

# 変垂曲線アーチの新軸線公式(第1報)

正員 武田 英吉\*

## NEW FORMULA FOR THE AXIAL LINE OF THE TRANSFORMED CATENARY ARCH (Report 1)

*Eikichi Takeda, C.E., Member*

**Synopsis** Transformed Catenary is generally considered as the most rational axial line for the reinforced concrete arch. One can not miss the wellknown Strassner's formula\*\* which assumes a horizontal top surface of reduced load on the arch. But even if the road surface be actually horizontal, the load reduced to concrete can not have a horizontal top surface. In most cases, the reduced load surface takes the form of a curved surface convex to heaven.

Consequently, there must be a more rational formula for the axial line of the transformed catenary arch. The writer has long been studying this problem and now he is glad to offer a new formula in the following papers.

**要旨** 鉄筋コンクリートアーチの軸線として変垂曲線が最も合理的なものとして用いられている。その軸線公式に周知のStrassner公式\*\*がある。しかるにこれはアーチにかかる荷重即ち換算荷重の上面を水平面と考えている。たとえ実際には橋面が水平であつても土砂その他をコンクリートに換算して考えるときはその換算荷重の上面は多くの場合アーチ中央で高く両端で低い曲面となるのである。したがつて在來の変垂曲線アーチよりももう少し理想的なアーチ軸線があることになる。筆者はこの点について以前から研究中であつたがようやく一案を得たのでこゝに新公式を紹介する次第である。

### 目 次

1. まえがき	5. 軸線計算例
2. 一般公式の誘導	6. 荷重曲線計算例
3. 定数 $k$ の決定	7. あとがき
4. 各種の場合	

#### 1. まえがき

これは昭和25.5.22 名古屋工業大学に於ける土木学会第5回年次学術講演会で発表したものである。従来いわゆる変垂曲線アーチとはアーチ軸線とアーチにかかる荷重によつて定まるある水平線との間に挟まれた長さに相当する強度をもつ分布荷重がアーチに作用する場合、そのアーチ軸線に曲げモーメントの生じないようなものを称しているようである。ところが実際にはこのような荷重状態になることは極めて稀で土砂及びアーチ主体を含む固定荷重を考え、この荷重強度を軸線から測つて垂直な荷重面を作つてみると、その上縁は一般に曲線となり直線にはならない。土砂填充コンクリートアーチをとつて考えるとき、土砂上面はたとえ水平面であつてもこれをコンクリートに換算すれば土砂上面は中央で高い曲面となる。したがつてアーチにかかる荷重としては上縁が直線でない垂直荷重面によるべきことは明らかのことである。この意味で今まで用いられている変垂曲線アーチ公式は合理的なものということはできない。

筆者は以前からこの点について種々考究の結果一般の場合に用いることのできる一つの新軸線公式を得てこれを修正変垂曲線 (Modified Transformed Catenary) と名付けることにした。この公式の特別の場合としてStrassnerの変垂曲線公式を得ることができるから新公式はStrassner公式の一般化されたものと考えられる。新公式は換算荷重曲線(荷重面上縁)を2次抛物線として導いたものであるがこの他にいろいろな曲線を考えることができるわけである。

\* 神戸大学教授

\*\* Strassner, Neuere Methoden, Band II.

## 2. 一般公式の誘導

図-1で  $p_s = mp_c$ ,  $p_s' = \mu p_s = \mu mp_c$ ,  $x = \zeta l_1$  とおけば

$$p_x = y + p_c - p_s' \zeta^2 = y + p_c - p_c \mu m \zeta^2 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\tan \phi = \frac{ay}{dx} = \frac{S_x}{H}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H} \cdot \frac{dS_x}{dx} = \frac{p_x}{H}$$

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} = \frac{l_1^2}{H} (y + p_c - p_c \mu m \zeta^2) \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{この式を解いて } y = C_1 \cosh k\zeta + C_2 \sinh k\zeta - p_c + \mu mp_c \zeta^2 + \frac{2\mu mp_c}{k^2} \quad \dots \dots \dots (3)$$

$\zeta = 0, y = 0; \zeta = 1, y = f$  及び  $\zeta = 0, \frac{dy}{dx} = 0$  の3条件から次の関係を得る

$$C_1 = \frac{(k^2 - 2\mu m)p_c}{k^2}, \quad C_2 = 0, \quad \frac{k^2 - 2\mu m}{k^2} = \frac{m-1}{\cosh k-1} \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\therefore y = \frac{(m-1)p_c}{\cosh k-1} (\cosh k\zeta - 1) + \mu mp_c \zeta^2$$

かかるに図-1から明らかなように

$$f + p_c = p_s + p_s', \quad f = mp_c + \mu mp_c - p_c = (m + \mu m - 1)p_c, \quad p_c = \frac{f}{m + \mu m - 1}$$

$$\text{これを用いて求める軸線式は } y = \frac{f}{m + \mu m - 1} \left\{ \frac{(m-1)(\cosh k\zeta - 1)}{\cosh k-1} + \mu m \zeta^2 \right\} \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\text{接線の傾斜は } \frac{dy}{dx} = \frac{f}{(m + \mu m - 1)l_1} \left\{ \frac{(m-1)k \sinh k\zeta}{\cosh k-1} + 2\mu m \zeta \right\} \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\text{荷重曲線式は (1) から } p_x = p_c \left\{ 1 + \frac{(m-1)(\cosh k\zeta - 1)}{\cosh k-1} \right\} \quad \dots \dots \dots (7)$$

上式中の  $k$  は  $m, \mu$  によって定まる定数である。

### 3. 定数 $k$ の決定

(4) の最後の式を書き変えると

$$m = \frac{k^2 \cosh k}{k^2 + 2\mu(\cosh k - 1)}, \quad \mu m = \frac{k^2(\cosh k - m)}{2(\cosh k - 1)} \quad \dots \dots \dots (8)$$

図-3

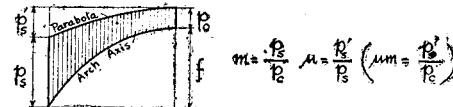


図-2

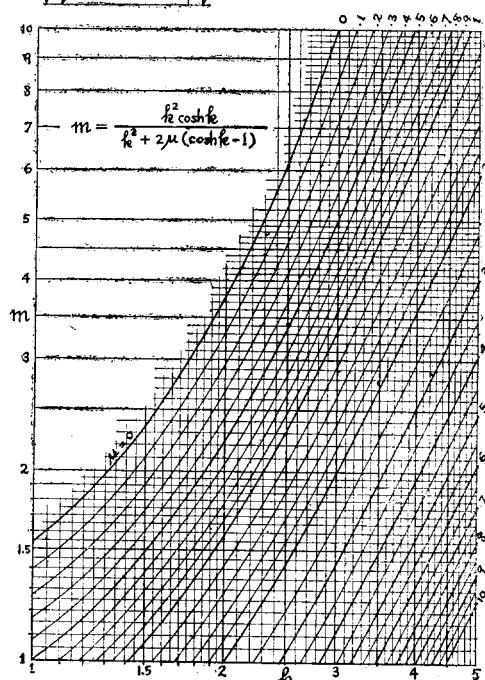
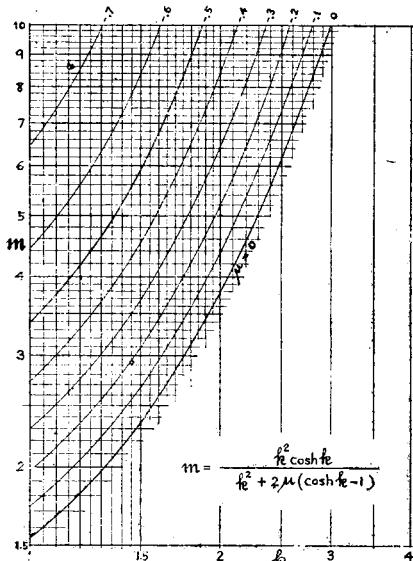
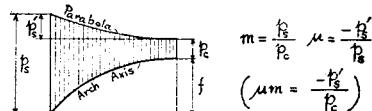


図-1

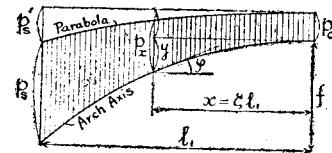
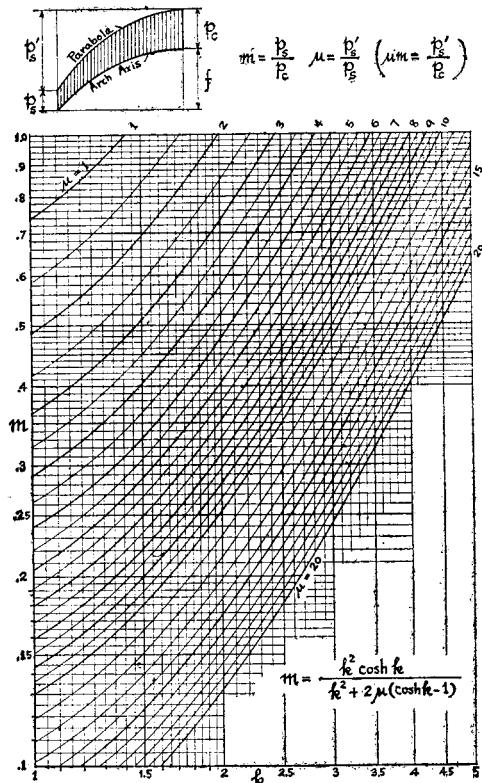


図-2, 図-3, 図-4 は  $m, k, \mu$  の関係を示し、図-5 は  $\mu m, k$  の関係を示すものであつてこれ等の図表により大体の  $k$  の値を求めることが出来る。詳しい値は上式から求める。

図-4



#### 4. 各種の場合

いろいろな荷重状態を示すと図-6 のようになる。

各々の場合に対する算式は次の通りである。

A の場合  $p_s' < 0, \mu < 0, m > 1$

$$y = \frac{f}{m + \mu m - 1} \left\{ \frac{(m-1)(\cosh k \zeta - 1)}{\cosh k - 1} + \mu m \zeta^2 \right\}, \quad p_x = p_c \left\{ 1 + \frac{(m-1)(\cosh k \zeta - 1)}{\cosh k - 1} \right\}, \quad f = (m + \mu m - 1)p_c \quad (9)$$

$\mu$  が負となることに注意しなければならない。

B の場合  $p_s' = 0, \mu = 0, m > 1$

これは軸線が変垂曲線になるときである。

$$y = \frac{f}{m - 1} (\cosh k \zeta - 1), \quad p_x = p_c \cosh k \zeta, \quad f = (m - 1)p_c \quad (10)$$

このときの  $k$  の決定は図-2 または図-3 を用いればよい。また  $m = \cosh k$  から定めることもできる。

C の場合  $p_s > p_c, \mu > 0, m > 1$

$$y = \frac{f}{m + \mu m - 1} \left\{ \frac{(m-1)(\cosh k \zeta - 1)}{\cosh k - 1} + \mu m \zeta^2 \right\}, \quad p_x = p_c \left\{ 1 + \frac{(m-1)(\cosh k \zeta - 1)}{\cosh k - 1} \right\}, \quad f = (m + \mu m - 1)p_c \quad (11)$$

D の場合  $p_s = p_c, \mu > 0, m = 1$

これはアーチが等分布荷重を受ける場合でアーチ軸線は抛物線となる。

$$y = f \zeta^2, \quad p_x = p_c, \quad f = \mu p_c \quad (12)$$

このとき  $k$  は不用となる。

図-5

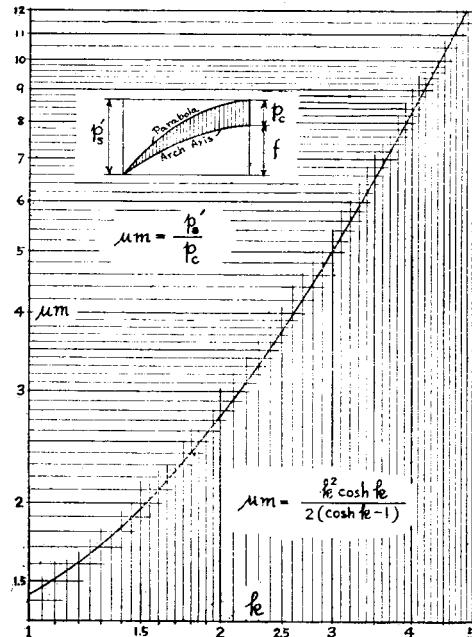
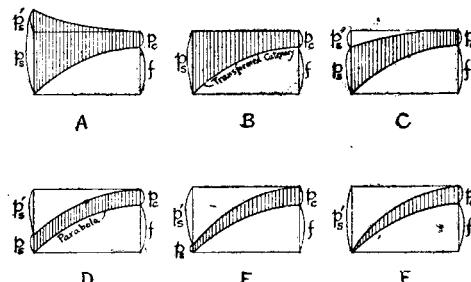


図-6



E の場合  $0 < p_s < p_c$ ,  $\mu > 0$ ,  $0 < m < 1$ : 算式は(11)と同一である。k は図-4 から求めることができる。

$F$  の場合  $p_s = 0, \mu = \infty, m = 0, \mu m = p_s'$ : 軸線が最も低くなる場合である。

上式の  $k$  は図一五によればよい。

## 5. 軸線計算例

算式(9)～(13)を用い、 $f/p_c = 6$  とし  $m$  をいろいろにとり軸線を計算して表示すれば表-1のようになる。参考のために変垂曲線として計算したものを付け加えた。またこれを図示すれば図-7となる。

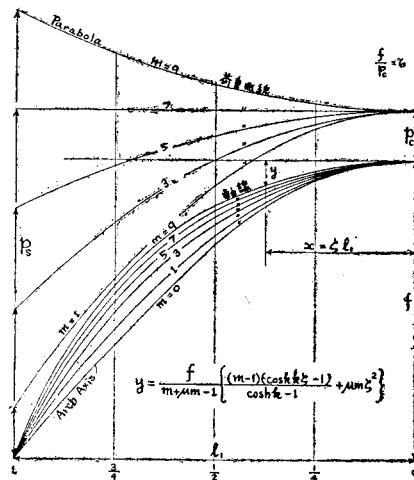
表-1 修正変垂曲線アーチ軸線縦距表

## Ordinates for the Axial Lines of the Modified Transformed Catenary Arches

m	$\mu$	$\mu m$	$f_0$	$5 - \frac{1}{4}$	$5 - \frac{1}{2}$	$5 - \frac{1}{3}$	y
0	$\infty$	7.0	3.640	0.6253	0.2500	0.625	2017.0709
1	6.000	6.0	—	0.5625 (0.5625)	0.2500 (0.2500)	0.625 (0.625)	
3	1333	4.0	3.140 (1.763)	0.5111 (0.5053)	0.2142 (0.2049)	0.5719 (0.5494)	x
5	0400	2.0	2.864 (2.292)	0.4736 (0.4630)	0.1872 (0.1829)	0.4338 (0.4022)	
7	0	0	2.635 (2.635)	0.4466 (0.4466)	0.1670 (0.1670)	0.3775 (0.3775)	
9	-0.222	-20	2.442 (2.887)	0.4256 (0.4274)	0.1512 (0.1546)	0.3030 (0.3040)	

( ) for Transformed Catenary Arch

図-7 修正変垂曲線アーチ軸線図  
Axial Lines of the Modified Transformed  
Catenary Arches



## 6. 荷重曲線計算例

軸線計算と同様に荷重曲線を計算し表-2 及び図-8 を得る。変垂曲線の分も書き入れたが荷重の分布状態が  $m=1, m=7$  を除き相当に異つてることが分る。

## 7. あとがき

修正変垂曲線アーチの一般式を求める例題により在来の変垂曲線アーチのものと比較してみた結果、荷重曲線に於いて相当の開きを生ずることが分った。一方軸線の相違は案外小さい。しかしながらアーチ軸線はごく僅かの移動によつて断面応力に大きく影響するのであるからこれを見逃すことはできない。

例題では  $m=7$  のときに荷重上縁が水平となり Strassner 公式によるものと一致した。Strassner 公式は簡単で便利であるが新公式による方が死荷重による断面応力は確かに小さく出る筈である。 $k$  の値も図表によつて楽に見当がつく。今まででは抛物線が最も低い軸線と考えていたが三角形荷重の場合はこれ以下に出ることがわかつた。各種の場合中図-6, C の場合が最も多く出てくるであろう。結局筆者は今まで Strassner 公式で考えられなかつた荷重面の下り又は上り  $p_s'$ 、したがつて  $\mu$  を考慮して新公式を作つたということである。 $k$  を定める図表中  $\mu=0$  の線は変垂曲線アーチに対するものである。

表-2 修正変垂曲線のアーチ荷重曲線継距表

## Ordinates for the Load Lines of the Modified Transformed Catenary Arches

<i>m</i>	$S = \frac{3}{4}$	$S = \frac{1}{2}$	$S = \frac{1}{4}$	Px	Remarks
0	0.8145	0.9400	0.9877		
1	1.0000 (1.0000)	1.0000 (1.0000)	1.0000 (1.0000)		Uniform Load Parabolic Arch
3	1.8165 (2010.5)	1.2851 (14148)	1.06143 (10986)		
5	2.7164 (28573)	1.6233 (17310)	1.1375 (11687)		
7	3.6798 (36798)	2.0018 (2.0018)	1.2251 (1.2251)		
9	4.6786 (4.4190)	2.4071 (2.3268)	1.3108 (1.2722)		Transformed Catenary Arch

( ) for Transformed Catenary Arch

図-8 修正変垂曲線アーチ荷重曲線図  
Load Lines of the Modified Transformed Catenary Arches

