樹枝状組織の研究（その2）

正員　岡　本　但　夫*

A STUDY ON RAMIFIED STRUCTURE (Report No. 2)

Tadao Okamoto C. E. Member

Synopsis; In the study previously reported (Report No. 1), Model I was worked out for the investigation on moving to the outside the elements existing in a given area with the least resistance, on the assumption that the resistance is dependent solely upon the concentration of the elements and that the condition of various points on the ground surface is uniform.

As a matter of fact, however, there are ups and downs on the ground surface and geological aspects are different in different places, which means that, as in the case of rivers, the form of ramified structure is varied and that an ideal one cannot be expected. Moreover, among tributaries there are very large ones such as the Kinu in relation to the Tone, of which the idea of trunk and branch lines in Model I will be of no use for explanation.

This fact indicates that the idea of what are commonly called main and tributary courses of rivers does not always coincide with the idea of the trunk and branch lines in Model I. From the view-point of Model I, the relation between the Tone and the Kinu is not the one between the trunk and branch lines but running against each other of two rivers of nearly equal importance.

Two streams runnig side by side and emptying into the same sea sometimes run far apart from, and sometimes draw close to, each other according to the ups and downs of the ground surface; they even run against each other. The collision results in a conflux, where ordinarily the larger one is called the main course and the smaller the tributary course. Such phenomenas are very often experinced.

For analysing these phenomenas, Model II was worked out on a principle which was quite different from that of Model I, and investigations were started chiefly by means of this new model.

はしがき

前稿「樹枝状構造の研究その一」においてある区域内に存在する要素を最小抵抗を以て外部に出す事を研究する為模形その一を考へた。但し此場合抵抗は専ら要素の集中のみに関係し，その他は地表の各点の条件は全然均一と考えられた。

しかし実際には一例を河川に取るも地表は起伏及び地質を異にし，樹枝状組織の形もこれに応じて変貌し決して理想通りには行かない。此外支流の中には利根川における鬼怒川の如く模形その一における幹支線の観念を以てしては到底説明出来ぬ最大なものが存在する。

これは俗に言う本支川の観念が模形その一における幹支の観念と必ずしも一致しない事を示すもので，模形その一の観念を以てすれば利根川・鬼怒川の場合は幹支に非ずして略対等の二流の衝突と考えられるのである。同じ海に注ぐ平行な二流は地表の起伏に従つてあるいは離れ，あるいは近づきはては衝突する。衝突すれば合流が行はれ，此場合普通比較的大なる方を本流，小なる方を支流と呼ぶのを慣習としている。かゝる現象は世に頗る多い。よつてこれ等を解析する為模形その一とは全然異つた観点に立つて模形その二を考えこれを中心に研究を進める事にした。註・第1報に於ては「樹枝状構造」としたが今後は「樹枝状組織」と改める。

第1章　模形その2の定義

（1）平行2流の衝突

1.　模形その1においては地表の形が均一なりとの仮定の下に幹支線の分岐数を研究した。これによると同級の流はある間隔を置きつつ平行に流れて上級幹線に注ぐ事になつている。然るに実際には地表の勾配の為あるいは左，あるいは右に屈曲して幹線に達する迄には各流とも複雑な曲線を画いて進む。かゝる場合屡々起るのは二

* 東海科学専門学校教授

流の衝突，すなわち合流である。しからば平行二流は一般にどの位流下したら合流するであろうか？。模形その2の目的はすなわちこれを求むるにある。

2.　模形その2は地表面に起伏を有し乍ら一様に一方に傾いた面上に存在する要素（河流の場合には雨水）が地表面の凹処（谷）を点綴しつゝ流れ・山（突起部）に当つてあるいは左・あるいは右へと曲折しつつ流下するものと考える。此場合隣接二流が近づいて衝突が起る事もまた離れて起らぬ事もあらう。本模形の主眼とする所はある与へられた距離を隔てた二流は分れた儘どの位流下してから合流する場合が確率最大なるかを算出するにあり，これすなわち二流が別々に流れる平均の長さを求める事に外ならない。

3.　模形その1に於ては抵抗と集中量との間には下の如き関係を仮定した。

$R=Q^p$.　　　但し　R: 抵抗　　Q: 要素の集中量　　p: 1より小なる正数

しかし模形その2においては抵抗の観念は直接推理の上に表われて来ないので此仮定は有つても無くても差支え無い。唯衝突すれば合流して一体となる現象を事実と認めて下の如く定義しよう。

仮定1　要素は出遭へば合流し，一度合流したものは再び分流しない。しかして此間の数量的関係には特に定つた公式的関係は持たない。

右の仮定は例へば平野に出てからの河川の如く分流する場合には明に不適当である。しかし一般に河川の分流傾向は下流部の極一部に限られ，しかも数量的には合流する場合に比し比較にならない程少いから一応右の仮定は普通の河川流域の大部分に適合するものと考えられる。

（2）　模形その2

以上（1），（2）節で記した如き要求を満たすべく次の如き模形を取扱おう。

模形その2

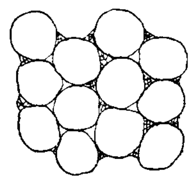
仮定1　略一様な小起伏を有し，全体としてある一方向に傾いた地域内に生ずる要素（例えば雨による水）が地表各点の勾配に従つて流れ下るものとする。

仮定2　起伏は完全に不規則である。よつて近似的に龜の甲形地塊の集りと見做し(蜂窩形)各六角形内（丘部）に生じた要素（河水の場合には雨水の水）は一応六角形の各辺に当る谷底部に集り，爾後此線に沿ふてのみ流れる。

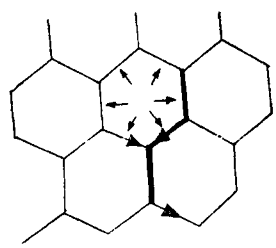
仮定3　流れは出合へば合流し，一度合流したものは再び分流しない。かくて流路は次第に集つて太りつゝ勾配に従つて下つて行く。

仮定4　流れは龜の甲辺にに沿ふて移動するも最急勾配に直角な方向に対しては左右に対し機会均等である。しかして最急勾配の方向に対しては不断前進のみあつて退転は無い。

図—1



図—2



以上模形その2においてある一点を出発した要素は流路を通つて他の要素と合流し乍ら最急勾配の方向に下る。しかしこれに直角を方向に対しては所により随時勝手に彷徨するであろうから図—3に示す如き不規則な流路を取る事となろう。

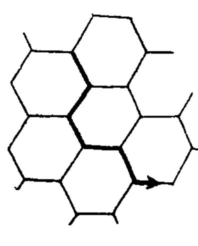
更にもつと全体を大観すれば図—4 の如き形が得られるであろう。

本模形の目的はこれ等不規則なる流路がどの点で合流するかを求むるにある。すなわち一つの流れ（之は不断小流を合せつゝ流下する）が自分と対等の大きさを持つ別の流と合流する迄にはどの位の長さを要するかといふ問題である。

之は勿論所により千差万別であらうがその中で最も確率の大なるものを求めるのが本問題の目的である。

しかして一般には流路が所によつては反つて逆行する様な部分を生じ得るであろうが（図—5 の如き），此場合は取扱が可成面倒故本模形においては仮定4によりかゝる場合を除外した。

図—3

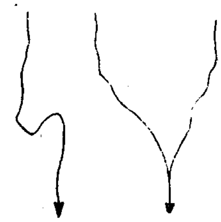


図—4

（3）　本模形の狙い

本模形の特色とする所は流路が完全に地表の地形に支配せられる所にある。実際の河川においては流路となつた所は浸蝕が進んで探掘をなし，これが周囲の小流を誘引し，更に河谷同志の争奪が行はれて逐次樹枝状組織の姿を変へて行く。かくて向ふべき最後の理想形こそ模形その1の狙つ

図－5　図－6



た抵抗最小の形である。これに対し模形その２は浸蝕の影響が全然無い，完全に地表の原形に従つたいはゞ最初の姿といつてよかろう。すなわち理想的な原始準平原（一方に傾いた）上の河流の流れを示す事となろう。此場合流路は最小抵抗の線では無くて専ら地表の地形，すなわち各地点における流れの進む方向は偶然が支配する（勾配最急の方向には特に優越し，之に直角な方向に対しては機会均等，反対の方向に対しては皆無）。

実際の河系においてはかくの如く一度隆起準平原面上において（模形その２が表徴する）流路の系が出来上つて後に浸蝕が始つて河谷の争奪が始まり，此処に始めて模形その１が示す終末理想系に向つて一歩を踏出す事となろう。かくて模形その２はその１が表わす終末理想形に対し始原形を表わすとゆうべく，すなわち各がその両極端を表わし，実際の流路の状態はその中間の種々の段階にあり複雑である。

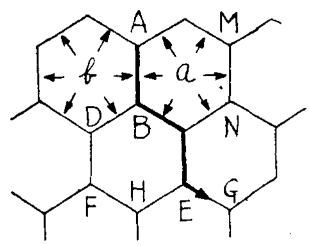
註　模形その１を終末理想形として終末形と書かなかつたのは現実の河谷においては最初の形が可成強く終末迄影響して終末においても中々理想の抵抗極小形にはならないと考えられる節があるからである。

第２章　任意の２點を出發する流路

（1）梗　概

先ず突起部（丘部）に生じた要素（河水の場合には降つた雨）は先ず龜の甲形の各辺に集中する。かくて図－7 の a 及び bに生じた要素の一部は辺 $\overline{AB}$ に集中して勾配に従つてBの方向に流下を始めるであろう。しかしてB点に到ると仮定３により分流が許されない以上C方向に向ふかD方向に向ふか何れかを選ばねばならない。しかるにC方向及びD方向に向ふ確率は仮定４により各 1/2 である（機会均等故）。

図－7

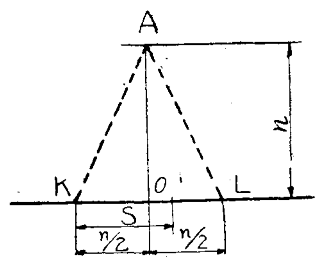


今Bにおいてはcの方に流れたとする。これはCに到つて $\overline{MN}$ 方面から来た流れと合流し（あるいは $\overline{MN}$ から来る流はN点で $\overline{NP}$ 方面へ向つてCには来ぬ場合もある。）E方向に流れ，Eに到つて $\overline{EG}$ 又は $\overline{EH}$ の何れかの方向を選ばなければならない。此場合も $\overline{EG}$ 及び $\overline{EH}$ 方向を選ぶ確率に何れも 1/2 である。

かくて龜の甲を一列下るごとに横の方向に半こまづつの移動が行われる。しかしその方向は一定せず左右に各向う確率は 1/2 である。

よつて今Aを出発した要素が最急勾配方向へ龜の甲 n 列だけ進んだ時には横の方向には最大限 $\overline{AO}$ 線（最急勾配方向に引いた線）より $n/2$ こまだけ左右に移動する事が可能である。

図－8



今最左端 $\overline{AK}$ 線を基準として考ふればこれは常に左へ左へと流れた場合の極限の場合である。図－7 B，C，E等の角において左又は右へ流れるごとに半こま宛移動する。之は $\overline{AK}$ 線に対しては常に不動か一こま右へ動くかといふ事と同じである。しかして一回右へ動く確率は 1/2 であるから今 $\overline{AK}$ 線よりＳこまの距離に流れが来る為には確率 1/2 なる事象がＳ回だけ起らねばならない事になる。よつてかゝる事の起る確率は

$$p=\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n!}{(n-s)!s!} \qquad \cdots\cdots(1)$$

但し　p：確率

（2）任意の２點を出發する流路

かの問題に入る。

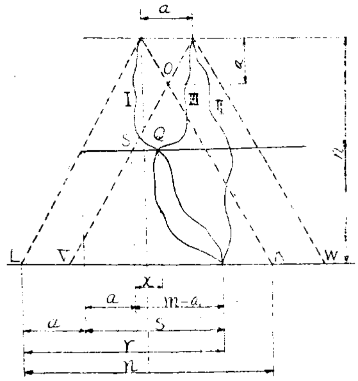
図－9 においてＡとＵとは高さ等しく（位置のエネルギーの等しい事を意味する）相互に龜の甲 a こまだけ離れた２点とする。

今Ａを出発した流れとＵを出発した流れとがＰ点において始めて出合い合流したとする。

此時 $\overline{AU}$ に平行してＰを通る直線 $\overline{LPW}$ を引き，$\overline{AL}$, $\overline{AK}$, $\overline{UV}$, $\overline{UW}$ との交点をそれぞれ L, K, V, W とし，且つ $\overline{AK}$ と $\overline{UV}$ との交点を O とし，直線 $\overline{LW}$ と $\overline{AU}$ との距離を龜の甲 n こまとする。

しかる時は（1）の１節に記した所により

図—9



$\overline{\mathrm{LK}}=n$ こま，　　　$\overline{\mathrm{VW}}=n$ こま，

更にP及びQ点については

$\overline{\mathrm{LP}}=r$　こま，　　　$\overline{\mathrm{VP}}=S$ こま

と書く。

先ずAを出発した流路（例えば図—9 I）は常に $\overline{\mathrm{AL}}$，AK に夾まれた区域内に限定せられる。よつて今Aより出発したものと，Uより出発したものとが合流するとすればその合流点は必ず $\overline{\mathrm{OV}}$，$\overline{\mathrm{OK}}$ に夾まれた区域でなければならない。今P点において始めて合流するものとする。此事は図—9 のQの如き途中の会合点が存在しない事を意味する。よつて問題は次の二段階に分れる。

イ，両流は直線 $\overline{\mathrm{LPW}}$ の上において会合する。

ロ，図—9 のQ点の如く途中には会合点は存在しない。

1，イの場合　A点を出発した流がP点に来る確率は前項の（1）式により

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

U点を出発したP流が点に来る確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{n!}{\{n-(r-a)\}!(r-a)!}$$

上の両流がP点において合流する，すなわち上の両現象が同時に起る確率は双方の積である。此場合の確率を p_1 とすれば

$$p_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\frac{n!}{(n-r)!r!}\times\frac{n!}{\{n-(r-a)\}!(r-a)!}\qquad\cdots\cdots(2)$$

しかしてかゝる事象が可能なのはP点がVよりK迄の区間の何れかの位置にある時である。よつて上の事象が線分 $\overline{\mathrm{VK}}$ 内のどこかで起る確率は p_1 の値を $\overline{\mathrm{VK}}$ 全域について積算したものとなる。此場合の確率を w_1 と書けば

$$w_1=\sum_{r=a}^{r=n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\frac{(n!)^2}{(n-r)!r!\{n-(r-a)\}!(r-a)!}\qquad\cdots\cdots(3)$$

2，ロの場合　次にQ点の存在せぬ確率を求めるに，先ずかゝる事が起つた場合を考ふれば図—9 の流路 I と III とは先に記した如く何れも三角形 $\overline{\mathrm{OVK}}$ の中になければならない。

よつて今Qが直線 $\overline{\mathrm{ST}}$ 上で起つたとし，かゝる現象の起る確率を求めよう。

$\overline{\mathrm{ST}}$ は $\overline{\mathrm{AU}}$ に平行で且 $\overline{\mathrm{AU}}$ より龜の甲 m こまの距離にある直線である。よつて

$\overline{\mathrm{ST}}=m$ こま，　　　$\overline{\mathrm{SQ}}=x$ こま

Qの起る確率（A，U二点より発した流路がQ点で出合う確率）を q_1とすれば（図—9 参照）

$$q_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\frac{(m!)^2}{(m-x)!x!\{m-(a+x)!(a+x)!}\qquad\cdots\cdots(4)$$

Q が $\overline{\mathrm{ST}}$ 線分上の何れかにおいて起る確率は

$$q_2=\sum_{a}^{a+m}q_1=\sum_{a}^{a+m}\frac{(m!)^2}{2^{2m}(m-x)!x!\{m-(a+x)\}!(a+x)!}$$

よつてかゝる事象の起らない確率は

$$1-q_2=1-\sum_{a}^{a+m}\frac{(m!)^2}{2^{2m}(m-x)!x!\{m-(a+x)\}!(a+x)!}\qquad\cdots\cdots(5)$$

Q が流れがPに到る迄すなわち第 n こまの線に到る迄存在せぬ為には，三角形の項点Oより底辺 LPW に到る間の各こまにつき Q が一度も存在せぬ事象が同時に起らなければならない。よつてかゝる確率を w_2 とすれば

$$w_2=\prod_{m=v}^{n}(1-q_2)=\prod_{m=a}^{n}\left\{1-\sum_{a}^{a+m}\frac{(m!)^2}{2^{2m}(m-x)!x!\{m-(a+x)\}!(a+x)!}\right\}\qquad\cdots\cdots(6)$$

3，依つてイとロとの双方の場合が同時に満足せられる確率は

$$w=w_1w_2=\left\{\sum_{r=a}^{r=n}\frac{(n!)^2}{2^{2n}(n-r)!r!\{n-(r-a)\}!(r-a)!}\right\}$$

$$\times\prod_{m=a}^{n}\left\{1-\sum_{x=a}^{a+m}\frac{(m!)^2}{2^{2m}(m-x)!x!\{m-(a+x)\}!(a+x)!}\right\}\qquad\cdots\cdots(7)$$

4，しかして実際に起り得る形はもとより千差万別であるがその中で最も確率大なるものを求むれば本問題の目的は達せられる訳である。之が為には w の値を n で微分して零と置くのも一方法であるが此微分は運算が甚だ厄介で，むしろ与へられた値について w を直接求め，その確率最大の点を plott した方が簡単に求められる様である。

実際計算に当つては（7）式の右辺の各級数の一般項の和を簡単に求むる事が困難である為計算には相当労力が入用である。

今与へられた若干の a の値に対応する n の値を算出すれば下表の如くなる。

a の値	3	4	5	6	8	10
n の値	8	12	18	24	40	66

（3） a が大なる場合

1.　梗概　a が大なる場合には必然的に n が大なる場合を取扱はねばならない。

既に第2章（1）節の（1）式により（図—8 参照），原点Aを出発した流れが n こまだけ下流に下つた場合に横方向の位置として，流れが一端KよりS番目のこまに現われる確率は

$$p=\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n!}{(n-s)!s!} \qquad \cdots\cdots(8)$$

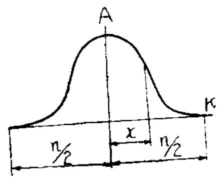
右は即ち2項分布の式に外ならない。

右関係は n がどれだけ大きくなつても少しも変らないから $n\to\infty$ の極限に於ては所謂正規分布となる。

今一端 L より $n/2$ こまの所を原点に取れば，原点より x なる距離に於ける p の値は統計学の公式により

$$p=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad \cdots\cdots(9)$$

図—10



但し σ：標準偏差

標準偏差 σ は統計学の公式により

$$\sigma=\sqrt{n\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{n}}{2} \qquad \cdots\cdots(10)$$

よつて

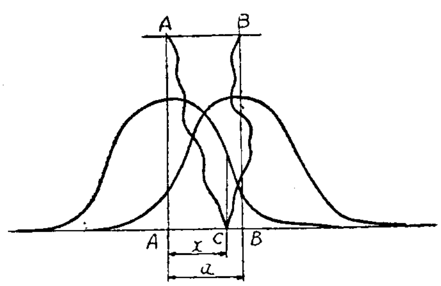
$$p=\sqrt{\frac{2}{n\pi}}e^{-\frac{2x^2}{n}} \qquad \cdots\cdots(11)$$

2.　二点A，Bより（図—11）各発した流れが A—A′ 線より x なる距離にある点Cに於て合流したとする。

Aを発した流れがC点に到る確率は

$$p_A=\sqrt{\frac{2}{n\pi}}e^{-\frac{2x^2}{n}}$$

図—11



Bを発した流れがC点に到る確率は

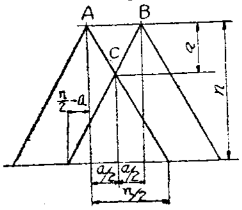
$$p_B=\sqrt{\frac{2}{n\pi}}e^{-\frac{2(a-x)^2}{n}}$$

C点において右両流が合流する。すなわち上の両事象が同時に起る確率は

$$p_C=p_Ap_B=\frac{2}{n\pi}e^{-\frac{n}{2}[x^2+(a-x)^2]} \qquad \cdots\cdots(12)$$

しかして本章（1）節に記した所によりA，B両起点より発した流れがこれ等より n なる距離にある直線 L—W 上において合流し得る範囲は V—K 間（図—12）である。よつて V—K 間のどの一点かにおいて合流の起る確率はその総でなければならない。これを w_1 で表わせば

図—12



$$w_1=\int_{a-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}p_C dx=\frac{2}{n\pi}\int_{a-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{2}{n}[x^2+(a-x)^2]}dx \qquad \cdots\cdots(13)$$

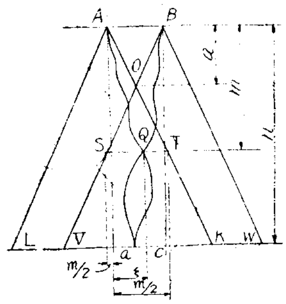
註　V点の座標；　$a-\dfrac{n}{2}$，K点の座標；　$\dfrac{n}{2}$

3.　次に図—13 のQ点の如くC点以前に於て合流の起らぬ確率を求めなくて

はならない。

Q点の存在し得る範囲は先に本章（2節）に記した如く△OVKの内部である。今Q点をA−B線より m なる距離にあるとし，Qを含みA−Bに平行な直線が△OVKの辺 $\overline{OV}$，$\overline{OK}$，と交る点をS，Tとすれば

図—13



O点の横座標　　$\frac{a}{2}$

S点〃　〃　　$\frac{a}{2}-\left(\frac{m-a}{2}\right)=a-\frac{m}{2}$

T点〃　〃　　$\frac{a}{2}+\left(\frac{m-a}{2}\right)=\frac{m}{2}$

よつて線分ST上にQ点の存在する確率は，2節の w_1 の推論と同様にして

$$\frac{2}{m\pi}\int_{a-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{2}{m}[\xi^2+(n-\xi)^2]}d\xi$$

よつてQの起らぬ確率は

$$1-\frac{2}{m\pi}\int_{a-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{2}{m}[\xi^2+(a-\xi)^2]}d\xi$$

かゝる事象がA−B線より n なる距離に到る全区間を通じて成立しなければならない。その確率はこれ等の総乗積である。すなわち之を w_2 とすれば

$$w_2=\prod_{m=a}^{n}\left\{1-\frac{2}{m\pi}\int_{a-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{m}{2}[\xi^2+(a-\xi)^2]}d\xi\right\} \quad\cdots\cdots(14)$$

4.　よつて会合CがVK線上において始めて起る，すなわちVK線上で必ず起り，それ以前には決して起らぬ確率はその両者の相乗積でなければならない。今之を w と置けば

$$w=w_1w_2=\left[\frac{2}{n\pi}\int_{a-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{2}{n}[x^2+(a-x)^2]}dx\right]\times\prod_{m=a}^{n}\left\{1-\frac{2}{m\pi}\int_{a-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{2}{m}[\xi^2+(a-\xi)^2]}d\xi\right\} \quad\cdots\cdots(15)$$

此 w が最大になる様な n の値を求める為，w を n で微分して零と置けば

$$w=w_1w_2$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}=w_1\frac{\partial w_2}{\partial n}+w_2\frac{\partial w_1}{\partial n}=0 \quad\cdots\cdots(16)$$

$w_2\neq 0$ であるから（w_2 は確率である故0ではない）

$$w_1\frac{1}{w_2}\frac{\partial w_2}{\partial n}+\frac{\partial w_1}{\partial n}=0 \quad\cdots\cdots(16)_1$$

今積分 $\int_{a-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}[x^2+(a-x)^2]}dx$ を $I(n)$ で表わせば，(13) 式より

$$w_1=\frac{2}{n\pi}I(n) \quad\cdots\cdots(17)$$

$$w_2=\prod_{m=a}^{n}\left\{1-\frac{2}{m\pi}I(m)\right\} \quad\cdots\cdots(18)$$

$$\therefore\frac{\partial w_1}{\partial n}=-\frac{2}{\pi n}I(n)+\frac{2}{n\pi}\frac{\partial I(n)}{\partial n} \quad\cdots\cdots(19)$$

今　$Z=\log w_2=\sum_{m=a}^{n}\log\{1-\frac{2}{m\pi}I(m)\}$　と置けば

$$\frac{\partial Z}{\partial n}=\log\left\{1-\frac{1}{n\pi}I(n)\right\},$$

又は　$\frac{\partial Z}{\partial n}=\frac{\partial Z}{\partial w_2}\frac{\partial w_2}{\partial n}=\frac{1}{w_2}\frac{\partial w_2}{\partial n}$

$$\therefore \frac{1}{w_2}\frac{\partial w_2}{\partial n}=\log\left\{1-\frac{2}{n\pi}I(n)\right\}=-\frac{2}{n\pi}I(n)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\{I(n)\}^2\cdots\cdots$$

一般に $\frac{2}{n\pi}I(n)$ は1より著しく小さい数故二乗以下を省略して

$$\frac{1}{w_2}\frac{\partial w_2}{\partial n}=-\frac{2}{n\pi}I(n)\qquad\cdots\cdots(20)$$

次に　$I(n)=\int_{a-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}[x^2+(a-x)^2]}dx=e^{-\frac{a^2}{n}}\int_{a-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{4}{n}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}dx$

を今少し都合のよい形に変形して置こう。今下の定積分から出発する。

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{4}{n}\xi^2}d\xi=\frac{\sqrt{\pi n}}{2}\qquad\cdots\cdots(21)$$

$\xi=x-\frac{a}{2}$ として変形すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{4}{n}\xi^2}d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{4}{n}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}dx=\int_{-\infty}^{a-\frac{n}{2}}e^{-\frac{4}{n}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}dx+\int_{a-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{4}{n}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}dx+\int_{\frac{n}{2}}^{\infty}e^{-\frac{4}{n}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}dx\qquad\cdots\cdots(22)$$

上の積分の被積分項を吟味するにその指数 $-\frac{4}{n}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$ は x が $-\infty$ より $+\infty$ に到る間において $x=\frac{a}{2}$ で 0 になり，その減少振は極めて迅速である。すなわち

$\frac{n}{2}$ の所では指数は　$-\frac{4}{n}\left(\frac{n}{2}-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{n}(n-a)^2$

$a-\frac{n}{2}$ の所では　$-\frac{4}{n}\left(a-\frac{n}{2}-\frac{a}{2}\right)=-\frac{1}{n}(n-a)^2$

すなわち双方等値となり，$e^{-\frac{1}{n}(n-a)^2}$ の絶対値は甚だ小となる。今例として $a=20$, $n=200$ の場合を取れば，指数

$$-\frac{1}{200}(180)^2=-162,\quad e^{-162}=4.15+10^{-71}$$

となり問題にならない数となる。

よつて (22) の右辺の第1，第3項は省略せられて殆んど

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{4}{n}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}dx=\int_{a-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{4}{n}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}dx=\frac{\sqrt{\pi n}}{2}$$

となり

$$I(n)\doteqdot e^{-\frac{a^2}{n}}\frac{\sqrt{\pi n}}{2}\qquad\cdots\cdots(23)$$

これより

$$\frac{\partial I}{\partial n}=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{n}}+\frac{a^2\sqrt{\pi n}}{2n^2}\right)e^{-\frac{a^2}{n}}\qquad\cdots\cdots(24)$$

(23)，(24) を (19) 及び (20) に代入すれば

$$\frac{\partial w_1}{\partial n}=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\left[\frac{a^2}{n^2}-\frac{1}{2n}\right]e^{-\frac{a^2}{n}},$$

$$w_1\frac{1}{w_2}\frac{\partial w_2}{\partial n}=-\frac{1}{n\pi}e^{-\frac{2a^2}{n}}$$

(16) により

$$w_1\frac{1}{w_2}\frac{\partial w_2}{\partial n}+\frac{\partial w_1}{\partial n}=-\frac{1}{n\pi}e^{-\frac{2a^2}{n}}+\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\left[\frac{a^2}{n^2}-\frac{1}{2n}\right]e^{-\frac{a^2}{n}}=0$$

$$\therefore\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{a^2}{n}}-\left(\frac{a^2}{n}-\frac{1}{2}\right)=0\qquad\cdots\cdots(25)$$

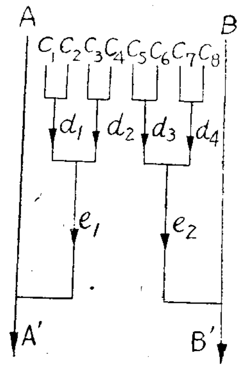
此式より a と n との関係が求められる。

a	10	20	40	100	200	1000	2000
n	66	218	728	3663	12620	233800	835000

(4) 結　論

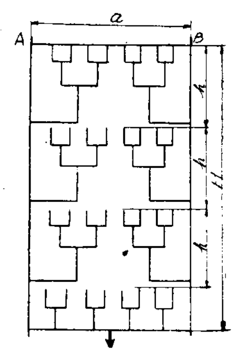
以上各節においてある距離を隔てた二点より出発した流れが合流する迄に流下する距離を求めた。これによれば一般に n は a の一乗より高い次数，すなわち二点間の距離の増加に比し合流点迄の距離は遙に急速に遠くなる事を示して居る。よつて右二点の中間にある流れは遙か手前で合流してしまう。

図—14



今図—14 A，B 二点の中間の $c_1, c_2, \cdots\cdots c_8, \cdots\cdots$ なる各点より発した流れを考うれば，之等は逐次隣接するもの同志適宜合流して $d_1, d_2, \cdots\cdots d_4 \cdots\cdots$ 各流となり，更に e_1, e_2 各流となり遂に $\overline{AA'}, \overline{BB'}$ の両流に合流する。此最後に $\overline{AA'}$ 及び $\overline{BB'}$ に合流するに到る距離はA，Bより最遠の点，すなわちA，Bより各 $a/2$ なる距離より流れた流れが合流する迄の距離で，前節(3)の(25)式に a の代りに $a/2$ を入れて n を求むれば得られる。今此長さを h とすれば，先に記した如く h は $n/2$ より遙に短い。よつて一旦 AB 線上の流れが一応整理せられて後(h なる距離内に整理せられる)。また同様の形の整理が繰返される。同様な事が $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ 両流が合流する迄有限回繰返されるであろう。これは勿論整数とは限らない。端数の場合には未だ1本にならぬ儘で本流に直接合流するであろう。(図—15 参照)

図—15



そこで h と n との関係であるがこれは一般に a によつて異る。しかし大しては変らない。今前節(25)式から出した表から求むれば

$a=20$ の時の n の数	(n)	218
$a=10$ 〃 〃	(h)	66
その比 $={}^{n}/_{h}=3.3$		
$a=200$ の時の n の数	(n)	12620
$a=100$ 〃 〃	(h)	3663
その比		3.45
$a=2000$ の時の n の数	(n)	835000
$a=1000$ 〃 〃	(h)	233800
その比		3.58

すなわち吾人の実用範囲においては大凡 3.3 乃至 3.58 の程度の間となる。