

撓角法による4辺固定矩形板の逐次近似解法

正員 成岡 昌夫*

ON THE SUCCESSIVE APPROXIMATE SOLUTION OF A RECTANGULAR PLATE WITH FOUR EDGES CLAMPED BY THE SLOPE DEFLECTION METHOD

Masao Naruoka, C.E., Member

Synopsis In the solution of a multiple-span high rigid frame by the slope deflection method, it is difficult to solve "Knotengleichung" and "Schnittgleichung" which are linear equation of many unknowns. As a method of removing this disadvantage and evaluating the necessary bending moment of a panel point without solving the equation, H. Cross' moment distribution method has been proposed. As can be understood from the solution of a rectangular plate with four clamped edges which S. Timoshenko announced in 1938, it is necessary to solve the linear equations with many unknowns as in the case of the solution of a rigid frame by slope deflection method. The author proposed the successive approximate solution which was based on the author's Slope Deflection Method published in "Treatise collection of the Civil Engineering Society (Japan) No.4" for obtaining the bending moments of the clamped edges without solving the equations as in the case of the moment distribution method by H. Cross and of the sloped distribution method by F. Takabeya. This method is a little complicated as compared with the moment distribution method applied to a rigid frame, but this fact can be easily understood by comparison with the solution of plate and beam or column. The author solved two examples by this method and obtained very satisfactory results.

要旨 平面多径間高層ラーメンを撓角法で解く場合、多元1次方程式である節点方程式及び層方程式を解くのは、未知数の多い場合には甚だ困難である。このためには繰返試索法がよく用いられるのであるが、方程式を解かずに直接所要の節点曲げモーメントを求める方法として、Hardy Cross のモーメント分配法が提案されている。4辺固定矩形板を解く場合にも、ラーメンの場合と同様、多元1次方程式を解くことを要する。従つてこの場合にモーメント分配法の如く、方程式を直接解くことなく必要なる固定モーメントを求める方法として本方法を提案したものである。

1. 緒言

4辺固定矩形板の解法は一般には甚だ困難であつて、古来幾多の先輩が苦心を重ねて來たところである。然るに S.Timoshenko が 1938 年に発表した解法¹⁾は、その物理的意味の明確さ及び応用範囲の広さに於て、従来の解法にその例を見ないところである。この解法によつてこの種の問題は解けるわけであるが、途中で必ず多元1次方程式を解かなくてはならない。矩形板の場合項数を多くすると、方程式を解くだけでも大した苦労がいるわけである。多径間高層ラーメンの解法に於て、機械的作表法により釣合方程式（節点方程式及び層方程式）を出してくる場合、同様のことが言われる。ラーメンの場合には、H.Cross のモーメント分配法が提案されていて、これによると所要の節点曲げモーメントが図上計算により直ちに求められる。従つて4辺固定矩形板の場合にも、方程式を直接解くことなく、直接固定モーメントが求められるのではないかと考え、茲に逐次近似解法を提案する次第である。

2. S.Timoshenko の解法

先づ根本となる4辺固定矩形板の解法を等分布荷重のかかる場合を例に採つて説明する。

* 京都大学助教授、工学部土木工学教室

1) S.Timoshenko, Proc. 5 th Intern. Cong. Appl. Mech., Cambridge, Mass., 1938

図-1のように座標軸を採れば、4辺単純支持、等分布荷重満載の場合の撓曲面の方程式は、

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 N} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \cos \frac{m\pi x}{a} \left\{ 1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2 \cosh \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right\}, \quad \alpha_m = m\pi b/2a \quad \dots \dots \dots (1)$$

従つて

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=-\frac{b}{2}} = \frac{2qa^3}{\pi^4 N} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^4} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\tanh \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \quad \dots \dots \dots (2)$$

次に $x = \pm a/2$ を単純支持とし、 $y = \pm b/2$ に作用する曲げモーメント

$$(M_y)_{y=\pm\frac{b}{2}} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m \cos \frac{m\pi x}{a} \text{ による撓曲面の } y=b/2 \text{ に於ける撓角は} \\ \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)_{y=\pm\frac{b}{2}} = \frac{a}{2\pi N} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} A_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\tanh \alpha_m + \frac{\alpha_m}{\cosh^2 \alpha_m} \right) \quad \dots \dots \dots (3)$$

更に $y = \pm b/2$ を単純支持とし、 $x = \pm a/2$ に作用する曲げモーメント

$$(M_x)_{x=\pm\frac{a}{2}} = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} B_m \cos \frac{m\pi y}{b} \text{ による撓曲面の } y=-b/2 \text{ に於ける撓角は} \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right)_{y=-\frac{b}{2}} = \frac{1}{4N} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{B_m}{\cosh^2 \beta_m} \left(a \sinh \beta_m \cosh \frac{m\pi x}{b} - 2x \cosh \beta_m \sinh \frac{m\pi x}{b} \right) \\ - 2x \cosh \beta_m \sinh \frac{m\pi x}{b}, \quad \beta_m = m\pi a/2b \quad \dots \dots \dots (4)$$

上式の(4)内を Fourier 級数に展開して、

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right)_{y=-\frac{b}{2}} = \frac{-4b}{\pi^2 N} \frac{a^2}{b^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{B_m}{m^3} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \frac{i(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \cos \frac{i\pi x}{a} \quad \dots \dots \dots (5)$$

従つて $y = -b/2$ にて固定の条件は

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=-\frac{b}{2}} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)_{y=-\frac{b}{2}} = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

これより

$$\frac{a}{2\pi N} \frac{A_i}{i} \left(\tanh \alpha_i + \frac{\alpha_i}{\cosh^2 \alpha_i} \right) + \frac{4b}{\pi^2 N} \frac{a^2}{b^2} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{B_m}{m^3} \frac{i}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2} \right)^2} \\ = -\frac{2qa^3}{\pi^4 N} \frac{1}{i^4} \left(\tanh \alpha_i - \frac{\alpha_i}{\cosh^2 \alpha_i} \right) \quad \dots \dots \dots (7)$$

同様の条件式が $x = -\frac{a}{2}$ の固定条件から求められる。これらの方程式に於て $i=1, m=1,3,5, \dots, i=3, m=1,3,5, \dots, \dots$ と置くことによつて方程式群が得られ、これらを解けば4辺固定矩形板は解けたことになる。不静定構造物の解法で、不静定値が求められると、爾余の曲げモーメント其の他が容易に求められるのと同様である。例えば正方形板の場合に4項迄とることにし、方程式を書けば

$$\begin{aligned} 1.8033A_1 + 0.0764A_3 + 0.0188A_5 + 0.0071A_7 &= 0.6677K \\ 0.0764A_1 + 0.4045A_3 + 0.0030A_5 + 0.0159A_7 &= 0.01232K \\ 0.0188A_1 + 0.0330A_3 + 0.2255A_5 + 0.0163A_7 &= 0.00160K \\ 0.0071A_1 + 0.0159A_3 + 0.0168A_5 + 0.1558A_7 &= 0.00042K \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad \dots \dots \dots (8)$$

但し

$$K = -4qa^2/\pi^3$$

上の聯立多元1次方程式は対角線の項が他の項より大であり、丁度ラーメンの釣合条件式に見られる性質をもつてゐる。従つて解法には繰返試索法（イテラチオン法）が応用出来、逐次正解値に近づけてゆくことが出来る。

以上が S.Timoshenko の解法である。正方形の場合は方程式の解法は比較的簡単であるが、矩形の場合は

図-1

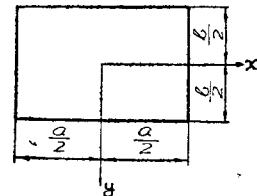


図-2に示す形をとる。この場合は上半分の方程式より A を B_1, B_3, B_5, \dots にて表わすことが出来る。これを下半分の方程式に代入して B のみの方程式とし、これを繰返試索法で解いて B の値を求め、これらの値を用いて A の値を求めるのである。即ち正方形の2倍以上の手数を要する。従つてこれらの値を方程式を直接解くことなく、機械的計算によつて求められると非常に便利である。

3. 垂直荷重を受ける矩形板の撓角法²⁾

次に本法の基礎たる垂直荷重を受ける矩形板の撓角法について述べる。これは H. Cross のモーメント分配法が撓角撓度法の基礎公式より出発しているのと同様である。

図-3に於て C, D を単純支持辺とし、 A, B の境界条件を次の如く表わすものとする。

$$\delta_A = 0, \quad \theta_A = \sum \theta_{A,m} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad M_A = M_{AB} = \sum M_{AB,m} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

然らば次の撓角法公式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} M_{AB,m} &= \frac{m\pi N}{b} \frac{1}{c^2(\alpha_m) - s^2(\alpha_m)} \{ c(\alpha_m) \theta_{A,m} + s(\alpha_m) \theta_{B,m} \} + C_{BA,m} \\ M_{BA,m} &= \frac{m\pi N}{b} \frac{1}{c^2(\alpha_m) - s^2(\alpha_m)} \{ s(\alpha_m) \theta_{A,m} + c(\alpha_m) \theta_{B,m} \} + C_{BA,m} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

但凡

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ii} &= m\pi a/b \\ c(\alpha_m)/c^2(\alpha_m) - s^2(\alpha_m) &= 2(\sinh \alpha_m \cosh \alpha_m - \alpha_m)/(\sinh^2 \alpha_m - \alpha_m^2) \\ s(\alpha_m)/c^2(\alpha_m) - s^2(\alpha_m) &= 2(\alpha_m \cosh \alpha_m - \sinh \alpha_m)/(\sinh^2 \alpha_m - \alpha_m^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

上式にて $\theta_{A,m} = \theta_{B,m} = 0$ とおけば、 $M_{AB,m} = C_{AB,m}$ 、 $M_{BA,m} = C_{BA,m}$ となり、辺 C, D を単純支持とし辺 A, B を固定した時の固定辺の曲げモーメントに相当する。従つて等分布荷重 q 満載の場合は

もし対称変形の場合には $\theta_{A,m} = -\theta_{B,m}$ と置いて

$e/(c^2 - s^2)$, $s/(c^2 - s^2)$, C_{AB} 等の函数の値は前著²⁾に示してあるので、以下述べる解法のために特に計算する必要はない。これらの函数値を示せば、表-1のようであ

表—1

C	$C(x)$	$A(x)$	$\Delta x \cdot \frac{dA}{dx}$	$\frac{\partial A}{\partial x}$	$C(x)$	$A(x)$	$\Delta x \cdot \frac{dA}{dx}$	$\frac{\partial A}{\partial x}$	Sum of $\Delta x \cdot \frac{dA}{dx}$
	$(C_0 + C_1x)$	$(A_0 + A_1x)$	$\Delta x \cdot (A_1)$	A_1	$(C_0 + C_1x)$	$(A_0 + A_1x)$	$\Delta x \cdot (A_1)$	A_1	
0	12.821250	6.350100	0.008719	31	2.000000	0.002050	0.0002050	1	99.7719
3	6.536800	31.667400	0.032465	2	1	1.560	99.270		
6	4.920000	31.962700	0.064930	2	1	1.118	78.673		
9	3.927200	31.952700	0.092700	2	1	0.000800	77.9770		
12	2.992200	31.952700	0.115769	2	1	0.570	76.222		
15	2.365700	31.952700	0.129774	2	1	0.506	74.666		
18	1.876200	31.952700	0.137629	2	1	0.380	73.584		
21	1.498700	31.952700	0.140526	2	1	0.285	72.686		
24	1.268700	31.952700	0.140526	2	1	0.214	71.766		
27	1.083700	31.952700	0.137629	2	1	0.162	70.846		
30	2075.3500	32.681200	0.135939	1	20	0.0000070	69.922		
33	4822.6	32.681200	0.135939	2	20	0.0000070	69.922		
36	3.7008	21/956	0.135939	2	20	0.0000070	69.922		
39	2.9098	15.7272	0.135939	2	20	0.0000070	69.922		
42	1.1702	15.7272	0.135939	2	20	0.0000070	69.922		
45	2.007176	136.0000	0.135939	5	20	0.0000070	69.922		
48	4.364	6.082636	0.135939	5	20	0.0000070	69.922		
51	22.36	6.082636	0.135939	6	20	0.0000070	69.922		
54	1.580	6.5829	0.135939	8	20	0.0000070	69.922		
57	20.000760	33.0486	0.135939	9	20	0.0000070	69.922		
60	558	30.0549	0.135939	10	20	0.0000070	69.922		
63	330	23.5650	0.135939	12	20	0.0000070	69.922		
66	176	18.124	0.135939	14	20	0.0000070	69.922		
69	112	13.700	0.135939	16	20	0.0000070	69.922		
72	2.000066	10.6644	0.135939	18	20	0.0000070	69.922		
75	36	0.000130	0.135939	20	20	0.0000070	69.922		
78	29	6.798	0.135939	22	20	0.0000070	69.922		
81	22	4.651	0.135939	24	20	0.0000070	69.922		
84	2.000000	3.5896	0.135939	26	20	0.0000070	69.922		
87	6	2.6220	0.135939	28	20	0.0000070	69.922		
90	30	2.6220	0.135939	30	20	0.0000070	69.922		

三〇

	1	2	3
m	Θ_{AM} 単位 g^2/N	C_{ABM} 単位 g^2	$M_{ABM} = m \cdot \frac{C - A}{C + A} \cdot \theta_{AM}$
1	0.013 708	-0.0073 829	5.358 532
3	0.000 253	-0.000 2 764	18.825 757
5	0.000 033	-0.000 01 92	3.745 570
7	0.000 003	-0.000 002 376	3.392 623
9	0.000 000 203	-0.000 000 227	5.6 548 466
11	0.000 000 001	-0.000 000 097	6.9 115 089

図-4の正方形板に於て、4辺を単純支持とした場合の撓角は(2)式より求められ、(9)式の表わし方をすれば表-2(1)の通りである。これは正方形の場合であるから、各辺に於て等しい。

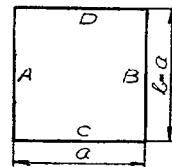
次に辺C,Dを単純支持とした場合、辺A,Bを固定するに必要な曲げモーメント即ち固定端曲げモーメントは、表-1を利用して表-2(2)のように求められる。

更に対称変形の場合、撓角と曲げモーメントとの間の関係式は、(13)式より $M = m\pi N/a \cdot c - s/c^2 - s^2 \cdot \theta$ として、表-2(3)のように求められる。この場合の $m\pi \cdot c - s/c^2 - s^2$ はモーメント撓角係数 A とも名付けらるべきものである。

次に(5)式中に含まれる $\frac{4}{\pi^2} \frac{a^2}{b^2} \frac{1}{m^3} \frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2}\right)^2}$ は、4辺単純支持矩形板に於いて辺A,B(辺長 b)に作用する曲げモーメントにより、辺C,D(辺長 a)に幾何の撓角が生ずるかを示す係数であつて、之をモーメント撓角係数 B とも名付けておく。a=bの場合を計算すると表-3のようである。

以上4つの表を準備計算として求めるわけであるが、S.Timoshenko 法によつて計算する場合にも表-2(1), 3及び2(3)の逆数値は必ず必要なものである。表-2(2)が本法独特の値であるが、予め表-1のような表があればこのために特に求める必要はない。更に対称変形の場合を取扱つているので、半分のみを考慮すればよい。

図-4

表-3 $\frac{4}{\pi^2} \frac{1}{m^3} \frac{i}{\left(1 + \frac{i^2}{m^2}\right)^2}$

i	1	3	5	7	9	11
1	0.101321	0.002159	0.000299	0.000135	0.0000583	0.0000000
3	12.157	11.258	5.257	2.530	1.351	0.791
5	2.998	5.259	4.053	2.570	1.623	1.046
7	7.135	2.530	2.570	2.068	1.511	1.080
9	5.43	1.351	1.623	1.511	1.251	0.783
11	3.00	0.791	1.046	1.080	0.903	0.537

表-4

第1次計算

第2次計算

第3次計算

i	CAB																		
	C _{AB}	C _c	C _d	C _{AB}	C _c	C _d	C _{AB}	C _c	C _d	C _{AB}	C _c	C _d	C _{AB}	C _c	C _d	C _{AB}	C _c	C _d	
1	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299
3	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299
5	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299
7	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299
9	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299
11	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299	0.000299	-0.000299	0.000299

以上の準備計算の後、表-4の如く計算紙に $i=1, 3, 5, 7, \dots, 11$ の場合のモーメント撓角係数 B を記入する。先づ $i=1$ より始める。 $\theta_{A,1}$ を打消して辺Aを固定するに必要なモーメントは $C_{AB,1} = -0.073829 qa^2$ である。このとき辺Cは単純支持のまゝである。 $C_{AB,1}$ を作用せしめて辺Aを固定すると、 $C_{AB,1}$ によって $\theta_{C,1}$ に変化を生じる。この量はモーメント撓角係数 B を用いて $-0.073829 \times 0.101321 = -0.007480 qa^3/N$ となる。然るに4辺単純支持の場合には、 $\theta_{C,1} = 0.013078 qa^3/N$ であるから、辺Aを固定したため結局 $\theta_{C,1} = (0.013078 - 0.007480)qa^3/N = 0.006228 qa^3/N$ となる。辺Aを単純支持のように考えて、辺Cを固定するには表-2(3)を用いて、 $C_{CD,1} = -0.006228 \times 5.358552 qa^2 = -0.033373 qa^2$ のモーメントを作用しなければならない。併し、 $C_{CD,1}$ を求めるには辺Aを単純支持と仮定してあるから、 $C_{CD,1}$ によって辺Aには $\theta_{A,1} = -0.033373 \times 0.101321 = -0.003381 qa^3/N$ が生じることとなる。従つて辺Aを更に固定するためには、 $C_{AB,1} = +0.003381 \times 5.358552 = 0.018117 qa^2$ の曲げモーメントを更に加えるといわけである。従つて $C_{AB,1} = (-0.073829 + 0.018117)qa^2 = -0.055712 qa^2$ であり、 $C_{CD,1} = -0.033373 qa^2$ である。若し上の計算を辺C

から始めるとき $C_{CD,1} = -0.055\ 712\ qa^2$, $C_{AB,1} = -0.033\ 373\ qa^2$ となるわけである。故に平均をとつて $C_{AB,1} = C_{CD,1} = -0.044\ 542\ qa^2$ とする。

次に $i=3$ の場合を考える。この場合辺 A を固定するには $C_{AB,3} = -0.004\ 764\ qa^2$ が必要である。次に $\theta_{C,3}$ を求めるには上に求めた $C_{AB,1}$, $C_{AB,3}$ を考え, $C_{AB,5}$ 以下は取扱えず考えない。(この2つを考えることは(7)式に於て Σ とあることより明らかであり、又 $C_{AB,5}$ 以下考慮しないのはイテラチオン法ではよくすることである)。モーメント撓角係数 B を用いて、 $\theta_{C,3} = (-0.000\ 542 - 0.000\ 054)qa^3/N$ となり、4 辺単純支持の場合 $\theta_{C,3} = 0.000\ 253\ qa^3/N$ であるから、辺 A 固定 C 単純支持の場合 $\theta_{C,3} = -0.000\ 343\ qa^3/N$ である。従つてこの撓角を打消すためには、 $C_{CD,3} = 0.000\ 343 \times 18.823\ 959\ qa^2 = 0.006\ 457\ qa^2$ を必要とする。次に $C_{CD,1}$, $C_{CD,3} = 0.006\ 457\ qa^2$ によつて辺 A に生ずる角は、 $\theta_{A,3} = (-0.000\ 542 + 0.000\ 078)qa^3/N = -0.000\ 469\ qa^3/N$ であり、更にこの $\theta_{A,3}$ を打消すに必要なモーメントは $C_{AB,3} = 0.000\ 469 \times 18.823\ 959\ qa^2 = 0.008\ 828\ qa^2$ である。結局 $C_{AB,3} = (-0.004\ 764 + 0.008\ 828)qa^2 = 0.004\ 064\ qa^2$ であり、 $C_{CD,3} = 0.006\ 457\ qa^2$ となるが、前同様平均をとつて、 $C_{AB,3} = C_{CD,3} = 0.005\ 261\ qa^2$ と定める。

次に $i=5$ の場合を求めよう。 $C_{AB,1} = -0.044\ 542\ qa^2$, $C_{AB,3} = 0.005\ 261\ qa^2$, $C_{AB,5} = -0.001\ 032\ qa^2$ (これは表-2(2)より得られる)を用いて、表-4の如く $C_{CD,5} = 0.002\ 419\ qa^2$ となり、更に $-0.044\ 542\ qa^2$, $0.005\ 261\ qa^2$, $0.002\ 419\ qa^2$ を用いて $C_{AB,5} = 0.003\ 016\ qa^2$ となる。従つて $C_{AB,5} = (-0.001\ 032 + 0.003\ 016)qa^2 = 0.001\ 984\ qa^2$ となり、これと $0.002\ 419\ qa^2$ との平均をとつて、 $C_{AB,5} = C_{CD,5} = 0.002\ 202\ qa^2$ とする。

以下全く同様の方法で $i=7, 9, 11$ の場合を求め、第1次近似値として表-5の値を得る。

表-5 $C_{AB,i} = C_{CD,i}$ の値

i	1	3	5	7	9	11
$C_{AB,i} = C_{CD,i}$	-0.044 542	0.005 261	0.002 202	0.001 000	0.000 420	0.000 331

次に第2次近似値の計算に移る。先づ $i=1$ の場合は、上記表-5の値を用い(この場合は $i=1 \sim 11$ のすべての値を使うわけではなく理由は前に述べた通りである) $C_{CD,1} = -0.049\ 652\ qa^2$ となり、この値と $C_{CD,3} = 0.005\ 261\ qa^2$ 以下の値を用いて $C_{AB,1} = 0.026\ 578\ qa^2$ を得。従つて $C_{AB,1} = (-0.073\ 829 + 0.026\ 578)qa^2 = -0.047\ 251\ qa^2$ となる。故に $C_{AB,1} = -0.047\ 251\ qa^2$ と $C_{CD,1} = -0.049\ 652\ qa^2$ との平均をとつて $C_{AB,1} = C_{CD,1} = -0.048\ 452\ qa^2$ とする。第1次計算では $-0.055\ 712\ qa^2$ と $-0.033\ 373\ qa^2$ と大差があつたが、第2次計算では相当よく近似してくる。 $i=3$ の場合には $C_{AB,1} = -0.048\ 452\ qa^2$ と $C_{AB,3} = 0.005\ 261\ qa^2$ 以下の値を使つて $C_{CD,3} = +0.004\ 913\ qa^2$ となり、更に $C_{CD,3}$ にはこの値を、他は前と同じ値を使つて、 $C_{AB,3} = 0.009\ 751\ qa^2$ を得。従つて $(-0.004\ 764 + 0.009\ 751)qa^2 = 0.004\ 987\ qa^2$ となり、前同様平均をとつて $C_{AB,3} = C_{CD,3} = 0.004\ 950\ qa^2$ となる。

以下同様の計算を行い第2次近似値として表-6の値を得る。

表-6 $C_{AB,i} = C_{CD,i}$ の値

i	1	3	5	7	9	11
$C_{AB,i} = C_{CD,i}$	-0.048 452	0.004 950	0.002 296	0.001 071	0.000 506	0.000 401

第2次近似値に於ては $C_{AB,3} = C_{CD,3}$ 以下は計算値がよく一致している。従つて第3次計算に於ては結果に大した影響を及ぼさない $C_{AB,5} = C_{CD,5}$ 以下を省略し、表-6の如き計算を行い、表-7の如き第3次近似値を得る。

以上の如きにして4辺固定の場合の固定モーメントが求められたわけである。固定辺中点の曲げモーメントは、 $\sum_{m=1}^{m=1} C_m = -0.047\ 959 - 0.004\ 875 + 0.002\ 296 - 0.001\ 071 + 0.000\ 506 - 0.000\ 401 = -0.051\ 5\ qa^2$ となつて、S.Timoshenko の値 $-0.051\ 3\ qa^2$ に比し、相当よく一致していることを知る。而してこれらの固定モーメントの値が判ると、中心の撓み、曲げモーメント等は容易に求められる。

正方形の場合には S.Timoshenko の方法による時、方程式は(8)式の如くなり、この聯立方程式の解は比較的容易に求められるので、この場合は方程式を解く方が著者の方法より早く出来るかも知れない。併し矩形の場合は先に述べた如く方程式の解法は3段階を必要とするので、この場合はかえつて著者の方法が便利かと思われる。

表-7 $C_{AB,i} = C_{CD,i}$ の値

i	1	3
$C_{AB,i} = C_{CD,i}$	-0.047 959	0.004 875

5. 橫角法による4辺固定矩形板の逐次近似解法

四-5

図-5の如き $a/b=2$ の周辺固定矩形板に等分布荷重 q 満載の場合を解いてみよう。この場合の準備計算として

- (1) 周辺単純支持の場合の $\theta_{A,m}, \theta_{C,m}$ ($m=1, 3, \dots, 11$)
 (2) 他の相対する 2 辺を単純支持とした場合の長短辺の固定モーメント

$$C_{CD,m}, \ C_{AB,m}$$

- (3) 長辺のモーメント撓角係数-A
 (4) モーメント撓角係数 $B(a \rightarrow b)$ 及び $(b \rightarrow a)$,
 $a \rightarrow b$ は短辺に作用するモーメントの長辺の撓角
 に及ぼす係数, $b \rightarrow a$ は長辺に作用するモーメントの短辺の撓角に及ぼす係数を意味する)

表一 8

<i>m</i>	<i>H.A.M.</i>	<i>θ.c.m.</i>	<i>CABM</i>	<i>CCDM</i>	<i>MABM + m_{ABM}</i>	<i>CCDM + m_{CCDM}</i>
1	2079.975	0034.193	-0723.596	-0077.353	6.628590	0.000000
3	253	1823	4774	16128	88465.556	0.000000
5	33	261	1092	4078	89125.556	5.629185
7	9	68	376	1503	43987.797	29.983 797
9	3	25	197	768	56506.668	26.793 797
11				388	67	38.557 000

第 1 次 計 算

表—10(1)

第 2 次 計 算

	1	3	5	7	9	11
1	0003 846	0028 278	0007 278	0000 000	0002 019	0001 141
3	3 553	7205	6595	4712	3 198	2 176
5	795	2017	2592	2556	2 227	1 826
7	297	810	1162	1233	1 371	1 178
9	136	395	599	731	801	653
11	76	220	344	439	503	536
				$R^2 m^3 (0.25 + \frac{L^2}{m^2})^2$		
	1	3	5	7	9	11
24	1 0129 691	0007 105	0001 589	0000 585	0000 276	0000 152
3	57555	10 010	4 093	1 620	769	460
5	19276	13 070	5 180	2 133	1 168	688
7	8 008	9 120	3 450	2 003	1 168	1 006
9	3 339	6 355	4 050	3 663	1 601	1 006
11	2 283	3 711	3 651	2 850	1 621	1 072

表一

$$\frac{4}{\pi^2} \frac{a^2}{b^2} \frac{1}{m^2} \frac{i}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{i^2}{m^2}\right)^2} = \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{m^3} \frac{i}{\left(4 + \frac{i^2}{m^2}\right)^2}$$

これらの値はいづれも(2)及び(7)式及び表一1等より容易に計算せられるのであつて、表一8~9の通りである。これらの値は表一10の計算用紙に記入しておく。

先づ $i=1$ より始める。表一10第1次計算を参照しながら計算の方法を説明してゆくことにする。最初辺Aを固定するには $C_{AB,1}=-0.123\,090\,qb^2$ のモーメントが必要であり、これによつて辺Cには $-0.007\,353\,qb^3/N$ の撓角が生じ差引 $\theta_{C,1}=0.026\,211\,qb^3/N$ となる。従つてこの $\theta_{C,1}$ を打消すために必要な固定モーメントは、 $C_{CD,1}=-0.026\,211 \times 2.847\,147 = -0.074\,627\,qb^2$ となる。さて辺Cにこの固定モーメントを作用せしめると、辺Aには $\theta_{A,1}=-0.074\,627 \times 0.129\,631 = -0.009\,678\,qb^3/N$ の撓角を生じ、固定を破られることになる。従つて $C_{AB,1}=0.009\,678 \times 6.162\,090 = 0.059\,637\,qb^2$ が更に必要となる。故に短辺Aから固定し始めると $C_{AB,1}=(-0.123\,090+0.059\,637)\,qb^2 = -0.063\,453\,qb^2$ 及び $C_{CD,1}=-0.045\,285\,qb^2$ となる。

次に辺Cより固定を始めよう。先づ $C_{CD,1}=-0.097\,353\,qb^2$ を作用して辺Cを固定する。この固定モーメントによつて辺Aには $\theta_{A,1}=-0.129\,691 \times 0.097\,353 = -0.012\,626\,qb^3/N$ を生じ、最初より存在していた $\theta_{A,1}=0.019\,975\,qb^3/N$ をそれだけ減少して、 $\theta_{A,1}=0.007\,349\,qb^3/N$ となる。この $\theta_{A,1}$ を打消すために $C_{AB,1}=-0.007\,349 \times 6.162\,090 = -0.045\,285\,qb^2$ のモーメントを要することになる。更にこの曲げモーメントによつて $\theta_{C,1}=-0.045\,285 \times 0.064\,846 = -0.002\,987\,qb^3/N$ を生じ、更にこれを打消すために $C_{CD,1}=0.002\,937 \times 2.847\,147 = 0.008\,362\,qb^2$ のモーメントを必要とする。従つて $C_{AB,1}=-0.045\,285\,qb^2$ 、 $C_{CD,1}=(-0.097\,353+0.008\,362)\,qb^2 = -0.088\,991\,qb^2$ となる。前の計算との平均をとつて $C_{AB,1}=-0.054\,369\,qb^2$ 、 $C_{CD,1}=-0.081\,809\,qb^2$ とする。

次に $i=3$ の場合には上で求めた $C_{AB,1}$ 、 $C_{CD,1}$ と表一8にある $C_{AB,3}$ 、 $C_{CD,3}$ の値を用いて全く同様に求める。

これらの計算を $i=11$ 迄行つて得た第1次近似値は表一11のようである。

表一11 第1次近似値(単位 qb^2)

i	1	3	5	7	9	11
$C_{AB,i}$	-0.054 369	0.008 638	0.003 427	0.001 549	0.000 817	0.000 436
$C_{CD,i}$	-0.081 809	-0.002 469	0.003 180	0.002 227	0.001 314	0.000 791

第1次近似値を用いて表一10第2次計算の如き計算を行うと、次の第2次近似値が得られる。

表一12 第2次近似値(単位 qb^2)

i	1	3	5	7	9	11
$C_{AB,i}$	-0.055 028	0.006 207	0.002 469	0.001 132	0.000 647	0.000 401
$C_{CD,i}$	-0.087 060	-0.002 659	0.003 399	0.002 546	0.001 668	0.001 137

第2次近似値の計算に於ては、表一10より判る通り C_5 以下の値は相当よく一致している。従つて $i=1,3$ の場合のみ更に計算すると表一13の第3次近似値が得られる。

従つて長辺の中点に於ける曲げモーメントの値は次のように求められる。

$$\text{短辺中点 } M_A = -0.053\,081 - 0.006\,122 + 0.002\,469 - 0.001\,132 + 0.000\,647 - 0.000\,401 = -0.057\,62\,qb^2$$

$$\text{長辺中点 } M_C = -0.087\,435 + 0.003\,057 + 0.003\,399 - 0.002\,546 + 0.001\,668 - 0.001\,137 = -0.082\,99\,qb^2$$

上記の正解値は S.Timoshenko によれば $-0.057\,1\,qb^2$ 及び $-0.083\,1\,qb^2$ であるから、誤差は 1% 以下である。

表一10(2)

第3次計算

1	$C_{AB,1}$	$C_{AB,3}$	$C_{AB,5}$	$C_{AB,7}$	$C_{AB,9}$	$C_{AB,11}$	$C_{CD,1}$	$C_{CD,3}$	$C_{CD,5}$	$C_{CD,7}$	$C_{CD,9}$
	1.2697142	1.2046964	1.0535281	0.8955550	0.7395200	0.5834620	0.0093491	0.0093494	0.0093494	0.0093494	0.0093494
	3.523	6.257	8.27	10.29	12.21	14.13	16.05	17.97	18.89	19.81	20.73
	5.529	7.732	9.21	10.79	12.37	13.95	15.53	17.11	18.69	19.27	20.05
	11.05	16.47	21.67	26.87	32.07	37.27	42.47	47.67	52.87	58.07	63.27
	22.10	34.17	46.24	58.31	70.38	82.45	94.52	106.59	118.66	130.73	142.80
	44.62	66.92	89.22	111.52	133.82	156.12	178.42	200.72	223.02	245.32	267.62
	89.24	132.55	175.87	219.19	262.51	305.83	349.15	392.47	435.79	479.11	522.43
	178.48	259.85	341.23	432.61	523.99	615.37	706.75	798.13	889.51	980.89	1072.27
	356.96	534.75	712.54	890.33	1068.12	1245.91	1423.69	1601.48	1779.27	1957.05	2134.83
	713.92	1052.35	1429.74	1807.13	2184.52	2561.91	2939.30	3316.69	3694.08	4071.47	4448.85
	1427.84	2134.75	2841.65	3548.55	4255.45	4962.35	5669.25	6376.15	7083.05	7790.95	8497.85
	2855.68	4255.45	5669.25	7083.05	8497.85	10000.00	11502.85	13005.70	14508.55	16011.40	17514.25
	5711.36	8533.35	11355.34	14177.33	16999.32	20000.00	23001.99	26003.98	29005.97	32007.96	35009.95
	11422.72	16333.35	21344.98	26356.61	31368.24	36380.00	41391.73	46403.46	51415.19	56426.92	61438.65
	22845.44	32500.00	42154.64	51809.28	61453.92	71107.56	80752.20	89406.84	98050.48	106694.12	115337.76
	45690.88	65000.00	84301.28	103602.56	122903.84	142205.12	161506.40	180807.68	199108.96	218410.24	237711.52
	91381.76	130000.00	169301.28	208602.56	247903.84	287205.12	326506.40	365807.68	405108.96	444410.24	483711.52
	182763.52	260000.00	339301.28	418602.56	507903.84	597205.12	686506.40	775807.68	865108.96	954410.24	1043711.52
	365527.04	520000.00	690901.28	861502.56	1032103.84	1202705.12	1373306.40	1543907.68	1714508.96	1885110.24	2055711.52
	731054.08	1000000.00	1391801.28	1783702.56	2175603.84	2567505.12	2959406.40	3351307.68	3743208.96	4135110.24	4527111.52
	1462108.16	2000000.00	2783601.28	3475502.56	4167403.84	4859305.12	5551206.40	6243107.68	6935008.96	7626910.24	8318811.52
	2924216.32	4000000.00	5567201.28	691502.56	8262803.84	9610505.12	11058206.40	12505907.68	13953608.96	15401310.24	16849111.52
	5848432.64	8000000.00	11134401.28	1382802.56	16521603.84	19215205.12	21908806.40	24502407.68	27196008.96	298896010.24	325833011.52
	1169686.52	1600000.00	3333601.28	400002.56	4667203.84	5333505.12	6000006.40	6666307.68	7332608.96	80000010.24	86663011.52
	2339372.04	3200000.00	6667201.28	800002.56	9333503.84	1066705.12	1200006.40	13333307.68	14666608.96	16000010.24	17333311.52
	4678744.08	6400000.00	13334401.28	160002.56	18667203.84	21333505.12	2400006.40	26666607.68	29333308.96	32000010.24	34666611.52
	9357488.16	12800000.00	2666801.28	320002.56	37333503.84	4400005.12	4800006.40	53333307.68	58666608.96	64000010.24	68666611.52
	18714976.32	25600000.00	5333601.28	640002.56	6400003.84	7200005.12	7600006.40	83333307.68	88666608.96	96000010.24	10133311.52
	37429952.64	51200000.00	10667201.28	128002.56	13733503.84	1540005.12	1680006.40	18333307.68	19866608.96	20400010.24	21933311.52
	74859905.28	102400000.00	21334401.28	256002.56	27333503.84	3040005.12	3280006.40	34333307.68	36866608.96	38400010.24	40933311.52
	149719810.56	204800000.00	4266801.28	512002.56	4400003.84	4800005.12	5200006.40	56333307.68	61666608.96	64000010.24	68666611.52
	299439621.12	409600000.00	8533601.28	102402.56	9333503.84	9600005.12	1000006.40	10633307.68	11266608.96	11600010.24	12133311.52
	598879242.24	819200000.00	17067201.28	204802.56	1866705.12	1920006.40	1960006.40	20333307.68	21666608.96	22000010.24	22933311.52
	1197758484.48	1638400000.00	34134401.28	409602.56	37333503.84	3920005.12	4160006.40	43333307.68	46666608.96	48000010.24	50933311.52
	2395516968.96	3276800000.00	6826801.28	819202.56	7200003.84	7680005.12	8160006.40	85333307.68	91666608.96	96000010.24	10133311.52
	4791033937.92	6553600000.00	13653601.28	1638402.56	1440003.84	1520005.12	1600006.40	16833307.68	18166608.96	19600010.24	20133311.52
	958206787.84	13107200000.00	27307201.28	3276802.56	2880003.84	3120005.12	3360006.40	35333307.68	39166608.96	41600010.24	44133311.52
	1916414015.68	26214400000.00	54614401.28	6553602.56	5760003.84	6120005.12	6480006.40	68333307.68	73166608.96	78000010.24	82933311.52
	3832828031.36	52428800000.00	10922881.28	13107202.56	11520003.84	12960005.12	1440006.40	15833307.68	18666608.96	20100010.24	22093311.52
	7665656062.72	104857600000.00	21845761.28	26214402.56	23040003.84	25920005.12	2840006.40	31833307.68	37333308.96	41600010.24	45593311.52
	1533131215.44	209715200000.00	43691521.28	52428802.56	46080003.84	50880005.12	5568006.40	61233307.68	68666608.96	76000010.24	82933311.52
	3066262430.88	419430400000.00	87383041.28	10485762.56	92160003.84	10608005.12	1208006.40	135633307.68	15166608.96	16800010.24	18793311.52
	6132524861.76	838860800000.00	174766081.28	20971522.56	18432003.84	2080005.12	2328006.40	25763307.68	29533308.96	32200010.24	35193311.52
	1226504973.52	1677721600000.00	349532161.28	41943042.56	36864003.84	4168005.12	4552006.40	49043307.68	53866608.96	58400010.24	63393311.52
	2453009947.04	3355443200000.00	699064321.28	83886082.56	73728003.84	8840005.12	9228006.40	96833307.68	10366608.96	110400010.24	11733311.52
	4906019894.08	6710886400000.00	1398128641.28	167772162.56	147456003.84	1622005.12	17608006.40	180833307.68	19766608.96	204400010.24	21133311.52
	981203778.16	13421772800000.00	2796257281.28	335544322.56	314912003.84	33968005.12	36356006.40	37833307.68	41666608.96	43320010.24	45213311.52
	1962407556.32	26843545600000.00	5592514561.28	671088642.56	629792003.84	65456005.12	68834006.40	70313307.68	74166608.96	75840010.24	77733311.52
	3924815112.64	53687091200000.00	11185029121.28	1342177282.56	125958003.84	130436005.12	134814006.40	139633307.68	14746608.96	15440010.24	16333311.52
	7849630225.28	107374182400000.00	22370058241.28	2684354562.56	251916003.84	256494005.12	260872006.40	265633307.68	27346608.96	28040010.24	28933311.52
	1569926045.12	314747964800000.00	44740116481.28	671088642.56	629792003.84	65456005.12	68834006.40	70313307.68	74166608.96	75840010.24	77733311.52
	3139852090.24										

結 言

以上著者の誘導した平板に関する撓角法公式の応用例として、4辺固定矩形板の場合の計算法を述べたのであって、ラーメン及び連続梁の解法に於けるモーメント分配法及び撓角分配法等を、平板の解法に拡張した新らしい試みである。すなわち多元聯立1次方程式を解かずに、機械的計算によつて所要の値を求め得る。特に矩形板の場合は、方程式を解くのに比較して便利である。

本法は部材に於ける固定モーメントの觀念を平板に持ち込んだ点に特色があり、S.Timoshenko の解法を更に物理的意味を明確ならしめる上に役立つものと思われる。

なおこの方法は3辺固定1辺単純支持、相隣する2辺固定他の相隣する2辺単純支持の場合にも応用し得る。この場合はラーメン学に於ける C_{AB} と H_{AB} との関係の如く、平板に於いても C_{AB} を H_{AB} に変えるとよい。

更にマルクス (Marcus) の試みた多列板の解法も本法を応用すると非常に容易になると思われ、目下計算を試みていることを附言しておきたい。

UDC 532.517.2;532.543

薄層流に関する研究(第1報)*

正員 工学博士	石原藤次郎**
准員	岩垣雄一***
准員	合田健****

STUDIES ON THE THIN SHEET FLOW (Ist. Report)

*Dr. Eng., Tōjiro Ishihara, C.E., Member, Yuichi Iwagaki, B.Sc., Assoc.
Member & Takeshi Gōda, C.E., Assoc. Member*

Synopsis In this paper, as the Ist. report of the studies on the thin sheet flow, the experimental results obtained by the wooden experimental flume, rectangular section of 40 cm width and 19 cm depth, with smooth surface are described.

By this detailed experiment, the process of change of velocity distribution in transition from laminar flow to turbulent flow and the relation between Chézy constant, coefficient of frictional resistance and Reynolds' number are made clear, and the transition region is also determined. Moreover, the mean velocity formula in case of gentle slope is obtained.

要旨 本文は檜板で作られた滑面の木製水槽を用いて薄層流について実験した結果をとりまとめたものであつて、層流から乱流に遷移するときの流速分布の変化のしかた、Chézy constant 及び摩擦抵抗係数と Reynolds 数との関係、遷移領域の決定などについて詳しく論ずるとともに、緩勾配の場合の平均流速実験式を求めてい る。これらの成果は降水に伴う排水及び土壤浸蝕の問題や波浪に伴う海岸浸蝕の問題などを解明する基礎研究として注目されるのみでなく、流動する液体薄層を取扱う他の部門にも応用されうるものである。

1. 概 説

薄層流とは一般に水深の小さい即ち薄い Sheet flow を意味し、特に Laminar flow のみをいうのではない。詳しくいえば、水深の小さい流れは水深の増大とともに層流から遷移領域を経て完全乱流に変化していくのであるが、このあたりの流れを総称して薄層流というのである。

この研究は路面及び飛行場、あるいは傾斜面など水路ではなく主として所謂「面」を対象とし、特に降雨などによつて起るその面上の流れが最もよい実例であるが、舗装されていない路面とか山腹、あるいは堤防の傾斜面(斜面)である場合は地表流出及び滲透の外に土壤浸蝕が伴い、汀であれば波によつて打ち上げられる海水により

* 昭 24.10.15 関西工学連合講演会応用力学部門にて講演, ** 京都大学教授, *** 同助教授, **** 同講師