UDC 624.072.221 : 624.041.65

単純梁の撓み曲線の応用について

正　員　工学博士　喜　内　　敏*

AN APPLICATION OF THE DEFLECTION CURVES OF SIMPLE BEAMS

Dr. Eng., Bin Kinai, C. E., Member

Synopsis　Availing the nature of the deflection curves of simple beams, this paper describes the sum of certain series, and explains that the sum and the deflection curves have a connection in physical meaning between the two.

要旨　単梁の撓み曲線の性質を利用して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}\quad 及び\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s-1}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}$$

なる型の級数の和を求め，これらの級数の和と梁の撓みとの物理的意味の関連性を説明した。

(I) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}$ 及び $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s-1}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}$

の型の級数の和について

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^s}$ 及び $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^s}$ の型の和の公式に関して，積分方程式の核の展開の関係より求めたるもの[1]，ある函数を Fourier 級数に展開する場合の特殊の例として示してあるもの[2]，又 Bernoulli の数[3] を用いて求めたもの等が見られる。又この特殊の型として Riemann の ζ 函数[4] へも適用が考えられる。こゝに示した $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}$ 及び $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s-1}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}$，$(s=1, 2, 3, \cdots\cdots)$，はある条件を満足する任意函数 f_c を含むことにおいてより一般的であると思われる。

両端自由支持の均一断面の梁が分布荷重を受けるとき梁の撓み曲線 (A_x) は次のように示される[5]。

$$A_x=\frac{2l^3}{\pi^4 EJ}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l p_0 f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}\cdots\cdots(1)$$

こゝに，$p_0 f_c$：荷重の分布強度，l：梁のスパン，E：梁のヤング率，J：梁の慣性2次モーメント

今

$$\int_0^l p_0 f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc=\Omega_{(n)}\cdots\cdots(2)$$

とおけば，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_{(n)}\frac{1}{n^4}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=A_x\frac{\pi^4 EJ}{2l^3}\cdots\cdots(3)$$

故に $\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_{(n)}\frac{1}{n^4}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ の型の級数の和に関する1手段を得たわけである。即ち $\Omega_{(n)}$ が先ず与えられると(2)式より $p_0 f_c$ を決定し，$p_0 f_c$ を梁の荷重強度の曲線として，材料力学関係の撓みに関する公式を用いるか，又は Mohr の撓みに関する定理を用いて計算又は図式的に撓み曲線 A_x を決定し，(3)式に代入すればよい。

この場合 $\Omega_{(n)}$ より f_c を求めるには積分方程式(2)式を解く必要が生ずるが，この積分方程式は周知の如く Fredholm の第1種積分方程式で，解法としては普通の方法の外に龜田氏の方法又は数値積分等を用いる事も考えられる。

こゝでは積分方程式を解かずに，f_c が与えられた場合について Mohr の撓みに関する定理を用いて級数の和の公式を求める方法について説明する。Mohr の撓みに関する定理では，ある荷重分布強度が与えられるとこれによる曲ゲモーメント図を求め，再びこの曲ゲモーメント図の $\frac{1}{EJ}$ 倍を荷重分布強度と考えて曲ゲモーメント図を作ると，この時の撓みを得るわけである。かくして(1)式に対する基本の関係式を得べく，両辺につい

* 金沢大学教授，工学部土木教室

て x に関して積分，微分のゆるされる時にはそれよりそれぞれ拡張される。即ちある分布強度の曲ゲモーメント図の $\frac{1}{EJ}$ 倍を荷重分布強度と考えて剪断力図を作ると，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l p_0 f_c \sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}$ の和を求めることができる。

なお同一断面の両端自由支持の梁では梁の左端を原点とすると Sine 級数に展開できたのであるが，境界条件が異ると固有函数も異り，従つて展開の函数も異つてくる。故にこれと同様の考えのもとに別の方法で撓みを求めることができれば，この函数の和の公式が得られるはずである。

同様にして2重級数の場合へも拡張でき，周辺自由支持の矩形版は原点を隅の所にとれば Sine の2重級数で展開できるから，撓みを別の方法により算出して Sine の2重級数の和の公式を求めることができ，又境界条件を変化して他の形式の2重級数の和の公式を求めることも可能である。

なお $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}$ 及び $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}$ の収斂について吟味すると次のようである。即ち Riemann-Lebesgue の定理[6]により，若しルベーグ積分 $\int_a^b f(x)dx$ が存在すれば，$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\lambda x\,dx=0$ である。又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^s}(s>1)$ 及び $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^s}(s>1)$ は全変域にて一様収斂[7]である。故に Dirichlet's test for convergence[8] により原式は収斂である。

又区間 $(0, l)$ にてこの函数列 $\{f_n(x)\}$ の各項 $f_n(x)$ が微分可能であつて $\{f_n'(x)\}$ が一様収斂であるときは，微分して[9]他の公式を求めることができる。

(II) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}$ の型の級数の和

(3)式より Mohr の撓みに関する定理を用いて，一般式を積分式によつて示すと次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2s}\Bigg[\int_0^l f_c(l-c)dc\cdot x\left\{a_s l^{2s-2}-\frac{a_{s-1}}{3!}l^{2s-4}x^2+\frac{a_{s-2}}{5!}l^{2s-6}x^4\right.\\
&\left.+\cdots\cdots+(-1)^s a_2\frac{l^2x^{2s-4}}{(2s-3)!}+(-1)^{s+1}a_1\frac{x^{2s-2}}{(2s-1)!}\right\}-\int_0^l dx\int_0^x f_c(x-c)(l-x)\,dc\cdot x\left\{a_{s-1}\,l^{2s-4}-\frac{a_{s-2}}{3!}l^{2s-6}\,x^2\right.\\
&\left.+\frac{a_{s-3}}{5!}l^{2s-8}x^4+\cdots\cdots+(-1)^{s+1}a_2\frac{l^2x^{2s-6}}{(2s-5)!}+(-1)^s a_1\frac{x^{2s-4}}{(2s-3)!}\right\}+\int_0^l dx\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}f_c(x_1-c)(x-x_1)\\
&\times(l-x)\,dc\cdot x\left\{a_{s-2}l^{2s-6}-\frac{a_{s-3}}{3!}l^{2s-8}x^2+\cdots\cdots+(-1)^s a_2\frac{l^2x^{2s-8}}{(2s-7)!}+(-1)^{s+1}a_1\frac{x^{2s-6}}{(2s-5)!}\right\}\\
&-\int_0^l dx\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\int_0^{x_2}f_c(x_2-c)(x_1-x_2)(x-x_1)(l-x)\,dc\cdot x\left\{a_{s-3}l^{2s-8}-\frac{a_{s-4}}{3!}l^{2s-10}x^2+\cdots\cdots\right.\\
&\left.+(-1)^{s+1}a_2\frac{l^2x^{2s-10}}{(2s-9)!}+(-1)^s a_1\frac{x^{2s-8}}{(2s-7)!}\right\}+\cdots\cdots+(-1)^s\int_0^l dx\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\int_0^{x_2}dx_3\int_0^{x_3}\cdots\cdots\\
&\cdots\int_0^{x_{s-5}}f_c(x_{s-5}-c)(x_{s-6}-x_{s-5})(x_{s-7}-x_{s-6})\cdots\cdots(x_1-x_2)(x-x_1)(l-x)\,dc\cdot x\left(a_4l^6-\frac{a_3}{3!}l^4x^2+\frac{a_2}{5!}l^2x^4\right.\\
&\left.-\frac{x^6}{7!}\right)+(-1)^{s+1}\int_0^l dx_1\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\int_0^{x_2}dx_3\cdots\cdots\int_0^{x_{s-4}}f_c(x_{s-4}-c)(x_{s-5}-x_{s-4})(x_{s-6}-x_{s-5})\cdots\cdots\\
&\cdots(x_1-x_2)(x-x_1)(l-x)\,dc\cdot x\left\{a_3l^4-\frac{a_2}{3!}l^2x^2+\frac{a_1}{5!}x^4\right\}+(-1)^s\int_0^l dx\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\int_0^{x_2}dx_3\cdots\cdots\int_0^{x_{s-3}}f_c\\
&\times(x_{s-3}-c)(x_{s-4}-x_{s-3})(x_{s-5}-x_{s-4})\cdots\cdots(x_1-x_2)(x-x_1)(l-x)\,dc\cdot x\left(a_2l^2-\frac{a_1}{3!}x^2\right)\\
&+(-1)^{s+1}\int_0^l dx\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\int_0^{x_2}dx_3\cdots\cdots\int_0^{x_{s-2}}f_c(x_{s-2}-c)(x_{s-3}-x_{s-2})(x_{s-4}-x_{s-3})\cdots\cdots(x_1-x_2)\\
&\times(x-x_1)(l-x)\,dc\cdot xa_1+(-1)^s\,l\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\int_0^{x_2}dx_3\cdots\cdots\int_0^{x_{s-1}}f_c(x_{s-1}-c)(x_{s-2}-x_{s-1})\\
&\times(x_{s-3}-x_{s-2})\cdots\cdots(x_1-x_2)(x-x_1)\,dc\Bigg]\quad\cdots\cdots(4)
\end{aligned}$$

こゝに係数 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_s$ は次の値を示す。

$$a_1=1,\ a_2=\frac{a_1}{3!}=\frac{1}{3!},\ a_3=\frac{a_2}{3!}-\frac{a_1}{5!}=\frac{7}{360},\ a_4=\frac{a_3}{3!}-\frac{a_2}{5!}+\frac{a_1}{7!}=\frac{31}{15120},$$

$$a_5=\frac{a_4}{3!}-\frac{a_3}{5!}+\frac{a_2}{7!}-\frac{a_1}{9!}=\frac{127}{604\,800},\quad\cdots\cdots,$$

$$\left.\begin{aligned} a_{s-1}&=\left\{\frac{a_{s-2}}{3!}-\frac{a_{s-3}}{5!}+\frac{a_{s-4}}{7!}+\cdots\cdots+(-1)^s\frac{a_2}{(2s-5)!}+(-1)^{s+1}\frac{a_1}{(2s-3)!}\right\}\\ a_s&=\left\{\frac{a_{s-1}}{3!}-\frac{a_{s-2}}{5!}+\frac{a_{s-3}}{7!}+\cdots\cdots+(-1)^{s+1}\frac{a_2}{(2s-3)!}+(-1)^s\frac{a_1}{(2s-1)!}\right\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

(4) 式は多重複積分を含んでいるので，これを簡単にするため Dirichlet 変換[10]を用いて書き換え夫々の場合を示すと，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\left\{x\int_0^l f_c(l-c)dc-l\int_0^x f_c(x-c)dc\right\}\cdots\cdots(6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left\{\frac{x}{6}(l^2-x^2)\int_0^l f_c(l-c)\,dc-\frac{x}{3!}\int_0^l f_c(l-c)^3dc\right.$$
$$\left.+\frac{l}{3!}\int_0^x f_c(x-c)^3dc\right\}\cdots\cdots(7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^6\left\{x\left(\frac{7}{360}l^4-\frac{l^2x^2}{36}+\frac{x^4}{120}\right)\int_0^l f_c(l-c)dc\right.$$
$$\left.-\frac{x}{6}(l^2-x^2)\frac{1}{3!}\int_0^l f_c(l-c)^3dc+\frac{x}{5!}\int_0^l f_c(l-c)^5dc-\frac{l}{5!}\int_0^x f_c(x-c)^5dc\right\}\cdots\cdots(8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^8\left\{x\left(\frac{31}{15\,120}l^6-\frac{7}{2\,160}l^4x^2+\frac{l^2x^4}{720}-\frac{x^6}{5\,040}\right)\right.$$
$$\times\int_0^l f_c(l-c)\,dc-x\left(\frac{7}{360}l^4-\frac{l^2x^2}{36}+\frac{x^4}{120}\right)\frac{1}{3!}\int_0^l f_c(l-c)^3dc+\frac{x}{6}(l^2-x^2)\frac{1}{5!}\int_0^l f_c(l-c)^5dc$$
$$\left.-\frac{x}{7!}\int_0^l f_c(l-c)^7dc+\frac{l}{7!}\int_0^x f_c(x-c)^7dc\right\}\cdots\cdots(9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^{10}\left\{x\left(\frac{127}{604\,800}l^8-\frac{31}{90\,720}l^6x^2+\frac{7}{43\,200}l^4x^2\right.\right.$$
$$\left.-\frac{l^2x^6}{30\,240}+\frac{x^8}{362\,880}\right)\int_0^l f_c(l-c)dc-x\left(\frac{31}{15\,120}l^6-\frac{7}{2\,160}l^4x^2+\frac{l^2x^4}{720}-\frac{x^6}{5\,040}\right)\frac{1}{3!}\int_0^l f_c(l-c)^3dc$$
$$+x\left(\frac{7}{360}l^4-\frac{l^2x^2}{36}+\frac{x^4}{120}\right)\frac{1}{5!}\int_0^l f_c(l-c)^5dc-\frac{x}{6}(l^2-x^2)\frac{1}{7!}\int_0^l f_c(l-c)^7dc+\frac{x}{9!}\int_0^l f_c(l-c)^9dc$$
$$\left.-\frac{l}{9!}\int_0^x f_c(x-c)^9dc\right\}\cdots\cdots(10)$$

一般式は次のようになる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2s}\left[\int_0^l f_c(l-c)\,dc\cdot x\left\{a_sl^{2s-2}-\frac{a_{s-1}}{3!}l^{2s-4}x^2\right.\right.$$
$$\left.+\frac{a_{s-2}}{5!}l^{2s-6}x^4+\cdots\cdots+(-1)^sa_2\frac{l^2x^{2s-4}}{(2s-3)!}+(-1)^{s+1}a_1\frac{x^{2s-2}}{(2s-1)!}\right\}-\frac{1}{3!}\int_0^l f_c(l-c)^3dc$$
$$\times x\left\{a_{s-1}l^{2s-4}-\frac{a_{s-2}}{3!}l^{2s-6}x^2+\frac{a_{s-3}}{5!}l^{2s-8}x^4+\cdots\cdots+(-1)^{s+1}a_2\frac{l^2x^{2s-6}}{(2s-5)!}+(-1)^sa_1\frac{x^{2s-4}}{(2s-3)!}\right\}$$
$$+\frac{1}{5!}\int_0^l f_c(l-c)^5dc\cdot x\left\{a_{s-2}l^{2s-6}-\frac{a_{s-3}}{3!}l^{2s-8}x^2+\cdots\cdots+(-1)^sa_2\frac{l^2x^{2s-8}}{(2s-7)!}+(-1)^{s+1}a_1\frac{x^{2s-6}}{(2s-5)!}\right\}$$
$$-\frac{1}{7!}\int_0^l f_c(l-c)^7dc\cdot x\left\{a_{s-3}l^{2s-8}-\frac{a_{s-4}}{3!}l^{2s-10}x^2+\cdots\cdots+(-1)^{s+1}a_2\frac{l^2x^{2s-10}}{(2s-9)!}+(-1)^sa_1\frac{x^{2s-8}}{(2s-7)!}\right\}$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^s\frac{1}{(2s-7)!}\int_0^l f_c(l-c)^{2s-7}dc\cdot x\left\{a_4l^6-\frac{a_3}{3!}l^4x^2+\frac{a_2}{5!}l^2x^4-\frac{a_1}{7!}x^6\right\}+(-1)^{s+1}\frac{1}{(2s-5)!}$$
$$\times\int_0^l f_c(l-c)^{2s-5}dc\cdot x\left(a_3l^4-\frac{a_2}{3!}l^2x^2+\frac{a_1}{5!}x^4\right)+(-1)^s\frac{1}{(2s-3)!}\int_0^l f_c(l-c)^{2s-3}dc\cdot x\left(a_2l^2-\frac{a_1}{3!}x^2\right)$$
$$\left.+(-1)^{s+1}\frac{1}{(2s-1)!}\int_0^l f_c(l-c)^{2s-1}dc\cdot xa_1+(-1)^s\frac{l}{(2s-1)!}\int_0^x f_c(x-c)^{2s-1}dc\right]\cdots\cdots(11)$$

(III) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s-1}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}$ の型の級数の和

前と同様に Mohr の撓みに関する定理を用いて公式を誘導し，かつ Dirichlet 変換を施して簡単にして公式を示すと夫々次のようになる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c(l-c)\,dc-l\int_0^x f_c\,dc\right\}\cdots\cdots(12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^3\left\{\left(\frac{l^2}{6}-\frac{x^2}{2}\right)\int_0^l f_c\,(l-c)\,dc-\frac{1}{3!}\int_0^l f_c(l-c)^3dc\right.$$
$$\left.+\frac{l}{2!}\int_0^x f_c\,(x-c)^2\,dc\right\}\cdots\cdots(13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^5\left\{\left(\frac{7}{360}l^4-\frac{l^2x^2}{12}+\frac{x^4}{24}\right)\int_0^l f_c(l-c)\,dc\right.$$
$$\left.-\left(\frac{l^2}{6}-\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{3!}\int_0^l f_c\,(l-c)^3\,dc+\frac{1}{5!}\int_0^l f_c\,(l-c)^5\,dc-\frac{l}{4!}\int_0^x fc\,(l-c)^4\,dc\right\}\cdots\cdots(14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^7\left\{\frac{31}{15\,120}l^6-\frac{7}{720}x^2l^4+\frac{l^2x^4}{144}-\frac{x^6}{720}\right)$$
$$\times\int_0^l f_c\,(l-c)\,dc-\frac{7}{360}l^4-\frac{x^2l^2}{12}+\frac{x^4}{24}\Big)\frac{1}{3!}\int_0^l f_c\,(l-c)^3\,dc+\left(\frac{l^2}{6}-\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{5!}\int_0^l f_c(l-c)^5\,dc$$
$$-\frac{1}{7!}\int_0^l f_c\,(l-c)^7\,dc+\frac{l}{6!}\int_0^x f_c\,(l-c)^6\,dc\Big\}\cdots\cdots(15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^9\left\{\left(\frac{127}{604\,800}l^8-\frac{31}{30\,240}l^6x^2+\frac{7}{14\,400}l^2x^2-\frac{l^2x^6}{4\,320}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{x^8}{40\,320}\right)\int_0^l f_c(l-c)dc-\left(\frac{31}{15\,120}l^6-\frac{7}{720}l^4x^2+\frac{l^2x^4}{144}-\frac{x^6}{720}\right)\frac{1}{3!}\int_0^l f_c(l-c)^3dc+\left(\frac{7}{360}l^4-\frac{x^2l^2}{12}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{x^4}{24}\right)\frac{1}{5!}\int_0^l f_c\,(l-c)^5\,dc-\left(\frac{l^2}{6}-\frac{x^2}{2}\right)\frac{1}{7!}\int_0^l f_c\,(l-c)^7\,dc+\frac{1}{9!}\int_0^l f_c(l-c)^9dc-\frac{l}{8!}\int_0^x f_c(l-c)^8\,dc\right\}$$
$$\cdots\cdots(16)$$

一般式は次のようになる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s-1}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l f_c\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2s-1}\left[\int_0^l f_c\,(l-c)\,dc\left\{a_sl^{2s-2}-\frac{a_{s-1}}{2!}l^{2s-4}x^2\right.\right.$$
$$\left.+\frac{a_{s-2}}{4!}l^{2s-6}x^4+\cdots\cdots+(-1)^s a_2\frac{l^2x^{2s-4}}{(2s-4)!}+(-1)^{s+1}a_1\frac{x^{2s-2}}{(2s-2)!}\right\}-\frac{1}{3!}\int_0^l f_c\,(l-c)^3\,dc\left\{a_{s-1}l^{2s-4}\right.$$
$$\left.-\frac{a_{s-2}}{2!}l^{2s-6}x^2+\frac{a_{s-3}}{4!}l^{2s-8}x^4+\cdots\cdots+(-1)^{s+1}a_2\frac{l^2x^{2s-6}}{(2s-6)!}+(-1)^s a_1\frac{x^{2s-4}}{(2s-4)!}\right\}+\frac{1}{5!}\int_0^l f_c(l-c)^5\,dc$$
$$\times\left\{a_{s-2}l^{2s-6}-\frac{a_{s-3}}{2!}l^{2s-8}x^2+\frac{a_{s-4}}{4!}{}^{2s-10}x^4+\cdots\cdots+(-1)^s a_2\frac{l^2x^{2s-8}}{(2s-8)!}+(-1)^{s+1}a_1\frac{x^{2s-6}}{(2s-6)!}\right\}$$
$$-\frac{1}{7!}\int_0^l f_c(l-c)^7\,dc\left\{a_{s-3}l^{2s-8}-\frac{a_{s-4}}{2!}l^{2s-10}x^2+\frac{a_{s-5}}{4!}l^{2s-12}x^4-\cdots\cdots+(-1)^{s+1}a^2\frac{l^2x^{2s-10}}{(2s-10)!}\right.$$
$$\left.+(-1)^s a_1\frac{x^{2s-8}}{(2s-8)!}\right\}+\cdots\cdots+(-1)^s\frac{1}{(2s-7)!}\int_0^l f_c(l-c)^{2s-7}dc\left(a_4l^6-\frac{a_3}{2!}l^4x^2+\frac{a_2}{4!}l^2x^4-\frac{a_1}{7!}x^6\right)$$
$$+(-1)^{s+1}\frac{1}{(2s-5)!}\int_0^l f_c\,(l-c)^{2s-5}dc\left(a_3l^4-\frac{a_2}{2!}l^2x^2+\frac{a_1}{4!}x^4\right)+(-1)^s\frac{1}{(2s-3)!}\int_0^l f_c(l-c)^{2s-3}\,dc\left(a_2l^2\right.$$
$$\left.\left.-\frac{a_1}{2!}x^2\right)+(-1)^{s+1}\frac{1}{(2s-1)!}\int_0^l f_c(l-c)^{2s-1}\,dc\cdot a_1+(-1)^s\frac{l}{(2s-2)!}\int_0^x f_c\,(x-c)^{2s-2}\,dc\right]\cdots\cdots(17)$$

(IV) $\displaystyle\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^{2s+1}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ の型の級数の和

この型は(II)にて示した公式で $f_c=1$ とおけば求められる。

$$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{\pi^3}{8}\left(\frac{x}{l}\right)\left(1-\frac{x}{l}\right)\cdots\cdots(18)$$

$$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{\pi^5}{96}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)-2\left(\frac{x}{l}\right)^3+\left(\frac{x}{l}\right)^4\right\}\cdots\cdots(19)$$

$$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^7}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{\pi^7}{2\,880}\left\{3\left(\frac{x}{l}\right)-5\left(\frac{x}{l}\right)^3+3\left(\frac{x}{l}\right)^5-\left(\frac{x}{l}\right)^6\right.\cdots\cdots(20)$$

$$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^9}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{\pi^9}{483\,840}\left\{51\left(\frac{x}{l}\right)-84\left(\frac{x}{l}\right)^3+42\left(\frac{x}{l}\right)^5-12\left(\frac{x}{l}\right)^7+3\left(\frac{x}{l}\right)^8\right\}\cdots\cdots(21)$$

一般式は次の如くなる。

$$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^{2s+1}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2s+1}\Bigg[xl^{2s}\left\{\frac{a_s}{2!}-\frac{a_{s-1}}{4!}+\frac{a_{s-2}}{6!}-\frac{a_{s-3}}{8!}+\cdots\cdots+(-1)^s\frac{a_1}{(2s-6)!}\right.$$

$$\left.+(-1)^{s+1}\frac{a_3}{(2s-4)!}+(-1)^s\frac{a_2}{(2s-2)!}+(-1)^{s+1}\frac{a_1}{(2s)!}\right\}-x^3l^{2s-2}\frac{1}{3!}\left\{\frac{a_{s-1}}{2!}-\frac{a_{s-2}}{4!}+\frac{a_{s-3}}{6!}\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+(-1)^{s+1}\frac{a_3}{(2s-6)!}+(-1)^{s+1}\frac{a_2}{(2s-4)!}+(-1)^s\frac{a_1}{(2s-2)!}\right\}+x^5l^{2s-4}\frac{1}{5!}\left\{\frac{a_{s-2}}{2!}\right.$$

$$\left.-\frac{a_{s-3}}{4!}+\frac{a_{s-4}}{6!}+\cdots\cdots+(-1)^{s+1}\frac{a_3}{(2s-8)!}+(-1)^s\frac{a_2}{(2s-6)!}+(-1)^{s+1}\frac{a_1}{(2s-4)!}\right\}+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{s+1}x^{2s-5}l^6\frac{1}{(2s-5)!}\left(\frac{a_3}{2!}-\frac{a_2}{4!}+\frac{a_1}{6!}\right)+(-1)^sx^{2s-3}l^4\frac{1}{(2s-3)!}\left(\frac{a_2}{2!}-\frac{a_1}{4!}\right)$$

$$+(-1)^{s+1}x^{2s-1}l^2\frac{1}{(2s-1)!}\frac{a_1}{2}+(-1)^sx^{2s}\frac{l}{(2s)!}\Bigg]\cdots\cdots(22)$$

(V) $\displaystyle\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ の型の級数の和

この型は(III)にて示した公式で $f_c=1$ とおけば求められる。

$$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{\pi^2}{8}\left(1-2\frac{x}{l}\right)\cdots\cdots(23)$$

$$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{\pi^4}{96}\left\{1-6\left(\frac{x}{l}\right)^2+4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}\cdots\cdots(24)$$

$$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^6}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{\pi^6}{960}\left\{1-5\left(\frac{x}{l}\right)^2+5\left(\frac{x}{l}\right)^4-2\left(\frac{x}{l}\right)^5\right\}\cdots\cdots(25)$$

$$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^8}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{\pi^8}{161\,280}\left\{17-84\left(\frac{x}{l}\right)^2+70\left(\frac{x}{l}\right)^4-28\left(\frac{x}{l}\right)^6+8\left(\frac{x}{l}\right)^7\right\}\cdots\cdots(26)$$

一般式は次の如くなる。

$$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2s}\Bigg[l^{2s}\left\{\frac{a_s}{2!}-\frac{a_{s-1}}{4!}+\frac{a_{s-2}}{6!}-\frac{a_{s-3}}{8!}+\cdots\cdots+(-1)^s\frac{a_1}{(2s-6)!}\right.$$

$$\left.+(-1)^{s+1}\frac{a_3}{(2s-4)!}+(-1)^s\frac{a_2}{(2s-2)!}+(-1)^{s+1}\frac{a_1}{(2s)!}\right\}-x^2l^{2s-2}\frac{1}{2!}\left\{\frac{a_{s-1}}{2!}-\frac{a_{s-2}}{4!}+\frac{a_{s-3}}{6!}\right.$$

$$\left.-\frac{a_{s-4}}{8!}+\cdots\cdots+(-1)^{s+1}\frac{a_3}{(2s-6)!}+(-1)^s\frac{a_2}{(2s-4)!}+(-1)^s\frac{a_1}{(2s-2)!}\right\}+x^4l^{2s-4}\frac{1}{4!}\left\{\frac{a_{s-2}}{2!}\right.$$

$$\left.-\frac{a_{s-3}}{4!}+\frac{a_{s-4}}{6!}+\cdots\cdots+(-1)^s\frac{a_3}{(2s-8)!}+(-1)^{s+1}\frac{a_2}{(2s-6)!}+(-1)^s\frac{a_1}{(2s-4)!}-\cdots\cdots\right.$$

$$+(-1)^{s+1}x^{2s-6}l^6\frac{1}{(2s-6)!}\left(\frac{a_3}{2!}-\frac{a_2}{4!}+\frac{a_1}{6!}\right)+(-1)^sx^{2s-4}l^4\frac{1}{(2s-4)!}\left(\frac{a_2}{2!}-\frac{a_1}{4!}\right)$$

$$+(-1)^{s+1}x^{2s-2}l^2\frac{1}{(2s-2)!}\frac{a_1}{2!}+(-1)^sx^{2s-1}l\frac{1}{(2s-1)!}\Bigg]\cdots\cdots(27)$$

(VI) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{2s+1}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ の型の級数の和

この型は(II)にて示した公式で $f_c=C$ とおけば求められる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=-\frac{\pi^3}{12}\left(\frac{x}{l}\right)\left\{1-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right\}\cdots\cdots(28)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^5}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{\pi^5}{720}\left(\frac{x}{l}\right)\left\{7-10\left(\frac{x}{l}\right)^2+3\left(\frac{x}{l}\right)^4\right\}\cdots\cdots(29)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^7}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=-\frac{\pi^7}{30\,240}\left(\frac{x}{l}\right)\left\{31-49\left(\frac{x}{l}\right)^2+21\left(\frac{x}{l}\right)^4-3\left(\frac{x}{l}\right)^6\right\}\cdots\cdots(30)$$

一般式は次の如くなる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{2s+1}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=(-1)^s\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2s+1}\Bigg[xl^{2s}\left\{\frac{a_s}{3!}-\frac{a_{s-1}}{5!}+\frac{a_{s-2}}{7!}+\cdots\cdots+(-1)^s\frac{a_2}{(2s-1)!}\right.$$

$$\left.+(-1)^{s+1}\frac{a_1}{(2s+1)!}\right\}-\frac{x^3}{3!}l^{2s-2}\left\{\frac{a_{s-1}}{3!}-\frac{a_{s-2}}{5!}+\frac{a_{s-3}}{7!}-\cdots\cdots+(-1)^s\frac{a_1}{(2s-1)!}\right\}+\frac{x^5}{5!}l^{2s-4}\left\{\frac{a_{s-2}}{3!}\right.$$

$$\left.-\frac{a_{s-3}}{5!}+\frac{a_{s-5}}{7!}-\cdots\cdots+(-1)^{s+1}\frac{a_1}{(2s-3)!}\right\}+\cdots\cdots+(-1)^s\frac{x^{2s-3}}{(2s-3)!}l^4\left(\frac{a_2}{3!}+\frac{a_1}{5!}\right)$$

$$+(-1)^{s+1}\frac{x^{2s-1}}{(2s-1)!}l^2\frac{a_1}{3!}+(-1)^s\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}\Bigg] \quad\cdots\cdots(31)$$

(VII) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{2s}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ の型の級数の和

この型は (III) にて示した公式で $f_c=C$ とおけば求められる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=-\frac{\pi^2}{12}\left\{1-3\left(\frac{x}{l}\right)^2\right\} \quad\cdots\cdots(32)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=\frac{\pi^4}{720}\left\{7-30\left(\frac{x}{l}\right)^2+15\left(\frac{x}{l}\right)^4\right\} \quad\cdots\cdots(33)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^6}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=-\frac{\pi^6}{30\,240}\left\{31-147\left(\frac{x}{l}\right)^2+105\left(\frac{x}{l}\right)^4-21\left(\frac{x}{l}\right)^6\right\} \quad\cdots\cdots(34)$$

一般式は次の如くなる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{2s}}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)=(-1)^s\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2s}\Bigg[l^{2s}\left\{\frac{a_s}{3!}-\frac{a_{s-1}}{5!}+\frac{a_{s-2}}{7!}+\cdots\cdots+(-1)^s\frac{a_2}{(2s-1)!}\right.$$

$$\left.+(-1)^{s+1}\frac{a_1}{(2s+1)!}\right\}-\frac{x^2}{2!}l^{2s-2}\left\{\frac{a_{s-1}}{3!}-\frac{a_{s-2}}{5!}+\frac{a_{s-3}}{7!}-\cdots\cdots+(-1)^s\frac{a_1}{(2s-1)!}\right\}+\frac{x^4}{4!}l^{2s-4}\left\{\frac{a_{s-2}}{3!}\right.$$

$$\left.-\frac{a_{s-3}}{5!}+\frac{a_{s-4}}{7!}-\cdots\cdots+(-1)^{s+1}\frac{a_1}{(2s-3)!}\right\}-\frac{x^6}{6!}l^{2s-6}\left\{\frac{a_{s-3}}{3!}-\frac{a_{s-4}}{5!}+\frac{a_{s-5}}{7!}-\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^s\frac{a_1}{(2s-4)!}\right\}+\cdots\cdots+(-1)^s\frac{x^{2s-4}}{(2s-4)!}l^4\left(\frac{a_2}{3!}-\frac{a_1}{5!}\right)+(-1)^{s+1}\frac{x^{2s-2}}{(2s-2)!}l^2\frac{a_1}{3!}$$

$$+(-1)^s\frac{x^{2s}}{(2s+1)!}\Bigg] \quad\cdots\cdots(35)$$

(VIII) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l c^s\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}$ 及び $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l c^s\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}$ の型の級数の和

(7) 式及び (13) 式で $f_c=c^s$ とおけば次の如くなる。

表—1

S	(36) 式より		(37) 式より	
	$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^{2r+1}}\sin\frac{n\pi x}{l}$ 型	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2r+1}}\sin\frac{n\pi x}{l}$ 型	$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^{2r}}\cos\frac{n\pi x}{l}$ 型	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2r}}\cos\frac{n\pi x}{l}$ 型
0	$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\sin\frac{n\pi x}{l}$		$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cos\frac{n\pi x}{l}$	
1		$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^5}\sin\frac{n\pi x}{l}$		$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\cos\frac{n\pi x}{l}$
2	$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^7}\sin\frac{n\pi x}{l}$		$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^6}\cos\frac{n\pi x}{l}$	
3		$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^7}\sin\frac{n\pi x}{l}$		$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6}\cos\frac{n\pi x}{l}$
4	$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^9}\sin\frac{n\pi x}{l}$		$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^8}\cos\frac{n\pi x}{l}$	
5		$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^9}\sin\frac{n\pi x}{l}$		$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^8}\cos\frac{n\pi x}{l}$
6	$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^{11}}\sin\frac{n\pi x}{l}$		$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^{10}}\cos\frac{n\pi x}{l}$	
7		$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{11}}\sin\frac{n\pi x}{l}$		$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{10}}\cos\frac{n\pi x}{l}$
8	$\sum_{n=1\cdot3\cdot5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^{13}}\sin\frac{n\pi x}{l}$		$\sum_{n=1\cdot3\cdot5}^{\infty}\frac{1}{n^{12}}\cos\frac{n\pi x}{l}$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l c^s\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{\pi^4 l^{s-4}x}{2(s+1)(s+2)}\left[\frac{1}{(s+3)(s+4)}\left\{\frac{(s+1)(s+6)}{6}l^4+\frac{x^{s+3}}{l^{s-1}}\right\}-\frac{l^2x^2}{6}\right] \quad \cdots\cdots(36)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\left\{\int_0^l c^s\sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right)dc\right\}=\frac{\pi^3 l^{s-3}}{2(s+1)(s+2)}\left[\frac{1}{(s+3)(s+4)}\left\{\frac{(s+1)(s+6)}{6}l^4+\frac{(s+4)}{l^{s-1}}x^{s+3}\right\}-\frac{l^2x^2}{2}\right] \quad \cdots\cdots(37)$$

(36) 及び (37) 式にて $s=0,1,2,3,4,\cdots\cdots$ とおけば夫々次の型の級数の和を求めることができる（表—1）。

梁の荷重強度の曲線を c^s とするとき，(36) 式は梁の撓み曲線に，(37) 式は梁の撓みの傾斜角に関係する。即ち $s=0$ は等分布，$s=1$ は直線的傾斜分布，$s=2$ は2次抛物線分布等の場合であつて，夫々前に得た公式と同一の結果を得ることができる。

引　用　文　献

1) H. Schneider; "Mathematishe Schwingungslehre", 1924. s.101～104.

2) H. Burkhardt; "Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Ⅱ. A. 12. Trigonometrische Reihen und Integrale.
小平吉男; "物理数学第1巻" p. 190. 等

3) 林　桂一; "数値計算", p. 180. 189

4) 林　桂一; 前出. p. 236～238.
Whittaker and Watson; "Modern Analysis", 1920. p. 265～280.

5) 喜内　敏; "梁及び矩形版の撓み振動の理論", 土木学会論文集第5号.

6) Whittaker and Watson; p. 172.
陳建功; "三角級数論", 前出 p. 56～59. 91.

7) 岡田良知; "級数論", p. 157.

8) 岡田良知; 前出. p. 129.
Whittaker and Watson; 前出. p. 17.

9) 寺沢寛一; "数学概論" p. 160.
岡田良知; 前出. p. 153. 164～165

10) Whittaker and Watson; 前出. p. 75～77.
佐藤常三; "定積分及フーリエ級数", p. 23～24. 53～57.

昭和 26 年 8 月 10 日　印刷
昭和 26 年 8 月 15 日　発行　　土木学会論文集　第6号

発行者　東京都千代田区大手町2丁目4番地　中川一美
印刷者　東京都港区溜池町5番地　大沼正吉
印刷所　東京都港区溜池町5番地　株式会社技報堂

東京都千代田区大手町2丁目4番地　電話和田倉 (20) 3945 番
社団法人　土木学会　振替東京 16828 番

TRANSACTIONS

OF

THE JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS

NO. 6

CONTENTS

Page

Strength Standard and Shearing Strength of Dam Concrete (II)…*Dr. Eng., Tadashi Hatano*…… 1

Sliding Safety of Concrete Dams……*Dr. Eng., Tadashi Hatano*…… 6

A Method of Determination of the Critical Loads of the Continuous Rectangular Plates with Multiple Spans …… *Dr. Eng., Muneaki Kurata*……13

On the Successive Approximate Solution of a Rectangular Plate with Four Edges Clamped by the Slope Deflection Method ……*Masao Naruoka*……24

Studies on the Thin Sheet Flow (1st. Report) ……*Dr. Eng., Tojiro Ishihara, Yuichi Iwagaki & Takeshi Gota*……31

On the Excluding Efficiency of Settling Reservoir ……*Takeshi Gota*……39

On the Internal Stresses in Gravity Dam under Sedimentary Pressure ……*Yoshiji Niwa*……44

New Graphical Solution of Stress in Soil under Foundation…… *Shinichiro Matsuo*……49

On the Natural Vibration of an Aerial Cable Suspended by Two Poles (1st. Report)……*Kenichi Araki*……53

A Dynamical Consideration on Earthquake Damages of Bridge Piers ……*Dr. Eng., Ichiro Konishi & Hisao Goto*……58

An Investigation on the Welded Rail……*Isamu Kobayashi & Atsuhiro Hamaguchi*……71

New Formula for the Axial Line of the Transformed Catenary Arch (Report 1) ……*Eikichi Takeda*……77

New Formula for the Axial Line of the Transformed Catenary Arch (Report 2) ……*Eikichi Takeda*……81

Experimental Researches on Steep-Slope-Erosion ……*Shigeru Tanaka*……85

Experimental Researches on the Composite Joint of Rivet and Fillet Weld ……*Sueo Sakurai*……97

On the Lateral Strength of the Railway Track (Part 2) ……*Yutaka Sato* … 103

The Solution of Two Hinged Arch Bridge of Vierendeel Type ……*Ichiro Uchida*… 113

Fundamental Studies on the Flexural Vibration of Beams on Elastic Fundation ……*Hisao Goto*… 121

Intensity of Earthquake Affecting the Structures……*Dr. Eng., Tadashi Hatano*… 130

An Application of the Deflection Curves of Simple Beams ……*Dr. Eng., Bin Kinai*… 136

August 1951

DOBOKU-GAKKAI

JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS

NO. 4 2 CHO-ME OTE-MACHI CHIYODAKU TOKYO, JAPAN