堤体の滲透水量決定に関する実験

正員 久保田 敬 一*

THE EXPERIMENTAL RESEARCH ON THE DETERMINATION OF THE WATER QUANTITY OF PERCOLATION THROUGH EARTHDAM.

Keiichi Kubota C. E. Member

Synopsis; Few proper formulas have so far been introduced for the calculation of the amount of water leakage from earth dams or embankments which have been penetrated by water.

Basic experiments were made by the author for obtaining a formula for the calculation which will be both rational and practical.

The study is now being carried on. Although no definite conclusion has yet been reached, it has been ascertained that Q, the amount of water penetration is the function of h, the depth of water on the upstream side and of $h_2 I$, the product of the depth of water on the downstream side (h_2) and the gradient of the moving water (I).

要旨　土壌堤又は堤防の如き堤体を滲透して流れる漏水量の適切な計算式は現在の処少ない。筆者は合理的且つ実用的な算定式を得たいと考えて基礎実験を行つた。現在も引続き研究中で未だ結論を得るに至つていないが，滲透水量 Q が上流側水深 h_1 と下流側水深 h_2 と動水勾配 I との積 $h_2 \cdot I$ との函数であることを知ることが出来た。

目　　次

§1　概　説
§2　滲透係数の問題
§3　Darcy の法則の検討
§4　基本方程式
§5　滲透水量決定式
§6　実験方法
§7　実験結果
§8　結　語

§1 概　説

漏水の多く起るのは土壌堤である。堤体自身の構造に就いては近来多くの理論的及び実験的研究により満足に近い設計が行はれている。然しその漏水問題に対してはあまり研究されていない。その結果漏水によつて堤体が危険に晒され，使用されなくなつた例は少くない。漏水防止に対する施工技術的研究と構造学的研究は暫く措いて水工学的に考察して見れば次の通りである。

（1） 堤体自身の漏水。之は材質に起因するものと構造上の継目又は割目によるものである。

（2） 堤体と基礎地盤との接触面を通る漏水。

（3） 強雨等に起因する堤体自身の漏水。

（1）に対しては漏水曲線の長さをなるべく長くするように堤体断面を決定し，（2）に対しては滲透水のために地盤の土砂が流出しないだけの経路の長さが必要である。そのためにその経路長（L）の上下流の水位差（h）に対する比（$\frac{L}{h}$）(Weighted-Creep-Head) を地質に応じてとる。[1), 2)]（3）に対しては堤体表面を防護する等の施工的対策を施す必要がある。之等の問題は漏水個所及び漏水量等を出来るだけ正確に測定しようとする問題（物理地下探査の問題）と共に急に進んだ感がある。尤も漏水に関する理論的研究は，一般地下水の流動理論と何等変る所がないから，従来から地下水の研究の一部として行はれて来た。[3),4),5),6),7),8),9)] 之等研究の根本問題の一つである堤

* 徳島大学工学部

1） 物部長穂著：水理学 p. 488
2） E.W. Lane; Security from Under-Seepage-Masonry on Earth Foundation. Proc. of A.S.C.E. Sep. 1934.
3） R.Dachler; Über Sickerwasserströmungen in geschichtetem Material. Wasserwirtschaft Nr.2 1933 S. 13～16.
4） Schmied; Wasserbewegung in Dämmer Körper. 1927
5） H.Pickel; Die Querschnitbemessung von Hochwasserdämmer aus durchlässigem Material. Bautechnik Heft 5. 1927.
6） R.Müller; Beitrag zur Berechnung der Standsicherheit von Erddämmen. Schweikrift Bauzeitung 108, 1936 S35～37
7） Griffith; The Stability of Weir Foundation on Sand and Soil subject to Hydrostatic Pressure. Minutes of Proc. of the Inst. of C. E. v. 197
8） Davison; On the steady motion of ground-water through a wide Prismatic Dam. Phil. Mag. 1936
9） Harza; Uplift and Seepage under Dams on Sand. Proc. of the A.S.C.E. p. 67, 1934.

体自身の漏水量決定についての研究は之迄あまり為されていない。筆者はこの問題を取扱つて実験的に考察を進めて見たいと考へる次第である。

§2 滲透係数の問題

地中を流れる滲透水は，地中にあつて土壌又は岩石の自由空隙を連続的に満していて静水圧のみをうけている。之が圧力の差によつて流動するのであるが，その流速と動水勾配との関係は所謂 Darcy の法則により $v=k\cdot I=k\frac{\Delta h}{l}$，$v$ は動水勾配 $I=\frac{\Delta h}{l}$ を以て流れる滲透水の見掛けの流速である。k はその土砂の滲透係数である。k を求める多くの公式に於ては，土粒子表面に吸着されてゐる水及び空気が水の通過する空隙を縮小すること，即ち有効空隙率とも称すべきものを，又土粒子の形状及び粗滑の度合等の影響を考へていない。之等の影響を考慮に入れた Zunker の式は実験とよく一致すると云われている。即ち

$$k=\frac{\mu}{\eta}\left(\frac{P_0 l}{1-p}\right)^2\frac{1}{U^2}\ \mathrm{cm/sec}\cdots\cdots\cdots\cdots \text{F. Zunker}$$

式中 $P_0 l$ は有効空隙率，μ は土粒子の形状，粗滑の度の影響を表わした係数で粒状係数（Form beiwert）と称するもの，η は水の粘性係数である。

温度と η との関係は Helmholz に依ると次の式で表わされる。

$$\eta=\frac{0.0178}{1+0.03368\,t+0.000221\,t^2}\ \mathrm{cm^{-1}\cdot g\cdot sec^{-1}}$$

堤体を作る土砂質が均一でなく方向によつてその密度を異にするような場合には，場所及び方向によつて k を異にするから Potential 流の理論をそのまゝ応用することは出来ない。[10]

§3 Darcy の法則の検討

筆者が実験に使用した砂の物理的性質は §6 に説明する通りであるが Darcy の法則の適応される範囲及びこの砂の k を求める為めに次の豫備実験を行つた。装置は第1図に示す通りであつて，砂層横断面積 $F=5\,\mathrm{cm}\times 5\,\mathrm{cm}=25\,\mathrm{cm}^2$，砂層の長さ $l=20\,\mathrm{cm}$，湛水池水深を h_1（上流側）h_2（下流側）とすれば，

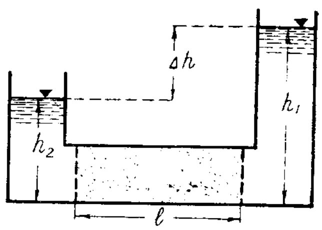
$$\begin{cases} h_1=36.2\,\mathrm{cm} \text{ に対して} \\ h_2=16.2\,\mathrm{cm}\sim 34.0\,\mathrm{cm} \text{ の 10 通り} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1=263.\,\mathrm{cm} \text{ に対して} \\ h_2=9.0\,\mathrm{mc}\sim 24.1\,\mathrm{cm} \text{ の 8 通り} \end{cases}$$

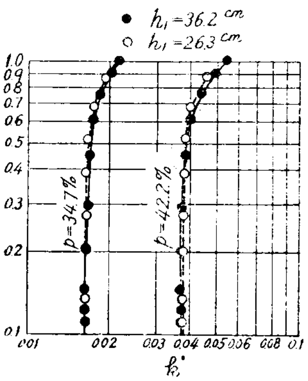
砂層を弛く填めた場合と堅く填めた場合とに分けて実験を行つたが，前者の porosity は p=42.2% で之は堤体滲透の実験の場合のそれと大体同程度のものである。

後者の Porosity p=34.7% である。

図－1



図－2



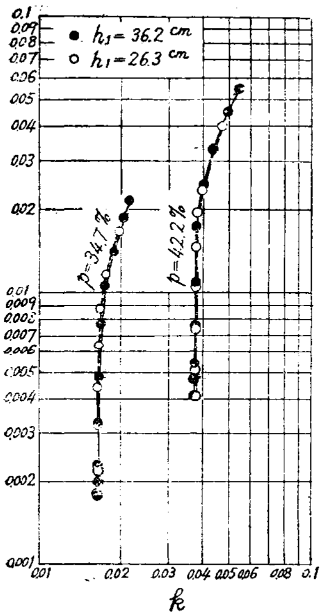
表－1

h_2	I	k	v	h_2	I	k	v
$h_1=36.2$ cm							
p=42.2%				p=34.7%			
16.2	1.000	0.0542	0.0542	16.2	1.000	0.0213	0.0213
18.0	0.910	0.0489	0.0450	18.0	0.910	0.0201	0.0183
21.1	0.755	0.0433	0.0327	21.1	0.755	0.0184	0.0139
24.1	0.605	0.0398	0.0241	24.1	0.605	0.0174	0.0105
27.2	0.450	0.0377	0.0170	27.2	0.450	0.0169	0.0076
30.4	0.290	0.0374	0.0108	30.4	0.290	0.0165	0.0048
32.1	0.205	0.0373	0.0076	32.1	0.205	0.0163	0.0033
33.3	0.145	0.0372	0.0054	33.3	0.145	0.0162	0.0023
33.7	0.125	0.0372	0.0047	33.7	0.125	0.0162	0.0020
34.0	0.110	0.0372	0.0041	34.0	0.110	0.0162	0.0018
$h_1=26.3$ cm							
p=42.2%				p=34.7%			
h_2	I	k	v	h_2	I	k	v
9.0	0.865	0.0461	0.0399	9.0	0.865	0.0192	0.0166
12.9	0.670	0.0399	0.0267	12.9	0.670	0.0174	0.0117
16.0	0.515	0.0379	0.0195	16.0	0.515	0.0167	0.0086
18.6	0.385	0.0376	0.0145	18.6	0.385	0.0164	0.0063
20.9	0.270	0.0376	0.0102	20.9	0.270	0.0163	0.0044
22.3	0.200	0.0375	0.0075	22.3	0.200	0.0162	0.0032
23.5	0.135	0.0375	0.0051	23.6	0.135	0.0161	0.0022
24.1	0.110	0.0375	0.0041	24.1	0.110	0.0161	0.0018

10) R. Dachler: Über Sickerwasserströmungen in geschichtem Material. Mitteilungen des hydrologischem Institutes. a.d. T.H. in Wien 7 Folge. or. Die Wasserwirtschaft Nr.2. 1933.

この実験の場合 Darcy の法則 $v=k\cdot I$ が成立するものと仮定して与へられた動水勾配 $I=\frac{\Delta h}{l}$ に対する v を算定すれば 表-1 に示す通りである。又 k を I の函数として図示すれば 図-2，k を v の函数と考へて図示すれば 図-3 のようになる。之等の実験結果から次の事が結論されると思う。

図—3



（1） 同じ性質の砂でもその Porosity によつて k の値は非常に変化し，p の大きい程 k の値は大きい。本実験に於ては

$p=42.2\%$の時　$k=0.0372$ 及び 0.0375

$p=34.7\%$の時　$k=0.0162$ 及び 0.0161

（2） 滲透水量 Q は上流側水深 h_1 の大さによつて変化しない。即ち $h=36.2$ cm 及び $h_1=26.3$ cm の2通りに就いて求めた k の値の変化は殆んどない。

（3） 図-1 の如き装置に於ても Darcy の法則は v の小さい場合にのみ成立する。本実験によれば $v=0.013\sim0.006$ cm/sec（0.468～0.216 m/hr）程度より遅い場合によく成立する。Forchheimer によれば Darcy の法則が実験とよく一致するのは $v=0.01$ cm/sec 以下であるから筆者の実験とよく一致している。

§4　基本方程式

滲透水量決定に関する理論的研究は Forchheimer, Slichter, Boussinesg, Pavlovsky 等の多くの人々によつて研究されて来たもので，特に井戸の問題として検討されている。

最近に於ては G.Hamel[11] や Davison[12] 等の理論研究がある。

（1） 基本方程式

堤体の滲透水の運動に関する Navier—Stokes の方程式は，

$$\frac{Dv}{Dt}=K-\frac{1}{\rho}\,grad.\ p+\frac{1}{3}\nu\ grad.\ div.\ v+\nu V^2 v \quad \cdots\cdots(1)$$

非圧縮性流体であるから div $v=0$，又緩漫な流れであるから慣性の項を無視すると，

$$\frac{1}{\rho g}\frac{dp}{ds}+\frac{ds}{dy}+\frac{1}{k}\frac{\partial\phi}{\partial s}=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

又は

$$\frac{1}{2}(u^2+v^2)+\frac{p}{\rho g}+gy+{}_{\nu}\phi=C \quad \cdots\cdots(3)$$

（2）式の外に連続に関する方程式が要ることは勿論である。

（2） 境界条件

運動方程式が満足すべき境界条件は次の通りである。

EA 面（不滲透層面）；S を流線に沿つた長サ，その x 軸に対する角を α（右廻りを正とする）とすれば，

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\sin\alpha$$

又不滲透面自身が一つの流線 $\psi=$const. を為しており，

又 $V_x=\frac{-\partial\phi}{\partial s}\cos\alpha$，$V_y=-\frac{\partial\phi}{\partial s}\sin\alpha$ であるから，V_x；$V_y=\cos\alpha$；$\sin\alpha$，所が α は一定であるから V_x；$V_y=$const. 即ち EA 面上の運動は V_x-V_y 面に写像すれば原点を通る一つの直線を以て表わされる。

AB 面（下流水域面）；$\frac{\partial\phi}{\partial s}=0$ であるから（2）式から

$$\frac{1}{\rho g}\frac{dy}{ds}=0\quad \frac{p}{\rho}+gy=\text{const.}\ 即ち\ \phi=\text{const.}$$

11） G.Hamel；Über Grundwasserströmung Heft3. Z. A. M. M. 1934 in Berlin
G. Hamel；Numerische Durchrechnung zu der Abhandlung über Grundwasserströmung. Heft 5. Z.A.M.M. 1935. in Berlin.

12） Davison；The steady motion of groundwater through a wide prismatic dam.Phil. Mag 1936-5. Engl.
Davison；On the steady two-dimensional motion of ground water with a free surface. Phil. Mag. 1936-5 Engl.

13） 友近晋；流体力学　第9章 63 節　P. 306 昭 15.

従つて AB 面はそれ自身一つの Potential line を表わし，V_x-V_y 面への写像はやはり原点を通り AB 面に垂直な直線となり，EA と一致する。

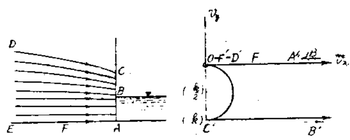
BC 面（滲透水面），滲透水面は境界層で大気に接している一つの自由水面であるから $p=\text{const.}$ 従つて（2）式は滲透面の傾斜角を α とすれば

$$\sin\alpha+\frac{1}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial s}=0$$

$\dfrac{\partial\phi}{\partial s}$ はS方向の速度の分力であるから $\dfrac{\partial\phi}{\partial s}=V_x\cos\alpha+V_y\sin\alpha$，従つて $k\sin\alpha+V_x\cos\alpha+V_y\sin\alpha=0$ V_x-V_y 面への写像は $V_x=0$, $V_y=-k$ を通つて BC 面に垂直な一つの直線である。

DC 面（自由水面）；$P=\text{const.}$ であるから $\dfrac{dp}{ds}=0$，又 $\dfrac{dy}{ds}=\sin\alpha_0$ とおいて $\sin\alpha_0+\dfrac{1}{k}\dfrac{\partial\phi}{\partial s}=0$，之に $\dfrac{\partial\phi}{\partial s}$ を乗じて

図—4



$$\frac{\partial\phi}{\partial s}\sin\alpha_0+\frac{1}{k}\left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)^2=0$$

$$\therefore V_y+\frac{1}{k}\left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)^2=0$$

定常流の場合を考へるから上式は $\psi=\text{const.}$ である。又 $\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial s}\right)^2=V_x^2+V_y^2$ 従つて上式を書き直して，

$$V_x^2+\left(V_y+\frac{1}{2}k^2\right)=\left(\frac{k}{2}\right)^2$$

従つて自由流線 DC の V_x-V_y 面への写像は $V_x=0$, $V_y=\dfrac{1}{2}k$ に中心を有し，半径 $\dfrac{k}{2}$ を有する円弧となる。之等の条件を図示すれば 図-4 の如くになる。以上の条件を満足するように方程式（2）を解けば水位曲線の形及び水量を求めることが出来る。

（3） 運動方程式（2）の一解法

（2）式を厳密に解くことは一般に複雑であるが，之を近似的に解く一例を示そう。

自由水面に於ては $\dfrac{dy}{ds}+\dfrac{1}{k}\dfrac{\partial\phi}{\partial s}=0$ 又は $V_s=-k\dfrac{dy}{ds}$ 今堤体内の任意の一点を通る流線の x 軸に対する傾斜角を α とすれば，$\dfrac{dx}{ds}=\cos\alpha$, $\dfrac{dy}{ds}=\sin\alpha$，又自由流線の勾配を α_0 とすれば，

$$[R_s]_{y=h}=-k\sin\alpha_0 \quad\cdots\cdots(\mathrm{a})$$

次に連続方程式として

$$q=-\int_0^h V_x\,dy=-\int_0^h V_s\cos\alpha\,dy$$

この両辺を x で微分すると，

$$0=-[V_s\cos\alpha]_{y=h}\frac{dh}{dx}-\int_0^h\frac{d}{dx}(V_s\cos_s\alpha)\,dy \quad\cdots\cdots(\mathrm{b})$$

（b）式に（a）式の関係を代入し，又右辺の第2項の $V_x=V_s\cos\alpha$ には運動方程式から V_x は簡単に求められないから $V_x=-\dfrac{q}{h}$ を近似的に代入するのである。この場合の誤差は $\dfrac{dV_x}{dx}$ が他の値に比べて小さいことと $\int_0^h$ の積分によつて実際にはその誤差は相殺されて結果に於て大きな量とならない。この仮定を用ひることによつて

$$k\sin\alpha_0\cos\alpha_0\frac{dh}{dx}+k\frac{d}{dx}\left(-\frac{q}{h}\right)=0$$

$$\therefore k\sin\alpha_0\cos\alpha_0\frac{dh}{dx}+\frac{q}{k}\frac{dh}{dx}=0$$

$\dfrac{dh}{dx}\neq 0$ で両辺を割れば

$$\sin\alpha_0\cos\alpha_0-\frac{q}{kh}=0 \quad\cdots\cdots(\mathrm{c})$$

又 $$\frac{dh}{dx}=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{y=h}=\tan\alpha_0$$

であるからこの式と（c）とから α_0 を消去すると，

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2-\frac{kh}{q}\left(\frac{dh}{dx}\right)+1=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

§5　滲透水量の決定式

(4)式を解き近似的に次式を得る。

$$\frac{dh}{dx}=\frac{q}{kh}\left\{1+\left(\frac{q}{kk}\right)^2+2\left(\frac{q}{kh}\right)^4\right\}$$

この方程式を積分し，右辺の h に h_1 を入れ，$x=0$ の時 $h=h_0$ とすれば次の(5)式を得る。

$$\frac{h^2-h_0{}^2}{2}=\frac{q-x}{k}\left(1+\frac{q^2}{k^2\ h_1{}^2}+\frac{2q^4}{k^4\ h_1{}^4}\right)\cdots\cdots(5)$$

(5)式をよく観ると $x\to\infty$ とすれば $h\to\infty$ となつて $h=h_1$ とならない。即ち理論的には $x\to\infty$ の所に於ては流れは等速定流となるから V_x も水平となり，一定の q に対して h は唯一つ定まり $h\to\infty$ とならねばならない。従つて(5)式は実際とこの点に於て矛盾するが，x に比べて h の大きい時は実際とよく一致する。

(5)式は(4)式を解いた一例であつて，このこうにして一般に(4)式を各境界条件を満足するように解けば滲透水量及び水位曲線式を求めることが出来るのである。然しその解法が複雑であるので極く簡単に次の様な仮定の下に解いている。

図-5

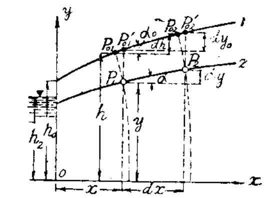


図-5 に於て任意の流線上に任意の2点 P_1, P_2 の Potential diff. は P_1, P_2 を通る Equipotential line が水位曲線1と交る点 P_{01}, P_{02} の Potential diff. dh に等しい筈である。然るに吾々は簡単の為めに dh の代りに P_{01}', P_{02}' の差 dy_0 をとつて計算するのが普通である。この仮定に依る誤差は，流線が水平軸となす角 α の大きい程大きく，又自由表面に近づくに従つて大きくなる。もつと簡単には更に $\alpha\fallingdotseq 0$ と仮定して，

$$V_x=k\sin\ \alpha_0\fallingdotseq k\tan\ \alpha_0=k\frac{dy_0}{dx}$$

とおいて q を求める。之等の仮定によつて求めた式は夫々次の結果を得る。

$$q=k\frac{h_1{}^2-h_0{}^2}{2l-h_1-h_0}\cdots\cdots(6)$$

$$q=\frac{k}{2l}(h_1{}^2-h_0{}^2)\cdots\cdots(7)$$

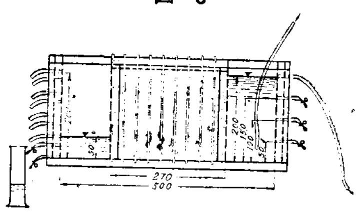
§6　実験方法

堤体の滲透に関する実験は之迄あまり行はれていない。Olsen[14] が 1928 年に土堰透を模型的に実際に作つて，その破壊状況を調べているし，1933 年に Grünewald[15] が滲透水に関する実測を行つてゐる程度である。

模型実験としては Chr. Keutner[16] が 1933 年に行つたものがある。又一般的な砂の滲透水の問題としては K. Beger[17] の論文がある。又 O. Jahn[18] は Darcy の法則を実験によつて検討している。又 Bock[19] の小論文もある。

(1)　実験装置

図-6



筆者の行つた実験装置は第6図に示す通りであつて長さ 50 cm, 高さ 22 cm, 幅 20 cm, の木製の箱の中央に長さ 27 cm の砂の堤体を作つたものである。堤体は 100 M の金網で境し，金網以外の所から漏水を完全に防ぐために十分の注意をはらつた。上流側湛水池の水深 h_1 は 20cm, 15cm, 10cm, 5cm の4通り，下流側湛水池の水深 h_2 は 20 cm, 18 cm, 15 cm, 13cm, 10cm, 8cm, 5cm, 3cm の8通りとした。水深を一定に保つために余水吐としてゴム管を用ひた。水位は 3cm 毎に箱の底の中央に一列に孔をあけ，ガラス管で箱の横に導いて立て，水位が一定してから（h_1 又は h_2 を変更してから約 30 分後に水位は安定する）精密に読むようにした。水位の零点は豫め管に正確に目盛しておく。又ガラス管による毛管上昇高の影響を差引いて実際の水位高としたが，毛管上昇高は管の内径が皆一様でないことと，室温水温によつて変化

14) Olsen; Versuche über Durchquellung von Dämmen aus durchlässigen Material mit und ohne Dichtungsschicht. Baut. H.9. 1928.

15) Grünewald; Beobachtung über die Unterströmung von Standammer auf durchlässigen Untergrunde. Baut. H. 32. 1933.

16) C. Keutner; Die Wasserbewegung in durchlässigen Bodenschichten. Baut. H. 22, 24. 1933.

17) K.Beger; Versuch zur Bestimmung der Wasserdurchlässigkeit von Sand. Bauing. S. 681 1932.

18) O.Jahn; Untersuchung über die Wasserbewegung in durchlässiger Erdkörper. Wkr und Ww. S. 181. 1932.

19) Bock; Sickerlinie bei hohen Kanaldämmen. Baut. H. 22 S. 259. 1932.

することから別に設けた装置によつて個々に求めた。

使用した砂の物理的性質は次の通りである。砂は海岸砂を日光でよく乾燥せしめ，Tyler 標準篩 28 M で篩つたものを用いた。その分析結果は次の通りである。

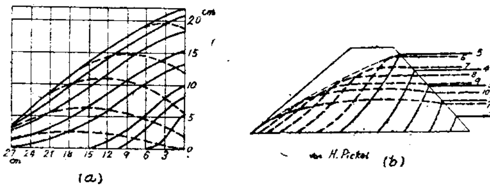
28 M 通過　48 M 残留	(0.30 mm～0.59 mm)	74.86%	100.00%
48 M 〃　100 M 〃	(0.15 ～0.30)	22.32〃	
100 M 〃　200 M 〃	(0.07 ～0.15)	2.27〃	
22 M 通過	(0.07>)	0.55〃	

真比重 Gs＝2.6525，見掛比重 G＝1.5365，含水率 w＝3.9%，間隙率 p＝42.074%，間隙比 e＝0.726 砂層は層厚1層分 2 cm になるように填めたが，箱に入れる時分離を起さないようによく混ぜ合した材料を上から落さずに箱の中に置くように入れ，16 mm の丸鉄棒で一様に搗いて平らかにする。このようにしても尚均一性は必ずしも満足出来るものでなかつた事は実験によつて知られる。水は水道水，水温は t＝15°C～17°C 尚粘性係数の温度による影響は無視した。

（2） 実験方法

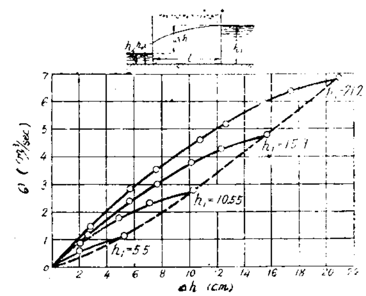
上流側湛水池には v＝12 cm³/sec の速さで水を入れた。この時の堤体に水が滲透して行く状態及び水を抜く時の水位曲線の変化状況は **図-7** に示す通りである。同図（b）は Hermann Pickel (1927) が実際に観測した水位曲線の変化状況を示したものである。各曲線に接する曲線(細い破線で示した曲線)は最高水位に対する水位曲線の固定状態を示すものである。

図—7 （a）（b）



上流側湛水池の水深 h_1 を一定にして之に対する h_2 を色々に変化せしめ測定した滲透水量 Q は **表-2** に，この Q が動水勾配 $I=\dfrac{\Delta h}{l}$ に応じて変化する状況を図示すると **図-8** の如くなる。Q は I のみの函数でなく h_1 の函数でもあることが判る。

図—8



§7　実験結果

（1） 滲透水量及び流速の検討

実験によつて得られた結果から，堤体の単位断面積を通して流出する滲透水量 q が動水勾配 I のみに比例しないこと即ち Darcy の法則の成立しないことは明らかである。又筆者は実験によつて Forchheimer, Kröbler の提唱した関係式 $v=K\cdot I$ も v の小さい場合にのみその正当性が認められることを知つた。表-3 は与へられた q と h_0 に対して次式から夫々計算した k_1, k_2, k_3 を表示したものである。

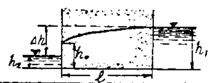
$$k_1=\frac{54q}{(h_1^2-h_0^2)}\ \text{(Dupuitの式)}$$

$$k_2=\frac{54-(h_1+h_0)}{(h_1^2-h_0^2)}q$$

$$k_3=\frac{54q}{h_1^2-h_0^2}\left(1+\frac{q^2}{k^2\,h_1^2}+\frac{2q^4}{h^4\,h^{14}}\right)$$

今 k＝f (I) と考へて之を図示すると **図-9** の如くなる。この中 k_3 は前述の如く比較的厳密な理論に基いて算定した結果であるから k＝f (I) が成立するとすれば最も合理的な曲線を描き，k_1 はこれに比して最も矛盾の多い結果を与へる筈である。然るに k_1, k_2, k_3 を I の函数であると考へた関係曲線は図より明らかなように k_1,

表—2

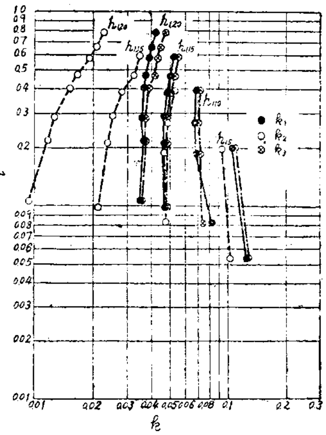


h_1	h_2	h_0	$F=bh_0$	Δh	$I=\frac{\Delta h}{l}$	$\zeta=I\cdot F$	Q	$k=\frac{Q}{\zeta}$	v
21.2	0.25	3.6	72.00	20.95	0776	55.872	6849	01226	00951
	3.80	4.7	94.00	17.40	0644	60.536	6.345	01048	00675
	5.80	6.4	128.00	15.40	0570	72.960	5948	00815	00465
	8.65	8.9	178.00	12.55	0465	83.304	5.161	00620	00290
	10.40	10.7	214.00	10.80	0400	85.600	4597	00537	00215
	13.60	13.6	272.00	7.60	0.281	76.432	3529	0.0461	00130
	15.45	15.45	309.00	5.75	0.213	65.817	2.832	00430	00092
	18.40	18.40	368.00	2.80	0.104	39.744	1440	00362	00039
15.9	0.25	2.7	54.00	15.65	0580	31.320	4778	0.1526	00885
	3.50	4.8	96.00	12.40	0.459	44.064	4.274	00970	00445
	5.70	6.6	132.00	10.20	0378	49.896	3.750	00752	00284
	8.20	9.1	182.00	7.70	0.285	51.870	2.967	00572	00163
	10.30	10.8	216.00	5.60	0207	44.712	2.378	00532	00110
	13.30	13.7	274.00	2.60	0.096	26.304	1.147	00436	00042
10.55	0.25	2.0	40.00	10.30	0381	15.240	2.721	01785	00680
	3.45	4.3	86.00	7.10	0263	22.618	2.326	01028	00270
	5.70	6.4	128.00	4.85	0.180	23.040	1.786	00775	00140
	8.40	8.9	178.00	2.15	0.080	14.240	0.870	00611	00049
5.5	0.25	1.4	24.00	5.25	0.194	4.656	1.111	02386	00463
	3.50	4.1	82.00	1.40	0.052	4.264	0.621	01456	00076

表—3

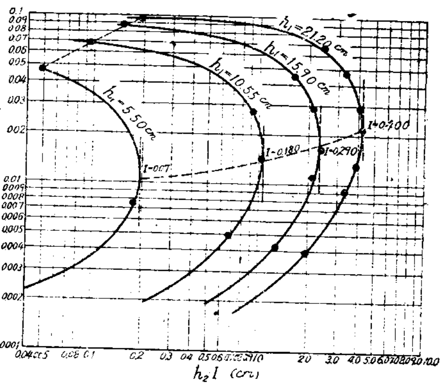
$k_1=\frac{54q}{(h_1^2-h_0^2)}$ $k_2=\frac{54-(h_1+h_0)}{h_1^2-h_0^2}q$ $k_3=\frac{54q}{h_1^2-h_0^2}\left(1+\frac{q^2}{k^2h_1^2}+\frac{2q^4}{k^4h_1^4}\right)$							
h_1	h_2	h_0	I	q	k_1	k_2	k_3
212	025	360	0776	03425	0.0424	00229	00481
	380	470	0644	03173	00401	00209	00445
	580	640	0570	02974	00393	00192	00431
	865	870	0465	02581	00376	00167	0.0407
	1040	1070	0400	02298	0.0370	00152	0.0382
	1360	1360	0281	01765	00360	00128	0.0373
	1545	1545	0213	01416	00363	00117	00364
	1840	1840	0104	00720	0.0351	00094	0.0354
159	025	270	0580	02389	00525	00344	00557
	350	480	0459	02137	00502	00313	00528
	570	660	0378	0.1875	.00484	00282	00503
	820	910	0285	01484	00471	00253	00496
	1030	1080	0207	01184	00472	00233	0.0484
	1330	1370	0096	00574	00476	00215	00474
1055	025	20	0381	01361	00685	00526	0.0708
	345	43	0263	01163	00677	00491	00705
	570	64	0183	0.0843	00686	0.0470	0.0728
	840	89	0080	00435	00732	00468	00734
5.50	025	14	0194	0.0555	01059	00924	0.1069
	350	41	0052	00311	01250	0.1027	0.1252

図—9



h_3 が最も接近して類似の関係を示す結果となつている。之を要するに $k=f(I)$ の関係はこの場合に於て何等の正当性が認められないことになる。つまり Darcy の法則は堤体の滲透問題に対しては特別の場合を除いて成立しないことが言へる。然らば k は何の函数であるかを検べて見る。図-8 に戻つて考へて見れば之迄の説明によつて Darcy の法則 $v=k\cdot I$ は成立しないから，h_2 によつて変化することを考慮して $v=\psi(h_2 I)$ と考へて と $h\cdot I$ との関係を図示して見ると 図-10 に示すようになる。同図を見れば h_1 に応ずる各曲線は規則的に隣合つて h_2I が小さくなつても互に交ることがない。又 $h\cdot I=$const. なる v に平行な直線と接する曲線上の各点

図—10



表—4

h_1	h_2	I	$h_2 \cdot I$	v
21.2	0.25	0776	01940	0.0451
	3.80	0.644	2.4472	0.0675
	5.80	0.570	3.3060	0.0465
	8.65	0.465	4.0223	00290
	10.40	0.400	4.1600	0.0215
	13.60	0.281	3.8216	00130
	15.45	0.213	3.2909	00092
	18.40	0104	1.9135	00039
15.9	0.25	0.580	0.1450	00885
	3.50	0.459	1.6065	0.0445
	5.70	0.378	2.1546	0.0284
	8.20	0.285	2.3370	00163
	10.30	0.207	2.1321	0.0110
	13.30	0.096	1.2768	0.0042
10.55	0.25	0.381	0.0953	0.0680
	3.45	0.263	0.9074	.00270
	5.70	0.183	1.0260	0.0140
	8.40	0.080	0.6720	0.0049
5.50	0.25	0.194	0.0485	0.0463
	3.50	0.052	0.1820	0.0076

は一つの曲線上にある。之等によつて v は h_2I の函数であると考へる方が $v=f(I)$ を考へるよりもずつと正当性が認められる。即ち

$$v=F(h_1,\ h_2I) \quad \cdots\cdots (8)$$

である。然し具体的に如何なる形を表すかについては尚研究の余地がある。

（2） 滲透水曲線の形状

実際の堰堤を通つて流れる滲透水の水位曲線が如何なる形を呈するかに就いて詳細に検べて見ることは甚だ困難である。土堰堤の滲透水位を実測する装置が考案され，[20] 之によつて正しい水位が判定出来るという事であるがそれでもなかなか容易な問題ではない。

滲透水位曲線を表す理論式は厳密に求められ又（4）式の如く近似式としても求められるが，複雑で実用的でないから近似的に次に説明する実験式又は理論式を用いてゐる。Schaffernak[21] 及び Iterson[22] は梯形断面を有する堤

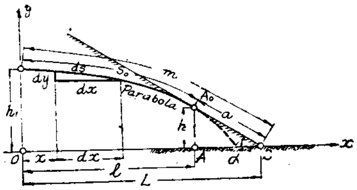
20） L.L.Meyer; Percolation Slope in Dams Measured by New Device. Eng. News Ree. June 26. 1933.
21） Schaffernak; Über die Standsicherheit durchlässiger geschütteter Dämme. Vortrag gehalten im Österr. Ing. und Arch. Verein 1916. Allgemeine Bauzeitung 1917.
22） Iterson; Einige theoretische beschonwingen over Kwel. De Ingenieur 1916. 1919.

体の滲透水位曲線を 図-11 のように2次の Parabola と仮定して之が実験とよく一致することを立証している。堤体斜面はこの Parabola と A_0 に於て接するが，h_a は次の式で表わされる。然しこの式には滲透係数 k 及び滲透水の運動に関する項が入つていないことは注目に値する。

$$h_a=-l\ \tan\ \alpha+\sqrt{l^2\tan^2\alpha+h_1^2}\quad\cdots\cdots(9)$$

H.Pickel[23] はこの式によつて計算した h_a の値は α を大即ち斜面勾配を急にすれば，又 L を大きくすれば小さくなることを認めている。

図－11



今 Darcy 法則から滲透水の鉛直方向の速度成分 V_y を無視して考へると，単位時間に滲透する水量 q は断 $\overline{AA_0}$ 面に於て，$y=h_a=\sin\ \alpha$, q を一定と考へると，$y=\frac{dy}{dx}=C_1$ (or $ha\ \tan\alpha=C_1$) 之を積分して境界条件 $x=0\ y=h_1$, $x=l\ y=h_a$ を入れて

$$\frac{y^2}{2}=ha\ \tan\ \alpha\ l+\frac{h_1^2}{2}$$

之に $\tan\ \alpha=\frac{h_a}{L=l}$（即ち $l=L-\frac{h_a}{\tan\ \alpha}$）を代入して

$$h_a=L\ \tan\ \alpha-\sqrt{L^2\ \tan^2\ \alpha-h_1^2}\quad\cdots\cdots(10)$$

を得る。(10)式は(9)式の変形式で h_a を L の函数として表わしたものである。又次の関係をも求めうる。

$$l=\sqrt{L^2-\frac{h_1^2}{\tan^2\ \alpha}}\quad\cdots\cdots(11)$$

(9)式は水位曲線の式，(10)式は h_a を与へる式，(11)式は α と h_1 を知つて l を求める式である。Casagrande[24] は実験を行つて之等の式が実験の結果とよく一致することを立証した。又(12)式を提唱している。

$$h_a=a\ \sin\ \alpha=m\ \sin\ \alpha-\sqrt{m^2\ \sin^2\ \alpha-h_1^2}\quad\cdots\cdots(12)$$

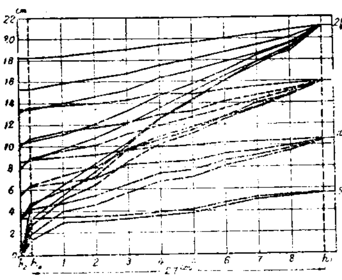
(10)式，(12)式は共に α の小さい間は実験とよく一致するが，斜面勾配が 1：3 より急になると終に一致しなくなる。何れにしても滲透面 a の存在することは明瞭である。又 Keutner は次の実験式を導いている。

$$h=\alpha\ x^{\zeta}\quad\cdots\cdots(13)$$

h は x 軸即ち不滲透面より測つた水位曲線の高さである。x は下流側堤体境界面を通る鉛直線から測つた距離である。α, ζ は $h_1-h_2=\Delta h$ 及び h_1, h_3 によつて定まるもので，h_1 又は h_2 の何れか一方を一定にして他を変動せしめる時は，その変化する方の値によつて h は支配される。又この式に当嵌まる部分は曲線の全部ではなくて，下流側から $^1/_5\ l$ 位の部分はこの曲線より下にあつて (13) 式の曲線より曲率は大きい。即ち水位曲線は下流側の近くで急に下降して来る。

次に示す 表－5 及び 図－12 は筆者が行つた実験結果を示したものであるが，図より明らかなように円滑な曲線を示していない。この原因

図－12



表－5

h_2	h_0	1	2	3	4	5	6	7	8	h_1
0.25	36	57	78	103	127	145	162	178	191	212
3.8	47	66	86	104	127	14.4	161	176	190	212
5.8	64	755	89	109	127	143	162	176	18.3	212
8.65	89	995	109	12.2	137	152	16.6	178	18.6	21.2
10.4	107	11.3	122	13.4	148	15.8	170	185	188	21.2
13.6	136	142	147	153	16.45	17.1	179	186	188	212
15.45	15.45	16.0	164	16.8	17.6	18.1	188	195	201	21.2
18.4	18.4	18.5	185	191	19.5	19.7	20.15	205	209	21.2
0.25	27	51	64	855	10.1	11.1	124	135	146	[illegible]
3.5	4.8	5.9	71	97	10.6	114	127	13.5	147	158
57	66	74	81	97	10.9	117	127	139	14.6	158
82	91	97	102	11.2	11.9	127	135	142	14.9	156
103	108	115	11.8	12.2	13.0	13.3	142	147	15.2	1575
133	137	140	141	144	15.0	150	153	15.6	158	1590
0.25	2.0	40	4.6	57	6.7	7.1	8.1	87	9.4	10.55
3.45	4.3	48	55	65	74	77	8.6	90	9.6	10.55
5.7	64	67	70	8.3	8.5	8.55	9.2	9.45	9.85	10.55
84	8.9	91	92	97	9.9	100	103	10.4	10.4	10.55
0.25	1.4	30	31	34	[illegible]	3.8	4.5	5.0	5.2	5.5
3.5	3.5	36	36	37	39	4.1	4.8	5.2	5.4	5.5

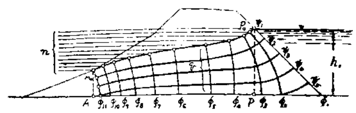
23) H.Pickel; Die Querschnitt Bemessung von Hochwasserdämmer aus durchlässigen Material. Baut. H. 5. 1927.

24) L.Casagrande; Näherungsverfahren zur Ermittluug der Sickerung in geschütteten auf undurchlässjger Sohle. Baut. H.15. 1934.

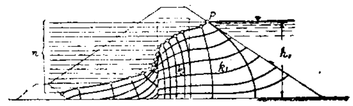
は滲透層部即ち堤体が均一に塡充されていない為めに起つたものと考へられる。従つて水位曲線に関する実験式を求めることが出来なかつた。

実際の堤体に於ける等ポテンシャル線及び流線が如何なる形を呈するかは以上述べ来つた理論から容易に推定出来る。滲透係数 k の値が方向によつて変化しないならば流線と等ポテンシャル線とは一応直交すると考へられるが，重力の働く場に於ては必ずしもそうはならない。即ち実際には 図—13，図—14 のようになると考へられる。 図—14 は不透水性核心壁を有する場合である。 之等の関係を理論的に推論しこの関係から滲透水量を算定することも出来る。[25]

図—13



図—14



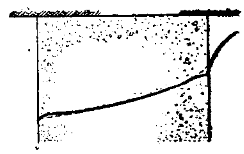
§8 結　語

筆者の行つた実験の如き滲透に関する理論は函数論により又具体的計算も楕円積分を用ひて行うことが出来る。然し之は純理論的考察であつてその実用化については研究の余地がある。筆者は Keutner の実験結果の次の2点について疑問を抱いた。

（1） 滲透水面 BC の存在を考へずに常に $h_0=h_2$ であるとし，従つて流出断面積を $F=h_2'b$ と考へていること。

（2） 滲透水位曲線を指数函数で表わし，一つの曲線を3つの部分に分けて考へていること。

図—15



筆者の行つた実験結果によれば次の如く考へられる。

即ち滲透水面 BC は常に存在する。従つて一般に $h_0 \neq h_2$ であつて G. Hamel の理論と一致する。尤も金網の影響をもつと厳密に研究すれば 図—15 の如き曲線を描くと考へられるが，之は無視出来る程度のものである。（2）に対しては砂の不均等性から滑らかな曲線を得ず実験式を得るに至らなかつたが Parabola に近い曲線で表わされるのがよく，指数函数で表わされない。

之を要するに本実験によつて滲透水量 Q は h_1 と $h_2 l$ との函数であると結論することが出来る。然しこの程度の概括的結論しか得られなかつた事は物足りない極みである。将来機を得て根本的に考究して見たいと考へている。尚本研究は文部省科学研究費の補助を受けていることを記して謝意を表したい。

25） E.Meyer—Peter, Henry Favere, R. Müller; Beitrag zur Berechnung der Standsicherheit von Erddämmer. Schw. B. 1936.

任意の境界を有する2次元弾性体が境界條件として境界の変位が与えられる場合の一般解法に就て

正員　岡　林　稔*

A GENERAL SOLUTION FOR A TWO-DIMENSIONAL ELASTIC BODY WITH ANY BOUNDARY FOR WHICH THE DISPLACEMENT OF THE BOUNDARY IS GIVEN AS BOUNDARY CONDITIONS.

By Minoru Okabayashi, C.E.Member

Synopsis; This paper may be regarded as the sequel of the one entitled "A General Solution for a Given Distribution of Stress on the Boundary" which was published before.

The author has clarified that, when displacement of the boundary is given, the matter is as well a solution of Fredholm's integral equation through a procedure similar to the one described in the former report. In the conclusion on the solution for the case in

* 名古屋工業大学