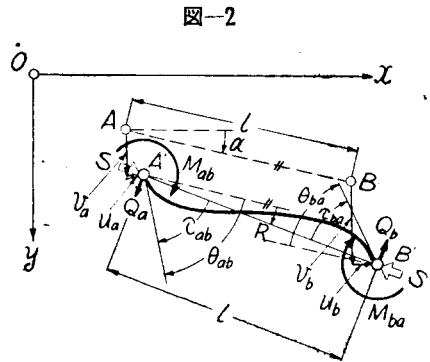
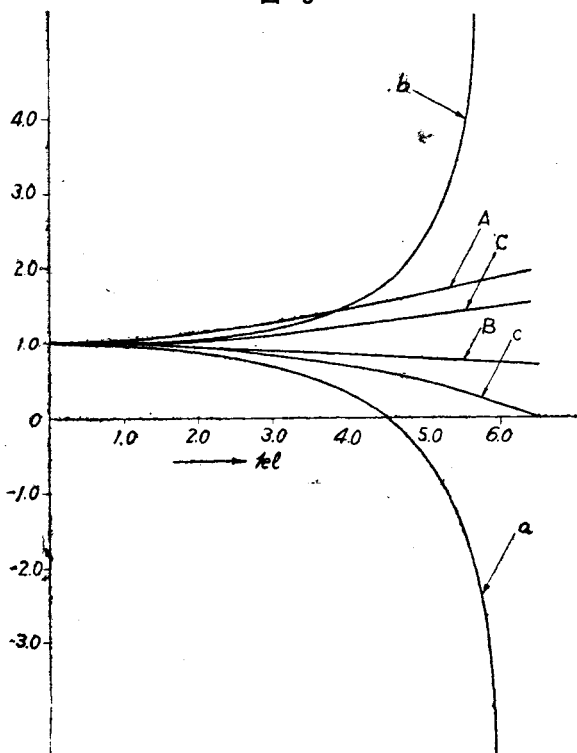


図-2

図-3



$$Q_a = \frac{2EK}{l} \{ (2a+b)(\theta_{ab} + \theta_{ba}) - 6cR \}, \quad (13)$$

$$Q_b = -Q_a$$

又引張材については式(11)を上式に用いて,

$$Q_a = \frac{2EK}{l} \{ (2A+B)(\theta_{ab} + \theta_{ba}) - 6CR \} \quad (14)$$

$$Q_b = -Q_a$$

応力法形によつて解く場合には、未知力  $S, M$  は次の釣合及び剛結条件式によつて、総べて求めることが出来る。

節点  $i$  に作用する集中荷重の  $x, y$  方向の分力を夫々  $P_{xi}, P_{yi}$ , 又、モーメントを  $M_i$  とすれば、釣合条件式は、

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n S_{ik} \cos \alpha_{ik} + \sum_{k=1}^n Q_{ik} \sin \alpha_{ik} + \sum_i P_{xi} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n S_{ik} \sin \alpha_{ik} - \sum_{k=1}^n Q_{ik} \cos \alpha_{ik} + \sum_i P_{yi} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n M_{ik} + \sum_i M_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

但し、式(15)中の  $Q$  は、その部材の性質に応じて、式(13)又は、式(14)を用いる。

次に、剛結条件式は節点  $i$  に集まる部材  $i1, i2, \dots, ik, \dots, in$  について、

$$\theta_{i1} = \theta_{i2} = \dots = \theta_{ik} = \dots = \theta_{in} = \theta_i \quad (16)$$

式(16)に、その部材の性質に応じて、式(7),

又は(8)を用いれば、剛結条件式は、 $M, R$  によつて表わされる。

次に変形法形によつて、部材力を求めてみよう。即ち、未知量として、各節点について、 $x$  及び  $y$  軸方向の変位  $u$  及び  $v$  と節点回転角  $\theta$  を用いる。図-2において、変形前  $AB$  に在つた部材が、変形後  $A'B'$  に位置するものとし、 $A$  及び  $B$  の  $x$  及び  $y$  方向の変位を夫々  $u_a, v_a$  及び  $u_b, v_b$  とすれば、長さの歪  $\varepsilon$  は、高次の微小量を無視すれば、

$$\varepsilon = (u_b - u_a) \frac{\cos \alpha}{l} + (v_b - v_a) \frac{\sin \alpha}{l} \quad (17)$$

部材の受ける曲げモーメントによつて生ずる部材長の変化は、2次の微小量であるから、これを無視すれば、部材の長さの変化は、軸力及び温度変化によるものと考えることが出来る。

即ち  $\varepsilon = \frac{S}{E \cdot F} + \omega t$  茲に  $\omega$  = 部材材料の線膨脹係数  $\dots \dots \dots (18)$

式(17), (18)より,  $\frac{S}{E \cdot F} + \omega t = (u_b - u_a) \frac{\cos \alpha}{l} + (v_b - v_a) \frac{\sin \alpha}{l}$

温度変化が無い場合には、

$$S = \frac{EF}{l} \left\{ (u_b - u_a) \cos \alpha + (v_b - v_a) \sin \alpha \right\} \quad (19)$$

次に部材回転角  $R$  は、高次の微小量を無視すれば、

$$R = (v_b - v_a) \frac{\cos \alpha}{l} - (u_b - u_a) \frac{\sin \alpha}{l} \quad (20)$$

従つて端モーメントは、剛結条件式(16)を考慮に入れ、式(9), (11)より圧縮材については、

$$M_{ab} = 2EK(2a\theta_a + b\theta_b) - 6cEK \left\{ (v_b - v_a) \frac{\cos \alpha_{ab}}{l_{ab}} - (u_b - u_a) \frac{\sin \alpha_{ab}}{l_{ab}} \right\} \quad (21)$$

引張材については、

$$M_{ab} = 2EK(2A\theta_a + B\theta_b) - 6CEK \left\{ (v_b - v_a) \frac{\cos \alpha_{ab}}{l_{ab}} - (u_b - u_a) \frac{\sin \alpha_{ab}}{l_{ab}} \right\} \quad (22)$$

今、節点  $i$  に連なる部材を、 $i1, i2, \dots, in$ , 節点  $i$  の変位を  $u_i, v_i$ , 回転角を  $\theta_i$  とし、節点  $i$  について、釣合条件式(15)に式(13), (14), (19), (21), (22)を用い、これを  $u, v, \theta$  について整理すれば、次の3式

が得られる。但し、式中部材  $ik$  が圧縮材であるか、引張材であるかに応じて、夫々 ( ) 内の上, 下の文字を用いるものとする。

$$Eu_i \sum_k [H_{ik} + T_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] - \sum_k [H_{ik} + T_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] Eu_k + Ev_i \sum_k [G_{ik} - U_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] - \sum_k [G_{ik} - U_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] Ev_k - E\theta_i \sum_k [2L_{ik} \left(\frac{2a+b}{2A+B}\right)] - \sum_k [2L_{ik} \left(\frac{2a+b}{2A+B}\right)] E\theta_k - \sum_i P_{xi} = 0 \dots\dots\dots (23)$$

$$Eu_i \sum_k [G_{ik} - U_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] - \sum_k [G_{ik} - U_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] Eu_k + Ev_i \sum_k [D_{ik} + V_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] - \sum_k [D_{ik} + V_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] Ev_k + E\theta_i \sum_k [2N_{ik} \left(\frac{2a+b}{2A+B}\right)] + \sum_k [2N_{ik} \left(\frac{2a+b}{2A+B}\right)] E\theta_k - \sum_i P_{yi} = 0 \dots\dots\dots (24)$$

$$Eu_i \sum_k [3L_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] - \sum_k [3L_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] Eu_k - Ev_i \sum_k [3N_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] + \sum_k [3N_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] Ev_k - E\theta_i \sum_k [2K_{ik} \left(\frac{a}{A}\right)] - \sum_k [K_{ik} \left(\frac{b}{B}\right)] E\theta_k + \frac{1}{2} \sum_i M_i = 0 \dots\dots\dots (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{茲に} \quad D &= F \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{l}, \quad G = F \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{l}, \quad H = F \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{l}, \quad T = \frac{12K}{l} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{l}, \\ U &= \frac{12K}{l} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{l}, \quad V = \frac{12K}{l} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{l}, \quad L = K \cdot \frac{\sin \alpha}{l}, \quad N = K \cdot \frac{\cos \alpha}{l}, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

式 (23), (24), (25) は一般剛節構造物解法の基礎方程式である。

未知量  $u, v, \theta$  の総数と、条件式の総数が等しいから、式 (23), (24), (25) によつて総べての未知量を計算することが出来る。一般基礎方程式 (23), (24), (25) 中の、 $D, G, H, T, U, V, L, N$  は、何れも構造物の形状及び各部材の寸法が与えられた場合には、式 (26) によつて、容易に計算することが出来る。然しながら、一般基礎方程式の  $a, b, c, A, B, C$  は、何れも、夫々の部材の軸力  $S$  の函数であるから、従つて又、式 (19) より明らかな如く、 $u, v$  によつて決まるものである。従つて、一般基礎方程式 (23), (24), (25) は  $u, v, \theta$  を未知量として、簡単に解くことは出来ない。構造物の性質から判断して、式 (23), (24), (25) を繰返漸近法によつて、解くことが考えられる。

3. 基礎方程式の解法

(1). 剛節橋トラスにおいては、端モーメント  $M$  の作用は軸力  $S$  の作用に比し小である。従つて、 $M$  に随伴して生ずる  $Q$  の作用も亦小さい。従つて、第1次近似値として、釣合条件式 (15) 中の  $Q$  の項を無視した条件式の解を採用することが出来る。この場合の、基礎方程式 (23), (24), (25) は、次の如く簡単になる。

$$Eu_i \sum_{k=1}^n H_{ik} - \sum_{k=1}^n H_{ik} Eu_k + Ev_i \sum_{k=1}^n G_{ik} - \sum_{k=1}^n G_{ik} Ev_k - \sum_i P_{xi} = 0 \dots\dots\dots (23)'$$

$$Eu_i \sum_{k=1}^n G_{ik} - \sum_{k=1}^n G_{ik} Eu_k + Ev_i \sum_{k=1}^n D_{ik} - \sum_{k=1}^n D_{ik} Ev_k - \sum_i P_{yi} = 0 \dots\dots\dots (24)'$$

$$Eu_i \sum_{k=1}^n [3L_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] - \sum_{k=1}^n [3L_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] Eu_k - Ev_i \sum_{k=1}^n [3N_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] + \sum_{k=1}^n [3N_{ik} \left(\frac{c}{C}\right)] Ev_k - E\theta_i \sum_{k=1}^n [2K_{ik} \left(\frac{a}{A}\right)] - \sum_{k=1}^n [K_{ik} \left(\frac{b}{B}\right)] E\theta_k + \frac{1}{2} \sum_i M_i = 0 \dots\dots\dots (25)$$

式 (23)', (24)', (25) より明らかな如く、 $u$  及び  $v$  は直接、式 (23)', (24)' を連立方程式として解くことによつて求められる。この  $u, v$  を式 (19) に代入すれば、この荷重時の各部材軸力  $S$  が得られ、従つて式 (3) より  $\phi, \psi$ , 式 (5) より  $\Phi, \Psi$  は総べて決定出来る。これ等の値を用いて式 (10) より  $a, b, c$ , 式 (12) より  $A, B, C$  を求め、これを先に求めた  $u, v$  と共に式 (25) に代入すれば、式 (25) は  $\theta$  を未知数とする連立1次方程式となり、これから  $\theta$  を全部決定することが出来る。以上が第1次近似値である。滑節トラスは、剛節トラスの特別の場合であつて、各部材の端モーメントが0の場合に相当するから、従つて、モーメントの釣合条件式 (25) は消失し、式 (23)', (24)' は、滑節トラスの変形算定に必要な式である。基礎方程式 (23), (24), (25) の一般解を求めるに当り、 $Q$  の影響を無視して、最初式 (23)', (24)' により  $u, v$  を直接求めたことは、実は滑節トラスの変位を求めたことに相当する。従つて、式 (25) より  $\theta$  を求めるに当つて、式中の  $a, b, c, A, B, C$  の計算に必要な、 $k = \sqrt{S/EI}$  には、滑節トラスの部材力  $S$  を用いたことになる。

以上の如く、第1次近似値  $u, v, \theta$  が求められたならば  $\theta$  の第1次近似値計算の時に算出した  $a, b, c, A, B, C$  を式 (23), (24), (25) に代入し、これを連立1次方程式として解き、 $u, v, \theta$  の第2次近似値が得られる。斯様な手数を順次繰返すことによつて、一般基礎方程式 (23), (24), (25) を満足する解に如何程でも近づくことが出

来る。斯くして得た  $u, v, \theta$  を、式 (19), (21), (22) に代入すれば、剛節トラスの部材力、端モーメントを繰べて決定することが出来る。又、この際得られた  $u, v, \theta$  は、剛節トラスの弾性変形を表わす。剛節トラスにおいては、荷重が極限荷重に比して小なる場合には、一般に  $Q$  が小であるから、後の例題が示す如く、第1次近似値で充分正確な値を示すものである。

(2) フィーレンディール・トラスにおいては、軸力  $S$  は小、従つて  $k$  が小である。よつて、図-3 より明らかな如く、 $a, b, c, A, B, C$  の第1次近似値として、各値を1に等しくとることが出来る。従つて、この場合には、基礎方程式 (23), (24), (25) は次の如く表わされる。

$$Eu_i \sum_{k=1}^n (H_{ik} + T_{ik}) - \sum_{k=1}^n (H_{ik} + T_{ik}) E u_k + E v_i \sum_{k=1}^n (G_{ik} - U_{ik}) - \sum_{k=1}^n (G_{ik} - U_{ik}) E v_k - E \theta_i \sum_{k=1}^n 6 L_{ik} - \sum_{k=1}^n 6 L_{ik} E \theta_k - \sum_i P_{xi} = 0 \dots\dots\dots(23)''$$

$$E v_i \sum_{k=1}^n (G_{ik} - U_{ik}) - \sum_{k=1}^n (G_{ik} - U_{ik}) E v_k + E v_i \sum_{k=1}^n (D_{ik} + V_{ik}) - \sum_{k=1}^n (D_{ik} + V_{ik}) E v_k + E \theta_i \sum_{k=1}^n 6 N_{ik} + \sum_{k=1}^n 6 N_{ik} E \theta_k - \sum_i P_{yi} = 0 \dots\dots\dots(24)''$$

$$E v_i \sum_{k=1}^n 3 L_{ik} - \sum_{k=1}^n 3 L_{ik} E u_k - E v_i \sum_{k=1}^n 3 N_{ik} + \sum_{k=1}^n 3 N_{ik} E v_k - E \theta_i \sum_{k=1}^n 2 K_{ik} - \sum_{k=1}^n K_{ik} E \theta_k + \frac{1}{2} \sum_i M_i = 0 \dots\dots(25)''$$

式 (23)'', (24)'', (25)'' は、 $u, v, \theta$  に関する連立1次方程式である。この解  $u, v, \theta$  を第1次近似値とする。今求めた  $u, v$  から、式 (19) によつて  $S$  を求め、前述の場合と同様に式 (3), (5), (10), (12) を用いて、 $a, b, c, A, B, C$  が求められる。この値を式 (23), (24), (25) に代入して得た連立1次方程式を解いて得られた  $u, v, \theta$  を第2次近似値とする。この操作を反復することによつて、基礎方程式の解に逐次接近した値を得ることが出来る。最後に得た  $u, v, \theta$  を用いて、フィーレンディール・トラスの軸力、端モーメントを求める操作は、前回と全く同一である。

4. 挫屈、弾性破損に関する一考察

滑節トラスの圧縮部材は、両端鉸の圧縮材であるから、その挫屈荷重は、単一柱の場合と同様に求めることが出来る。トラスの各圧縮材の挫屈荷重の内、最小のものがトラスの挫屈荷重となる。剛節トラスでは、圧縮部材はその両端において、節点に剛結せられている。而して、その固定の度合は、完全固定ではなく、所謂弾性固定という言葉で表現されている。然し、圧縮部材の挫屈荷重を求めるにはこの所謂弾性固定なる言葉を量的に表わす必要にせまられる。この時在来の方法では、細長比の大なる圧縮材では、オイラー挫屈荷重公式の係数を2に等しく採つたり、又は経験から適当な値を用いている。斯様に、剛節橋トラスの挫屈の問題を単一柱の挫屈の問題に直して考察している。然し、これはトラスの全貌を見ない考え方であり、剛節点の弾性固定度を量的に、単一に表わさうとしたところに無理がある。そこで測節構造物を構成する各部材の特性を考え、挫屈、又は弾性破損に関して一考察を試みた。

(1) 全剛節橋トラス

今、図-4 に示す剛節トラスの節点  $i$  について、剛結条件式は、例えば

$$\theta_{ig} = \theta_{ih}, \theta_{ig} = \theta_{ij}, \theta_{ig} = \theta_{ik} \dots\dots\dots(16)'$$

の3個になる。図-4 の圧縮部材  $ig, ik$  について、剛結条件式 (16)' に式 (7) を代入して整理すると、

$$K_{ik} \phi_{gi} M_{gi} - 2K_{ik} \psi_{gi} M_{ig} + 2K_{gi} \psi_{ih} M_{ih} - K_{gi} \phi_{ik} M_{ki} = 6EK_{gi} K_{ik} (R_{gi} - R_{ik}) \dots\dots\dots(27)$$

同様にして他の部材についても剛結条件式を書くと、未知端モーメントの数と同数だけの式が得られる。荷重  $P$  を次第に増大すると、終に、剛節トラスは挫屈又は弾性破損を生ずる。挫屈を生じた場合には、部材の端モーメントは  $\infty$  になる筈である。即ち、挫屈の条件式は、式 (27) と同形の剛結条件式の端モーメントの係数で作つた行列式が0に等しい式である。この挫屈条件式より、 $S$ 、従つて、挫屈に必要な荷重  $P$  が求められることになる。次に、特殊な橋トラスについて、剛結条件式を求めよう。

(2) 剛滑節橋トラス

図-5 に示す如き、剛滑節橋トラスについて、節点  $i$  の測節条件式は

$$\theta_{ig} = \theta_{ik}, \theta_{ih} = \theta_{ik}, \theta_{ij} = \theta_{ik} \dots\dots\dots(16)''$$

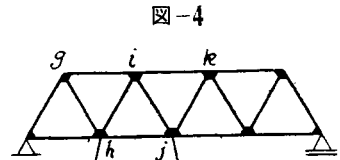


図-4

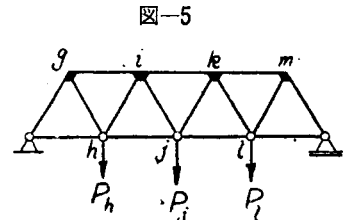


図-5

この第1条件式は、式(27)になる。第2及び第3条件式は、節点  $h, j$  が滑節であるから

$M_{hi}=0, M_{ji}=0$  の条件を用いると、剛結条件式は、部材  $ih$  が圧縮材とすると

$$2K_{ik}\psi_{hi}M_{ih}-2K_{hi}\psi_{ik}M_{ik}+K_{hi}\phi_{ik}M_{ki}=6EK_{hi}K_{ik}(R_{ik}-R_{hi}) \dots\dots\dots(28)$$

部材  $ij$  が引張材とすると

$$2K_{ik}\psi_{ji}M_{ij}-2K_{ji}\psi_{ik}M_{ik}+K_{ji}\phi_{ik}M_{ki}=6EK_{ji}K_{ik}(R_{ik}-R_{ji}) \dots\dots\dots(29)$$

節点  $i$  のモーメント釣合条件式を、式(29)に用いて、 $M_{ij}$  を消去すると

$$2K_{ik}\psi_{ji}(M_{ih}+M_{ig})+2(K_{ji}\psi_{ik}+K_{ik}\psi_{ji})M_{ik}+K_{ji}\phi_{ik}M_{ki}=6E\cdot K_{ik}\cdot K_{ji}(R_{ji}-R_{ik}) \dots\dots\dots(29)'$$

即ち、節点  $i$  の剛結条件式(16)''は、夫々、式(27),(28),(29)、又は、式(27),(28)(29)'で表わすことが出来る。

図-6

次に図-6に示す如き剛滑節トラスについて、節点  $i$  の剛結条件式は、

式(27)が用いられる。節点  $i, k$  についてのモーメント釣合条件式

$M_{ig}+M_{ik}=0, M_{ki}+M_{km}=0$  を用い、更に節点  $i$  の直ぐ右の端モーメントを  $M_i$  で表わすことにすれば

$$M_{gi}=M_g, M_{ig}=-M_{ik}=-M_i, M_{ki}=-M_{km}=-M_k$$

この関係を式(27)に代入すれば、この場合の剛結条件式は

$$K_{ik}\phi_{gi}M_g+2(K_{ik}\psi_{gi}+K_{gi}\psi_{ik})M_i+K_{gi}\phi_{ik}M_k=6EK_{gi}K_{ik}(R_{gi}-R_{ik}) \dots\dots\dots(30)$$

挫屈条件式としては、場合によつては各節点の釣合条件式において、節点回転角が $\infty$ になる条件を用いる方が適当なことがある。次に剛節トラスの部材の細長比が小なる場合には、挫屈を生ずる前に部材応力が弾性限度を超過して弾性破損を生ずることがある。この場合については、3に述べた方法により部材力  $S, M$  を求め、これから部材応力を計算して、弾性限度との相対関係について吟味することが必要である。

5. 数値計算例

(1) 剛節橋トラス

図-7に示す如きワーレン・トラスにおいて、 $P$ を次第に増大して、トラスの安定限界又は弾性破損限界附近迄変化せしめた場合の、トラス各部の変形、部材力を求める。トラスの部材断面形は全部材一定とし、表-1に示す如くである。

(i) 弾性変形  $u, v, \theta$  の算定 図-7の如く、座標軸方向をとり、式(26)より  $D, G, \dots, N$  を計算し、且つ変形条件を考え3(1)に述べた方法によつて、 $u, v, \theta$  の第1次近似値を求める。次に、第2次近似値を求めるに際して、式(23),(24),(25)より明らかな如く、 $a, b, c$  に乗ずる項は、 $K/l, K$  を含み、それ以外の項は総べて  $F$  を含む。而して、トラス I, II では、表-1より明らかな如く、 $K/l, K$  は  $F$  に比して非常に小であるから、第1次の  $a, b, c$  を式(23),(24),(25)に代入して、この3式を解いて求めた第2次近似値は、第1次近似値と実用上大差がない。従つて、この場合には、 $u, v, \theta$

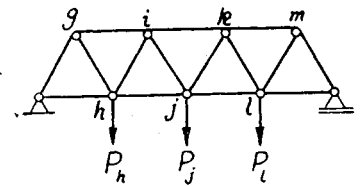


図-7 Warren Truss I

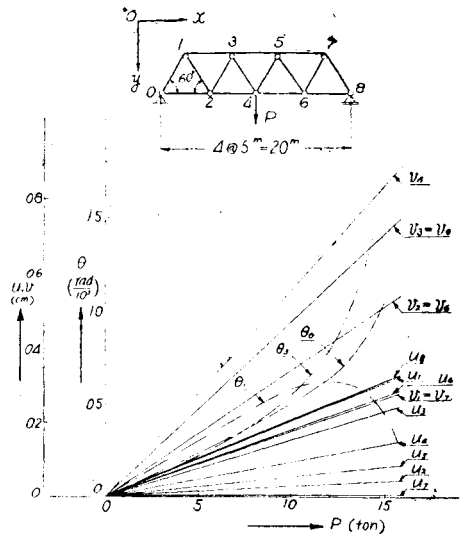


表-1

	ワーレン・トラス I	ワーレン・トラス II	ワーレン・トラス III
断面形	└┬ 2-Ls 80×80×9	└┬ 2-[s 125×65×13.4kg/m	└┬ 2-[s 300×90×38.1kg/m
断面積 $F$ (cm <sup>2</sup> )	27.18	34.22	97.14
断面2次モーメント $I$ (cm <sup>4</sup> )	158.4	850.4	12,870.0
細長比 $l/r$	206.0	100.2	43.4
剛度 $K$ (cm <sup>3</sup> )	0.3168	1.7008	25.74
$K/l$ (cm <sup>2</sup> )	0.0006	0.003	0.051
断面係数 $W$ (cm <sup>3</sup> )	{ 69.42 27.67	136.06	858.00

の第1次近似値をそのまま、式(23),(24),(25)の解として採用して差支はない。

以上に求めた結果を、3種のトラスにつき夫々図-7, 8, 9, 10に示す。u, vは何れも、Pと共に直線的に変化するが、θはトラスI, IIにおいては、Pの小なる間は略々Pに比例して変化するが、Pが大になると曲線は急に上昇して、θの増加の割合が急に増加することが判る。

これに反し、各部材が太短いトラスIIIにおいては、図-10に見る如くPによるθの変化は殆ど直線的である。但し、図-10に示したトラスIIIに対するu, v, θは第1次近似値を採用したものである。

(ii) 部材力S, Mの算定 以上に求めたu, v, θを用いて、S及びMを求めた結果は図-8, 9, 10に示す如くである。これ等の図より判る如く、部材軸力Sは荷重Pに比例する。端モーメントMは、トラスI, IIではPに対して曲線変化をなし、且つ、Pの増大と共にMの増加の割合が急に大きくなる。これに反し、トラスIIIでは、図-10に見る如く、PによるMの変化は、略々直線的である。

次に、トラスI, II, IIIの挫屈荷重を推算すれば、以下の如くである。先ずトラスI, II, III共図-6に示した構造であるから、節点1及び3について、式(30)を書けば次式を得る。

$$4\psi_{01}M_1 + \psi_{13}M_3 = 6EK(R_{01} - R_{13}),$$

$$\psi_{13}M_1 + (2\psi_{13} + 2\psi_{35} + \psi_{35})M_3 = 6EK(R_{13} - R_{35})$$

故に挫屈限界においては

$$4\psi_{01}(2\psi_{13} + 2\psi_{35} + \psi_{35}) - \psi_{13}^2 = 0 \dots\dots\dots(a)$$

上式のψ, ψは各部材について近似的に、滑節トラスの部材力S<sub>0</sub>から求めたkを用いることが出来る。これを解いて最小のPを求めると、表-2(i)の如くである。

表-2

	トラス I	トラス II	トラス III
(i) 式(a)による挫屈荷重 P(ton)	17.3	92.8	1 404.0
(ii) 滑節トラス挫屈荷重 P(ton)	11.3	60.9	
(iii) 式(a)による部材35の挫屈応力(kg/cm <sup>2</sup> )	735.0	3 133.0	
(iv) 両端滑節部材35のオイラー挫屈応力(kg/cm <sup>2</sup> )	482.0	2 054.0	
(v) 部材35弾性固定度	1.53	1.53	

式(a)の性質より、挫屈荷重は何れも部材の断面2次モーメントIに比例する。

これに対して、上弦材各圧縮部材を両端滑節の圧縮部材と考え、これ等のトラスは、表-2(ii)に示す荷重Pで、圧縮部材35が挫屈する。従つて、圧縮部材35の弾性固定度cを逆算すれば、表-2(v)に示す如く、トラスI, II共c=1.53となる。即ち、トラスIについて言えば、c=1として設計したトラスIはP=11.3tonで挫屈する管であるが、トラスの剛結条件より、トラス全体としての挫屈を考えると、実際はP=17.3tonまでの荷重に耐える。即ち弾性固定度cは1に非ずして1.53である。

以上は、総べて平面剛節トラスのその面内の挫屈について取扱つたもので、面外の挫屈については断面の性質その他より考慮外とした。

(2) フィーレンディール・トラス

図-8 Warren Truss I

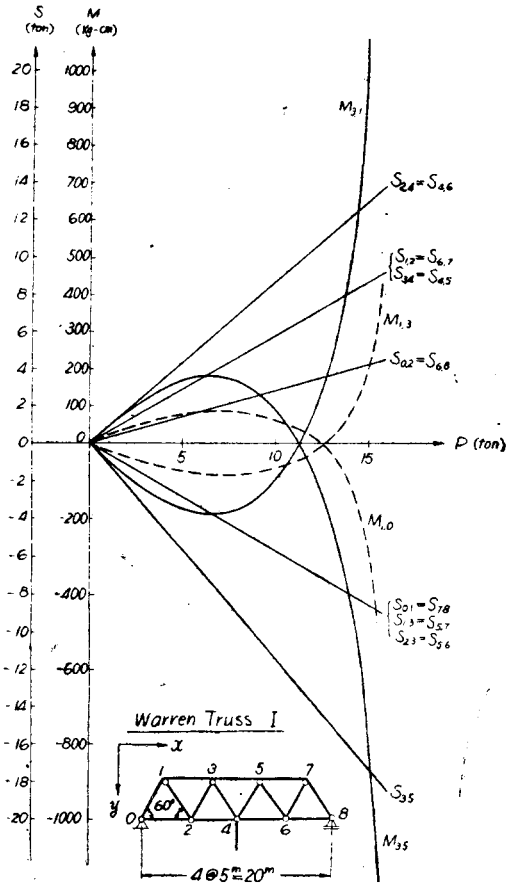


図-9 Warren Truss II

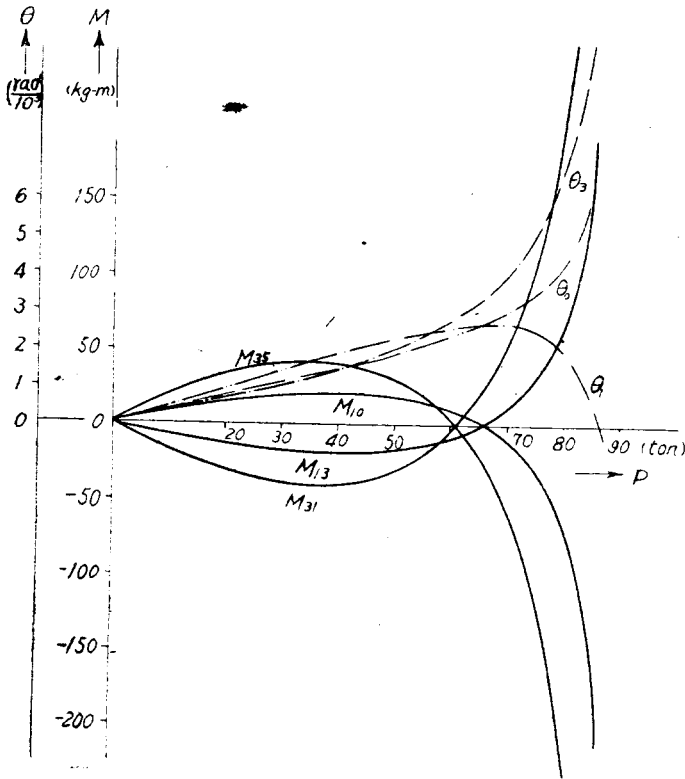


図-10 Warren Truss III

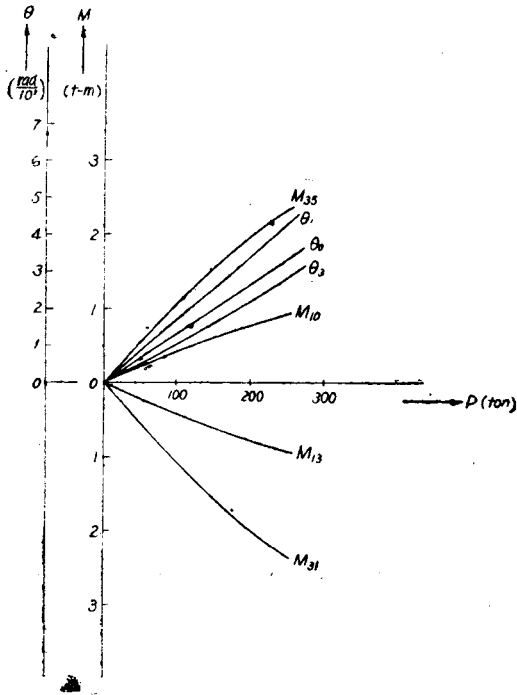


図-11,12 に示すフィーレンディール・トラスについて、各部材共、同一一定断面とし、前例題と比較のためトラス III と同一断面を採用し、 $P=100$  ton とする。3 (2) に述べた方法に従つて解法を進める。この計算によつて得た  $u, v, \theta$  を用いてフィーレンディール・トラスの変形状態を拡大して画けば、夫々図-11,12 の如くなる。以上においては、何れも2回の反復操作によつて得た解を用いた。尚、本フィーレンディール・トラスの断面並びに荷重  $P$  の値は、計算の順序、方法を実行するために適宜選定したものであり、構成材料の強度は考慮外においた。

6. 結言

一般平面剛節構造物の変形、応力を極限状態附近迄を含めて考察し、次の結果を得た。

(1) 一般平面剛節構造物の変形  $u, v, \theta$  を求めるために必要な、基礎

図-11 Vierendeel Truss I

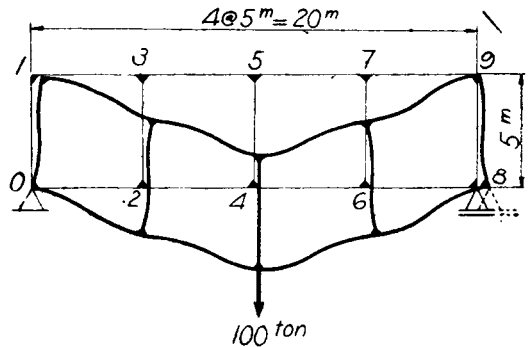
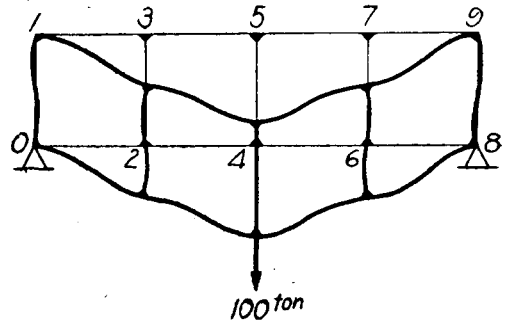


図-12 Vierendeel Truss II





方程式 (23), (24), (25) を得た。  $u, v, \theta$  は構造物の性質から判断して、繰返漸近法によつて解くことが出来る。求められた  $u, v, \theta$  を用いて、断面力  $S, M, Q$  は夫々式 (19), (20), (1), (3), (5), (10), (12), (9), (11), (13) 及び (14) より決定することが出来る。

(2) 常荷重時の変形解法には、基礎方程式中  $a=b=c=A=B=C=1$  とおいた式 (23)'', (24)'', (25)'' の解法 1 回によつて、正解を得ることが出来る。

(3) 剛節橋トラスについては、部材剪断力  $Q$  の影響を無視して得た式 (23)' (24)' (25) の連立方程式より出発して、第 1 次近似値を得以下式 (23), (24), (25) によつて、第 2 次近似値の解を繰返漸近法によつて求める。然し一般には、 $Q$  の影響は小さいから第 1 次近似値で充分正確な結果を得る。

(4) フィーレンディール橋トラスについては、移動支点、鉸支点何れの支持条件の場合にも、基礎方程式 (23)'', (24)'', (25)'' の連立解法より出発して、第 1 次近似値を得、以後は一般式 (23), (24), (25) により、反復漸近法によつて解を得ることが出来る。

(5) ワーレン・トラス I, II, III 及びフィーレンディール・トラス I, II について数値計算を行い変形、部材力を求めた (図-7~12)。  $\theta, M$  が外荷重  $P$  の増大と共に曲線的に変化し、終いに急激に増減して挫屈現象に移る状態が諒解される。本計算は、連立方程式の解法に非常な労力を要するものである。従つて実用解としては適当でないことは言うまでもないが一般任意形状の剛節構造物の解法並びに極限状態附近を含む範囲における性状を明らかにすることが本研究の目的であることは、緒言において既に述べた通りである。

(6) 剛節トラスの圧縮材の端部固定度について明らかにした。即ち、剛節トラス圧縮部材の挫屈を構造物として取扱ひ挫屈荷重計算に必要な式 (27), (28), (29), (30) を誘導した。その結果、圧縮部材の挫屈荷重及びこれから求めた弾性固定度はその部材の部材力とその断面性質に関係することは勿論であるが、これのみならず、これに連なるトラス全体の部材の部材力と、それ等断面性質に関係することが判る。次に、先に (5) に用いたワーレン・トラス I, II, III について、数値計算を行い表-2 の結果を得た。

本研究においては、曲げによる部材の長さの変化は考慮しなかつた。そのため極限状態の性状について徹底的に究明することは出来なかつたが、この状態附近並びにこれに到達する過程について、以上の諸点を明らかにし実用上注意すべき結果を得たので茲に取りまとめた次第である。

本研究は文部省科学研究費による研究の一部であつて、茲に深い感謝の意を表する。

(実費著者一部負担)

昭和 25 年 11 月 25 日	印 刷	土木学会論文集
昭和 25 年 11 月 30 日	発 行	第 9 号
著 者	小 西 一 郎	
編集兼発行者	中 川 一 美	東京都千代田区大手町 2 丁目 4 番地
印 刷 者	大 沼 正 吉	東京都港区溜池町 5 番地
印 刷 所	株式会社 技 報 堂	東京都港区溜池町 5 番地
東京中央郵便局区内千代田区大手町 2 丁目 4 番地		電話 丸ノ内(23) 3945 番
発行所	社 団法人 土 木 学 会	振替 東京 16828 番

