

堆砂圧による重力堰堤の内部応力について*

准 員 丹 羽 義 次**

ON THE INTERNAL STRESSES IN GRAVITY DAM UNDER SEDIMENTARY PRESSURE

Yoshiji Niva, C.E., Assoc. Member

Synopsis Among the various forces acting on the dam, sediment, ice and wave pressure are discontinuous loads, and the effect on the stability of the structure has not been yet made clear. In order to rationalize the design of dam, the stresses in dam body due to these forces must be investigated. This paper describes the analysis by elasticity which deals the effect of these discontinuous loads on the internal stresses of straight gravity dam.

要旨 堤に作用する諸外力のうち堆砂圧、氷圧、波圧等は不連続荷重であつて、これらが堤内応力に及ぼす影響は未だ明らかにされていない。しかし堰堤を合理的に設計するためには、これらの諸外力によつて惹起される堤内応力を明確しておく必要がある。本文は直線重力堰堤の内部応力に及ぼす堆砂圧等の不連続荷重の影響を弾性学的に解析したものである。

目 次

1. 緒 言
2. 上下流面に垂直に対称圧縮荷重をうける堰堤の内部応力の算定
3. 上下流面に垂直に圧縮、引張の対称荷重をうける堰堤の内部応力の算定
4. 上下流面に同一方向の切線対称荷重をうける堰堤の内部応力の算定
5. 上下流面に異方向の切線対称荷重をうける堰堤の内部応力の算定
6. 上流面に堆砂圧をうける堰堤の内部応力の算定
7. 結 語

1. 緒 言

治水利水の総合的計画の下に積極的に河川を開発するためには、高堰堤を築造して大貯水池を建設して行かねばならない。しかるに高堰堤の設計には未解決の問題が極めて多く、合理的な設計法の確立が痛感される。特に堰堤として最も有効な最小断面を決定しその安全度を検査するためには、堤体に作用する諸外力によつて堤内に惹起される応力を正確に算定することが必要である。この意味から堰堤の内部応力に関する研究は古くから多数の権威者によつて行われ、既に直線重力堰堤の基本三角形断面に作用する重力、地震力及び満水時静水圧による堤内応力又は堤頂上の余裕水深を考えた場合の堤内応力については、弾性学的に厳密に解析せられている¹⁾。しかし河川の流水によつて運搬せられ貯水池に沈没する土砂又は貯水池が満水されていない場合の貯水等が堤内応力に及ぼす影響を明らかにしたものはないようである。著者はこれらの問題を解明するために Shepherd 氏²⁾が楔形三角形断面の境界面に作用する集中荷重による堤内応力を算出した方法を用いて、不連続荷重が基本三角形断面に作用した場合の堤内応力を応力函数を用い弾性学的に解析した。かくしてこの場合に対し採用されて来た従来の非合理的な仮定に基づく応力の算定法を改善し、一層合理的にその設計を行いうる様にすることが出来た。

2. 上下流面に垂直に対称圧縮荷重をうける堰堤の内部応力の算定

極座標 (r, θ) において、 $\phi_1 = k_1 r^{n+2} \cos(n+2)\theta$, $\phi_2 = k_2 r^{n+2} \cos n\theta$, $\phi_3 = k_3 r^{n+2} \sin(n+2)\theta$, $\phi_4 = k_4 r^{n+2} \sin n\theta$ 等の函数が基本方程式 $\nabla^4 \phi = 0$ を満足することは周知のことである。先ず図-1の如く上下流面に対称の圧縮垂直

* 昭和 24.10.15. 関西工学連合講演会（於京大）の応用力学部会にて講演

** 京都大学講師、工学部土木学教室

1) 石原藤次郎、小西一郎：“重力堰堤の応力計算に就て、土木学会誌、22 卷、3 号、昭 11.

2) W.M. Shepherd: “Stress System in an Infinite Sector”, proc. Roy. Soc. London, Vol. 148, 1935.

荷重が作用する場合から考えよう。今座標として基本三角形断面の頂点を原点に、頂角の2等分線を原線にとり、頂角を 2α とすれば応力函数 $\phi_1 = k_1 r^{n+2} \cos(n+2)\theta$ による各成分応力は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r1} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} = -k_1(n+2)(n+1)r^n \cos(n+2)\theta \\ \sigma_{\theta 1} &= \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} = k_1(n+2)(n+1)r^n \cos(n+2)\theta \\ \tau_{r\theta 1} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right) = k_1(n+2)(n+1)r^n \sin(n+2)\theta \end{aligned} \right\}$$

又応力函数 $\phi_2 = k_2 r^{n+2} \cos n\theta$ によつては、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r2} &= -k_2(n-2)(n+1)r^n \cos n\theta \\ \sigma_{\theta 2} &= k_2(n+2)(n+1)r^n \cos n\theta \\ \tau_{r\theta 2} &= k_2 n(n+1)r^n \sin n\theta \end{aligned} \right\}$$

今 $\phi = \phi_1(k_2 n \sin n\alpha) - \phi_2(k_1(n+2) \sin(n+2)\alpha)$
 $= kr^{n+2}\{n \sin n\alpha \cos(n+2)\theta - (n+2) \sin(n+2)\alpha \cos n\theta\}$, たゞし $k = k_1 \cdot k_2$ とおけば、 $\theta = \pm \alpha$ 即ち上
下流面で境界条件の1つである $\tau_{r\theta} = 0$ を満足することになるが、この ϕ によつては、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= kr^n(n+1)(n+2)\{n \sin n\alpha \cos(n+2)\theta - (n-2) \sin(n+2)\alpha \cos n\theta\} \\ \sigma_\theta &= kr^n(n+1)(n+2)\{n \sin n\alpha \cos(n+2)\theta - (n+2) \sin(n+2)\alpha \cos n\theta\} \\ \tau_{r\theta} &= kr^n n(n+1)(n+2)\{\sin n\alpha \sin(n+2)\theta - \sin(n+2)\alpha \sin n\theta\} \end{aligned} \right\}$$

こゝで $i = \sqrt{-1}$ として $n = im$, $\log r = \rho$ 即ち $r = e^\rho$ とおけば、応力函数及び各成分応力は次の様に実虚部に分けて表わすことができる。 $\phi = \phi_A + i\phi_B$, $\sigma_r = \sigma_{rA} + i\sigma_{rB}$, etc, 若干の計算を行い、

$$\left. \begin{aligned} f_1(\theta) \\ f_3(\theta) \end{aligned} \right\} = \pm m \sinh m\alpha \cos 2\theta \cosh m\theta \mp m \cos 2\alpha \sinh m\alpha \cosh m\theta - 2 \sin 2\alpha \cosh m\alpha \cosh m\theta \\ \left. \begin{aligned} f_2(\theta) \\ f_4(\theta) \end{aligned} \right\} = \pm m \sin 2\alpha \cosh m\alpha \cosh m\theta \mp m \sinh m\alpha \sin 2\theta \sinh m\theta - 2 \cos 2\alpha \sinh m\alpha \cosh m\theta \\ g_1(\theta) = m \sin 2\alpha \cosh m\alpha \sinh m\theta - m \sinh m\alpha \sin 2\theta \cosh m\theta \\ g_2(\theta) = m \cos 2\alpha \sinh m\alpha \sinh m\theta - m \sinh m\alpha \cos 2\theta \sinh m\theta \end{aligned} \right\}$$

とおけば、 $\phi_A = ke^{2\rho}\{f_3(\theta) \cos m\rho - f_4(\theta) \sin m\rho\}$, $\phi_B = ke^{2\rho}\{f_4(\theta) \cos m\rho + f_3(\theta) \sin m\rho\}$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rA} \\ \sigma_{rB} \end{aligned} \right\} = k \left[\begin{array}{l} \cos m\rho \{(2-m^2)f_1(\theta) - 3mf_2(\theta)\} \mp \sin m\rho \{3mf_1(\theta) + (2-m^2)f_2(\theta)\} \\ \sin m\rho \{(2-m^2)f_3(\theta) - 3mf_4(\theta)\} \mp \cos m\rho \{3mf_3(\theta) + (2-m^2)f_4(\theta)\} \end{array} \right] \\ \left. \begin{aligned} \sigma_{\theta A} \\ \sigma_{\theta B} \end{aligned} \right\} = k \left[\begin{array}{l} \cos m\rho \{(2-m^2)f_1(\theta) - 3mf_2(\theta)\} \mp \sin m\rho \{3mf_1(\theta) + (2-m^2)f_2(\theta)\} \\ \sin m\rho \{(2-m^2)f_3(\theta) - 3mf_4(\theta)\} \mp \cos m\rho \{3mf_3(\theta) + (2-m^2)f_4(\theta)\} \end{array} \right] \\ \left. \begin{aligned} \tau_{r\theta A} \\ \tau_{r\theta B} \end{aligned} \right\} = k \left[\begin{array}{l} \cos m\rho \{(2-m^2)g_1(\theta) - 3mg_2(\theta)\} \mp \sin m\rho \{3mg_1(\theta) + (2-m^2)g_2(\theta)\} \\ \sin m\rho \{(2-m^2)g_3(\theta) - 3mg_4(\theta)\} \mp \cos m\rho \{3mg_3(\theta) + (2-m^2)g_4(\theta)\} \end{array} \right]$$

こゝに得られた応力函数 ϕ の実部 ϕ_A 及び虚部 ϕ_B は共に境界条件を満足するものであるから応力函数、

$$\phi_m = K e^{2\rho}\{f_3(\theta) \cos m\rho - f_4(\theta) \sin m\rho\} + K' e^{2\rho}\{f_4(\theta) \cos m\rho + f_3(\theta) \sin m\rho\} \quad \dots \quad (1)$$

(たゞし K 及び K' は常数) を考えれば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rm} &= [K\{(2-m^2)f_1(\theta) - 3mf_2(\theta)\} + K'\{3mf_1(\theta) + (2-m^2)f_2(\theta)\}] \cos m\rho \\ &\quad + [K'\{(2-m^2)f_1(\theta) - 3mf_2(\theta)\} - K\{3mf_1(\theta) + (2-m^2)f_2(\theta)\}] \sin m\rho \\ &\equiv \{Kp_1(\theta) + K'p_2(\theta)\} \cos m\rho + \{K'p_1(\theta) - Kp_2(\theta)\} \sin m\rho \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta m} &= [K\{(2-m^2)f_3(\theta) - 3mf_4(\theta)\} + K'\{3mf_3(\theta) + (2-m^2)f_4(\theta)\}] \cos m\rho \\ &\quad + [K'\{(2-m^2)f_3(\theta) - 3mf_4(\theta)\} - K\{3mf_3(\theta) + (2-m^2)f_4(\theta)\}] \sin m\rho \\ &\equiv \{Kp_3(\theta) + K'p_4(\theta)\} \cos m\rho + \{K'p_3(\theta) - Kp_4(\theta)\} \sin m\rho \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

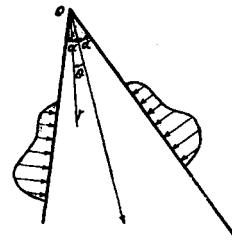
$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta m} &= [K\{(2-m^2)g_1(\theta) - 3mg_2(\theta)\} + K'\{3mg_1(\theta) + (2-m^2)g_2(\theta)\}] \cos m\rho \\ &\quad + [K'\{(2-m^2)g_1(\theta) - 3mg_2(\theta)\} - K\{3mg_1(\theta) + (2-m^2)g_2(\theta)\}] \sin m\rho \\ &\equiv \{Kq_1(\theta) + K'q_2(\theta)\} \cos m\rho + \{K'q_1(\theta) - Kq_2(\theta)\} \sin m\rho \end{aligned} \right\}$$

となり、 $\theta = \pm \alpha$ では、

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{rm})_{\theta=\pm\alpha} &= \{Kp_1(\alpha) + K'p_2(\alpha)\} \cos m\rho + \{K'p_1(\alpha) - Kp_2(\alpha)\} \sin m\rho \\ (\sigma_{\theta m})_{\theta=\pm\alpha} &= \{Kp_3(\alpha) + K'p_4(\alpha)\} \cos m\rho + \{K'p_3(\alpha) - Kp_4(\alpha)\} \sin m\rho \\ (\tau_{r\theta m})_{\theta=\pm\alpha} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

さて境界面に作用する圧縮の対称垂直荷重 $\varphi(\rho)$ は、一般に ρ の函数としてフーリエ積分、

図-1



によって表わすことができる。一方上に導いた成分応力式中の m は任意の常数であるから、これについて 0 から ∞ まで積分してもよい。故に K 及び K' を m の函数 $K(m)$, $K'(m)$ と考え、 $\theta = \pm\alpha$ なる境界面において成立する条件式より次の様にして $K(m)$, $K'(m)$ を決定することができる。

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{\theta})_{\theta=\pm\alpha} &= \int_0^{\infty} (\sigma_{\theta m})_{\theta=\pm m} dm \\
 &= \int_0^{\infty} \{K(m)p_3(\alpha) + K'(m)p_4(\alpha)\} \cos m\rho dm + \int_0^{\infty} \{K'(m)p_3(\alpha) - K(m)p_4(\alpha)\} \sin m\rho dm \\
 &= -\varphi(\rho) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos m\rho dm \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cos mt dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin m\rho dm \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \sin mt dt \\
 K(m)p_3(\alpha) + K'(m)p_4(\alpha) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cos mt dt \\
 K'(m)p_3(\alpha) - K(m)p_4(\alpha) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \sin mt dt
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

この $K(m)$, $K'(m)$ が定まれば、堤内の各応力成分は次式によつて算出することができる。

即ちこの積分を遂行することによって、図-1の如く上下流面に作用する任意の圧縮対称垂直荷重によつて惹起せられる堤内応力を求めることができる。

3. 上下流面に垂直に圧縮、引張の対称荷重をうける堰堤の内部応力の算定

図-2の如く上下流面に各々大きさ等しく方向反対の対称垂直荷重が作用する場合を考えるに、応力函数 $\phi_2 = k_0 r^{n+2} \sin(n+2)\theta$ による各成分応力は、

$$\begin{aligned}\sigma_{r3} &= -k_3(n+2)(n+1)r^n \sin(n+2)\theta \\ \sigma_{\theta 3} &= k_3(n+2)(n+1)r^n \sin(n+2)\theta \\ \tau_{r\theta 3} &= -k_3(n+2)(n+1)r^n \cos(n+2)\theta\end{aligned}$$

又応力函数 $\phi_4 = k_4 r^{n+2} \sin n\theta$ によつては、

$$\sigma_{r+4} = -k_4(n-2)(n+1)r^n \sin n\theta, \quad \sigma_{6+} = k_4(n+2)(n+1)r^n \sin n\theta, \quad \tau_{r+6+} = -k_4n(n+1)r^n \cos n\theta$$

前と同様に, $\phi' = \phi_3(k_4n \cos n\alpha) - \phi_4[k_4(n+2)\cos(n+2)\alpha]$

$$= k' r^{n+2} \{ n \cos n\alpha \sin(n+2)\theta - (n+2) \cos(n+2)\alpha \sin n\theta \}, \text{ たゞ } k' = k_4 k_1.$$

とおけば、 $\theta = \pm\alpha$ 即ち上下流面で境界条件の1つである $\tau_{x\theta} = 0$ を満足することになるが、この ϕ' によつては

$$\begin{aligned}\sigma_r' &= -k'r^n(n+1)(n+2)\{n \cos n\alpha \sin(n+2)\theta - (n-2) \cos(n+2)\alpha \sin n\theta\} \\ \sigma_\theta' &= k'r^n(n+1)(n+2)\{n \cos n\alpha \sin(n+2)\theta - (n+2) \cos(n+2)\alpha \sin n\theta\} \\ \tau_{r,\theta}' &= -k'r^n(n+1)(n+2)\{\cos n\alpha \cos(n+2)\theta - \cos(n+2)\alpha \cos n\theta\}\end{aligned}$$

ここで $n=im$, $\log r=\rho$ 即ち $r=e^\rho$ とおき、応力函数及び各成分応力を実部と虚部によつて表わすことゝし、若干の計算を行ひ、

$$\begin{aligned} f_1'(\theta) &= \pm m \cosh m\alpha \cos 2\theta \sinh m\theta \mp m \cos 2\alpha \cosh m\alpha \sinh m\theta - 2 \sin 2\alpha \sinh m\alpha \sinh m\theta \\ f_2'(\theta) &= \pm m \sin 2\alpha \sinh m\alpha \sinh m\theta \mp m \cosh m\alpha \sin 2\theta \cosh m\theta - 2 \cos 2\alpha \cosh m\alpha \sinh m\theta \\ g_1'(\theta) &= m \sin 2\alpha \sinh m\alpha \cosh m\theta - m \cosh m\alpha \sin 2\theta \sinh m\theta \\ g_2'(\theta) &= m \cos 2\alpha \cosh m\alpha \cosh m\theta - m \cosh m\alpha \cos 2\theta \cosh m\theta \end{aligned}$$

とおけば、 $\phi_A' = k'e^{2\rho} \{f_3'(\theta) \cos m\rho - f_4'(\theta) \sin m\rho\}$, $\phi_B' = k'e^{2\rho} \{f_4'(\theta) \cos m\rho + f_3'(\theta) \sin m\rho\}$

となるが、以下全く同様にして前節と同じ型の常数項 $K(m)$, $K'(m)$ が求められ、この場合の堤内応力を算定

することができる。

4. 上下流面に同一方向の切線対称荷重をうける堰堤の内部応力の算定

図-3の如く上下流面に同一方向の対称剪断荷重が作用する場合も上と同様に取扱うことができる。このときの応力函数は、

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_1(k_2 \cos n\alpha) - \phi_2[k_1 \cos(n+2)\alpha] \\ &= k r^{n+2} \{ \cos n\alpha \cos(n+2)\theta - \cos(n+2)\alpha \cos n\theta \}\end{aligned}$$

で、 $\theta = \pm \alpha$ 即ち上下流面で境界条件の1つである $\sigma_\theta = 0$ を満足することになるが、この ϕ によつては、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -kr^n(n+1)[(n+2)\cos n\alpha \cos(n+2)\theta - (n-2)\cos(n+2)\alpha \cos n\theta] \\ \sigma_\theta &= kr^n(n+1)(n+2)[\cos n\alpha \cos(n+2)\theta - \cos(n+2)\alpha \cos n\theta] \\ \tau_{r\theta} &= kr^n(n+1)[(n+2)\cos n\alpha \sin(n+2)\theta - n\cos(n+2)\alpha \sin n\theta] \end{aligned} \right\}$$

前と同様にして、

$$\frac{f_1(\theta)}{f_3(\theta)} = \pm m \sin 2\alpha \sinh m\alpha \cosh m\theta \mp m \cosh m\alpha \sin 2\theta \sinh m\theta \mp 2 \cosh m\alpha \cos 2\theta \cosh m\theta$$

$$- 2 \cos 2\alpha \cosh m\alpha \cosh m\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{f_2(\theta)}{f_4(\theta)} &= \pm m \cos 2\alpha \cosh mx \cosh m\theta \mp m \cosh mx \cos 2\theta \cosh m\theta \pm 2 \cosh mx \sin 2\theta \sinh m\theta \\ &\quad + 2 \sin 2\alpha \sinh mx \cosh m\theta \end{aligned}$$

$$g_1(\theta) = m \cos 2\alpha \cosh m\alpha \sinh m\theta - m \cosh m\alpha \cos 2\theta \sinh m\theta + 2 \cosh m\alpha \sin 2\theta \cosh m\theta$$

$$g_2(\theta) = m \cosh m\alpha \sin 2\theta \cosh m\theta - m \sin 2\alpha \sinh m\alpha \sinh m\theta + 2 \cosh m\alpha \cos 2\theta \sinh m\theta$$

$$g_2(\theta) = m \cosh m\alpha \sin 2\theta \cosh m\theta - m \sin 2\alpha \sinh m\alpha \sinh m\theta + 2 \cosh m\alpha \cos 2\theta \sinh m\theta$$

$$\text{とおけば, } \phi_A = ke^{i\varphi} \{f_3''(\theta) \cos m\rho - f_4''(\theta) \sin m\rho\}, \phi_B = ke^{i\varphi} \{f_4''(\theta) \cos m\rho + f_3''(\theta) \sin m\rho\}$$

$$f_3''(\theta) = \cosh m\alpha \cos 2\theta \cosh m\theta - \cosh m\alpha \cos 2\alpha \cosh m\theta$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{rA} \\ \sigma_{rB} \end{array} \right\} = k \left[\begin{array}{l} \cos m\phi \{ f_1(\theta) - mf_2(\theta) \} \\ \sin m\phi \{ mf_1(\theta) + f_2(\theta) \} \end{array} \right]$$

$$\frac{\sigma_{\theta A}}{\sigma_{\theta B}} = k \left[\frac{\cos m\rho \{f_3(\theta) - m f_4(\theta)\}}{\sin m\rho \{m f_3(\theta) + f_4(\theta)\}} \right]$$

$$\left. \frac{\tau_{r\theta A}}{\tau_{r\theta B}} \right\} = k \left[\frac{\cos m\rho \{g_1(\theta) - mg_2(\theta)\}}{\sin m\rho \{g_1(\theta) - mg_2(\theta)\}} \mp \frac{\sin m\rho \{mg_1(\theta) + g_2(\theta)\}}{\cos m\rho \{mg_1(\theta) + g_2(\theta)\}} \right]$$

ここで得られた応力函数 ϕ の実部 ϕ_A 及び虚部 ϕ_B は共に境界条件を満足するものであるから応力函数,

(ただし K 及び K' は常数) を考えれば、

$$\sigma_{rm} = [K\{f_1(\theta) - mf_2(\theta)\} + K'\{mf_1(\theta) + f_2(\theta)\}] \cos m\phi + [K'\{f_1(\theta) - mf_2(\theta)\} - K\{mf_1(\theta) + f_2(\theta)\}] \sin m\phi \\ \equiv \{Kp_1(\theta) + K'p_2(\theta)\} \cos m\phi + \{K'p_1(\theta) - Kp_2(\theta)\} \sin m\phi$$

$$\sigma_{\theta m} = [K\{f_3(\theta) - mf_4(\theta)\} + K'\{mf_3(\theta) + f_4(\theta)\}] \cos mp + [K'\{f_3(\theta) - mf_4(\theta)\} - K\{mf_3(\theta) + f_4(\theta)\}] \sin mp \\ \equiv [Kp_3(\theta) + K'p_4(\theta)] \cos mp + [K'p_3(\theta) - Kp_4(\theta)] \sin mp$$

$$\tau_{r \theta m} = [K\{g_1(\theta) - mg_2(\theta)\} + K'\{mg_1(\theta) + g_2(\theta)\}] \cos mp + [K'\{g_1(\theta) - mg_2(\theta)\} - K\{mg_1(\theta) + g_2(\theta)\}] \sin mp \\ \equiv \{Kg_1(\theta) + K'g_2(\theta)\} \cos mp + \{K'g_1(\theta) - Kg_2(\theta)\} \sin mp$$

となり、2. で得られた式と全く同型の応力式が得られる。それ故境界面に作用する同一方向の対称剪断荷重を同じく ρ の函数としてフーリエ積分で表わせば、前節と同様にして同じ型の $K(m)$, $K'(m)$ を求めることができ、従つてこの場合の堤内応力を算定しうることになる。

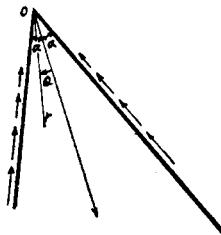
5. 上下流面に異方向の切線対称荷重をうける堰堤の内部応力の算定

図-4の如く上下流面に各々大きさ等しく方向反対の剪断荷重が作用する場合の応力函数は、

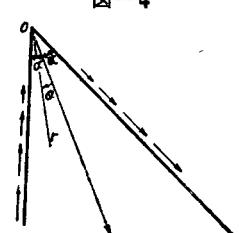
$$\phi' = \phi_3 k_4 \sin n\alpha - \phi_4 k_3 \sin(n+2)\alpha \\ = k' r^{n+2} \{ \sin n\alpha \sin(n+2)\theta - \sin(n+2)\alpha \sin n\theta \}$$

で、 $\theta = \pm \alpha$ で境界条件の 1 つである $\sigma_{\theta'} = 0$ を満足することになるが、この ϕ' によつては、

— 3



を求める



$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r'} &= k'r^n(n+1)\{(n-2)\sin(n+2)\alpha\sin n\theta - (n+2)\sin n\alpha\sin(n+2)\theta\} \\ \sigma_{\theta'} &= k'r^n(n+2)(n+1)\{\sin n\alpha\sin(n+2)\theta - \sin(n+2)\alpha\sin n\theta\} \\ \tau_{r\theta'} &= k'r^n(n+1)\{n\sin(n+2)\alpha\cos n\theta - (n+2)\sin n\alpha\cos(n+2)\theta\} \end{aligned} \right\}$$

前と同様にして、

$$\left. \begin{aligned} f_1'(\theta) &= \mp m \sin 2\alpha \cos m\alpha \sinh m\theta \pm m \sinh m\alpha \sin 2\theta \cosh m\theta \pm 2 \sinh m\alpha \cos 2\theta \sinh m\theta \\ f_3'(\theta) &= +2 \cos 2\alpha \sinh m\alpha \sinh m\theta \\ f_2'(\theta) &= \mp m \cos 2\alpha \sinh m\alpha \sinh m\theta \pm m \sinh m\alpha \cos 2\theta \sinh m\theta \mp 2 \sinh m\alpha \sin 2\theta \cosh m\theta \\ f_4'(\theta) &= -2 \sin 2\alpha \cosh m\alpha \sinh m\theta \\ g_1'(\theta) &= -m \cos 2\alpha \sinh m\alpha \cosh m\theta + m \sinh m\alpha \cos 2\theta \cosh m\theta - 2 \sinh m\alpha \sin 2\theta \sinh m\theta \\ g_2'(\theta) &= -m \sinh m\alpha \sin 2\theta \sinh m\theta + m \sin 2\alpha \cosh m\alpha \cosh m\theta - 2 \sinh m\alpha \cos 2\theta \cosh m\theta \end{aligned} \right\}$$

における、 $\phi_A' = k'e^{2\rho}\{f_3'''(\theta)\cos m\rho - f_4'''(\theta)\sin m\rho\}$, $\phi_B' = k'e^{2\rho}\{f_4'''(\theta)\cos m\rho + f_3'''(\theta)\sin m\rho\}$

こゝに、 $f_3'''(\theta) = -\sinh m\alpha \cos 2\theta \sinh m\theta + \cos 2\alpha \sinh m\alpha \sinh m\theta$
 $f_4'''(\theta) = \sinh m\alpha \sin 2\theta \cosh m\theta - \sin 2\alpha \cosh m\alpha \sinh m\theta$

となる。以下全く同様にして前節と同じ型の結論式が得られる。

6. 上流面に推砂圧をうける堰堤の内部応力の算定

以上はいすれも上下流面に對称の荷重が作用した場合であるが、上流面又は下流面のみに外力が作用する場合については既述の各場合を組合せて求めることができる。こゝでは上流面に堆砂圧の如き不連続三角形荷重又は満水ならざる貯水圧が作用する場合について述べよう。

(1) $\rho=0$, ($r=1$) より $\rho=a$, ($r=e^a$) まで上下流面に垂直に三角形対称圧縮荷重が作用する場合は 2. に従つて計算を行えばよいが、境界面に作用する荷重を表わすフーリエ積分は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos m\rho dm \int_{-\infty}^\infty \phi(t) \cos mt dt &= \frac{p}{\pi} \int_0^\infty \cos m\rho dm \int_0^a (e^t - 1) \cos mt dt \\ &= \frac{p}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+m^2} \{e^a (\cos am + m \sin am) - 1\} - \frac{\sin am}{m} \right] \cos m\rho dm \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin m\rho dm \int_{-\infty}^\infty \phi(t) \sin mt dt &= \frac{p}{\pi} \int_0^\infty \sin m\rho dm \int_0^a (e^t - 1) \sin mt dt \\ &= \frac{p}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+m^2} \{e^a \sin am - m \cos am\} + m \right] + \frac{(\cos am - 1)}{m} \sin m\rho dm \end{aligned}$$

(p: 上流面に沿い堆砂面から単位距離の点における堆砂圧強度)

となり、これによつて常数 $K(m)$, $K'(m)$ を決定すれば、この場合の堤内応力 σ_R , σ_θ , $\tau_{R\theta}$ を求めることができること。

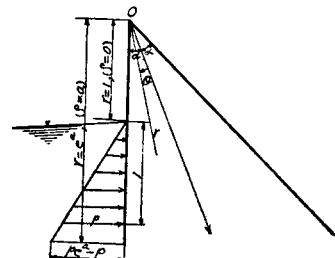
(2) (1) と同じく上下流面に垂直に對称圧縮、引張荷重が作用する場合の応力成分 $\sigma_{R'}$, $\sigma_{\theta'}$, $\tau_{R\theta'}$ は、3. に従つて同様に求めることができる。

(3) 図-5の如く上流面のみに垂直に $\rho=0$ より $\rho=a$ まで三角形圧縮荷重が作用する場合は、(1)及び(2)を加算して求めることができる。
即ち $\{\sigma_R(\sigma_\theta, \tau_{R\theta}) + \sigma_{R'}(\sigma_{\theta'}, \tau_{R\theta'})\}/2$ として算定することができる。

以上の各場合において境界に作用する荷重をフーリエ積分で表わしたが、荷重の不連続点ではフーリエ積分の性質上真の値を表わすことができない。しかしこれによる影響は、不連続点近傍の荷重のみに基づくものであつて、その作用する部分が無限小であると考えてよいかから、この影響を無視することができる。

実際の数値計算にさいしては(2)式より明らかな如く、 ρ の値が大きくなれば $\cos m\rho$, $\sin m\rho$ が m の増加とともになつて急速に符号を変ずるので、これらの数値積分には Simpson 法則によることができますが、 ρ の大きい値に対しても十分の近似値を与える Filon 法則³⁾を適用しなければならぬ。

図-5



3) L.N.G. Filon; "On a Quadrature Formula for Trigonometric Integrals", Proc. Roy. Soc. Edin., vol. 49, 1929, p. 38~47.

* 京都大学助教授

い。

7. 結 語

上述の如く簡単な応力函数を適当に組合せて、重力堰堤の基本三角形断面に任意の荷重が作用する場合の堤内応力を解析することができた。単に堆砂圧の場合に限らず、堰堤に作用する任意の外力の分布に伴つて生ずる堤内応力を求めることができるわけであつて、従来採用せられて来た不合理な実用的解法によらず、純弾性学的に厳密な解析を行うことができる様になつた。氷圧、波圧等の外力による堤内応力を従来閑等視され勝ちであつたが、これらの点について本解法は資する所が渺くないと考えられる。目下数値計算を進めており、実例について改めて考察結果を発表したいと思う。

本研究は文部省科学研究費によつて行つている“高堰堤設計の合理化に関する基礎的研究”の1部であり、こゝに關係方面並びに種々御指導を賜つた京大教授石原、小西両博士に謝意を表わす次第である。

UDC 624.131.522 : 518.4

基礎地盤応力の新図解法

正員 松尾 新一郎*

NEW GRAPHICAL SOLUTION OF STRESS IN SOIL UNDER FOUNDATION

Shin-ichirō Matsuo, C.E., Member

Synopsis In this article the author first discusses the graphical solutions of obtaining stresses in soil under foundation proposed hitherto, and then proposes 3 new simplified graphical methods by improving the methods of Burmister and Newmark and by transforming the scales in compliance with the coefficient of concentration according to Fröhlich, making practical application easier.

要旨 任意の上載荷重を受けた地盤内の応力を知ることは、建設工学上重要な問題であるが、理論式の積分計算が困難なるため、図解法による。本文は基礎地盤応力についての従来の図解法を検討して、集中係数の考慮可能なより簡便な図解法の3案を提唱し、その特色を明らかにしたものである。

すなわち弾性理論に基く Burmister 法、Newmark 法の改良、拡張を行い、集中係数の考慮を可能ならしめしから Krynnine の如き厄介な作図を必要としない方法を提唱し、更に縮尺変換法を示し、それらが従来の諸方法に比較して優れている点を明らかにしたもので、実用的価値が高められたものと信ずる。

目 次

- | | |
|---------------------|---------|
| 1. 緒 言 | 3. 新図解法 |
| 2. 従来の方法に対する批判 | (1) 第1法 |
| (1) Burmister 法に対して | (2) 第2法 |
| (2) Newmark 法に対して | (3) 第3法 |
| (3) Krynnine 法に対して | 4. 結 語 |

1. 緒 言

構造物設計上、地上における構造物自身の応力計算は一般に力学的解析により求めることが出来る。然るに地下における地盤応力の算定は、土の力学的性質の複雑なるため、前者の如く容易且つ相当の精度をもつて求めるることは困難である。

構造物の完全なる設計は、基礎地盤の解決を俟つて初めて期し得られると云うことが出来る。この意味において地盤応力の算定は一層重要である。

一般に基盤地盤における応力は、不規則であつて、未だ完全に把握されるに至っていない。従来の解析的方法

* 京都大学助教授、工学部土木工学教室