

# 一塑性理論の矩形梁への適用

正員 工博 星 埜 和\*

## APPLICATION OF A PLASTIC THEORY TO A RECTANGULAR BEAM

*Dr. Eng. Kano Hoshino C.E. Member*

**Synopsis** By applying his plastic theory to a rectangular beam, the author has determined the position of the neutral axis in the section, the plastic strain, the distribution of stress and the modulus of rupture at the time of breakage and obtained an approximate deflection curve of a beam.

It is an experimentally well-known fact that, with the increase of the bending moment, the neutral axis is shifted towards the compression side, the distribution of stress changes in the form of a curve and the modulus of rupture becomes greater than the tensile strength. These phenomena as well as the effect of Poisson's ratio on them can be theoretically explained by the author's theory. Besides, it seems that the theory will make it possible to calculate the increase of the bending deflection of beams due to plasticity.

**要旨** 著者の導いた塑性理論<sup>1)</sup>を矩形梁に適用して、断面に於ける中立軸の位置、塑性歪ミと応力の分布及び破壊を求め且梁の撓壊時の曲ゲ強ミ曲線を近似的に導いた。

実験的事実として知られている曲ゲモーメントが増すと中立軸が圧縮側に偏り応力分布が曲線状に変化すること、曲ゲ強サが引張り強サより大きいこと及びそれらの現象に及ぼすポアソン比の影響などを合理的に説明できるし、又塑性による梁の撓ミ沈下の増大を推算し得るようである。

### 1. まゝえがき

さきに著者は土のような塑性材料の変形と破壊についての1法則の誘導を試み、それが単純直応力、純粋剪断、圧密、静水圧等をうける場合の変形と破壊についての実験的事実をかなり合理的に説明できることを示した。

著者の塑性理論は土に限らず引張り又は圧縮をうけた時、応力の増加につれて歪ミの増進を見せて終いに破壊し、しかもその引張り強サが圧縮強サにくらべて一般に小さいような性質を示す材料に広く適用することができるように思はれるので、かような材料からなる矩形梁にこの理論を応用して、その内部応力の分布や曲ゲ強サを求め、又梁の撓ミ沈下を近似的に算定する公式を求めて見た。

考察に当つては次のように仮定した。

a. 梁の各断面は変形の後も平面を保つものとする。 b. 剪断力の影響は無視する。

a. の仮定は変形が一般に微小と考えられる時にのみ可能であるから、塑性変形を取扱う際には不適当な仮定であると考えられるが、塑性の影響は曲ゲモーメントが大きい部分に主として現はれ然も普通の梁では曲ゲモーメントの大きい部分でa. の仮定が略成立つものと考えてよい。特に対称荷重をうける梁の中央断面に於てはa. の仮定がそのまま当はまるのでその曲ゲ強サを正しく求めることができる。b. の仮定は梁の高さに比しスパンが特に短かく梁の支点附近で破壊が起るような場合を除いて応力の算定には差つかえないが、変形の計算には一般に不適当であつて、梁の撓ミ沈下曲線の形にかなりの影響を及ぼすものと考えられる。然しこゝでは計算を容易ならしめるため、この仮定をおいて近似的に取扱うにとりめた。

普通の矩形梁は両側面が自由に開放されていてこの面に直応力をうけることはないから、応力と歪ミの関係は3次元直応力(B2)の場合<sup>2)</sup>を用いることができる。若し梁の幅が充分広く、変形に際して側方への幅の伸縮が完全に妨げられていてと仮定できる時は、2次元平面変形(A2)の場合<sup>3)</sup>を用いればよい。A2とB2の場合に、応力と歪ミとの関係が丁度同じ形の式で表わされるので、2つの場合を同時に考えることにした。

\* 東大教授 第二工学部

1) 土のような塑性材料の変形と破壊についての基礎理論 土木学会論文集 昭和22,23年度,昭和24年3月

2) 前出論文集 95頁参照

3) 前出論文集 93頁参照

2. 梁の断面に於ける歪ミと応力

梁の断面に於て、その高サを  $h$ 、中立軸から  $y$  だけ離れた点の歪ミ度  $\varepsilon$  は  $y$  に比例するものとし且つ  $y=h/2$  に於ける歪ミ度を  $e$  とすれば (図-1 参照)

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2e}{h} y \dots\dots\dots (1)$$

応力  $\bar{\sigma}$  と歪ミ  $\bar{\varepsilon}$  の関係は次式で表わされる。<sup>4)</sup>

$$\bar{\varepsilon} \times \frac{V_0}{\sigma_0} = \gamma \left\{ \sin^{-1} \alpha - \sin^{-1} \left( \alpha - \beta \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \right) \right\} \dots\dots\dots (2)$$

こゝに A2 (plane strain):

$$\alpha = \frac{3\sqrt{2}\mu}{\sqrt{9+12\mu^2+16\mu^4}}$$

$$\beta = \frac{9-6\mu^2+16\mu^4}{2\sqrt{2}\mu(3+2\mu^2)\sqrt{9+12\mu^2+16\mu^4}}$$

$$\gamma = \frac{3+8\mu^2}{2\sqrt{2}\mu\sqrt{9-16\mu^2+16\mu^4}}$$

B2(Space stress):

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\mu$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3-2\mu^2}{6\mu}$$

$$\gamma = \frac{3+2\mu^2}{\mu\sqrt{2(3-2\mu^2)}}$$

図-1

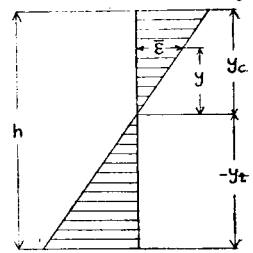


図-2

図-2 は応力-歪ミ曲線の例である。本式は次の如く書き改めることができる。

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = \frac{1}{\beta} \left\{ \alpha - \sin \left( \sin^{-1} \alpha - \frac{V_0}{\gamma \sigma_0} \bar{\varepsilon} \right) \right\} \dots\dots (3)$$

式(1)に於て

$$\varphi = \frac{V_0}{\gamma \sigma_0} e \dots\dots\dots (4)$$

とおけば

$$\bar{\varepsilon} = \frac{V_0}{\gamma \sigma_0} e = 2\varphi \frac{y}{h} \dots\dots\dots (5)$$

を得るから、式(3)に代入して

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = \frac{1}{\beta} \left\{ \alpha - \sin \left( \sin^{-1} \alpha - 2\varphi \frac{y}{h} \right) \right\} \dots\dots (6)$$

本式によつて梁の断面に於ける応力分布が与えられる。

次に梁の中立軸の位置を決定するため、梁の幅を  $b$  とし、圧縮側と引張側の応力の総和をそれぞれ  $C$  及び  $T$  とすると

$$\left. \begin{aligned} C &= \int_0^{y_c} b \bar{\sigma} dy = \frac{\sigma_0}{\beta} \int_0^{y_c} b \left\{ \alpha - \sin \left( \sin^{-1} \alpha - 2\varphi \frac{y}{h} \right) \right\} dy \\ T &= \int_0^{-y_t} b \bar{\sigma} dy = \frac{\sigma_0}{\beta} \int_0^{-y_t} b \left\{ \alpha - \sin \left( \sin^{-1} \alpha - 2\varphi \frac{y}{h} \right) \right\} dy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

式中  $y_c, y_t$ : 梁の中立軸から上端及び下端までの高サ (図-1)。

矩形梁の場合は  $b$  一定として積分すると

$$C = \frac{bh\sigma_0}{\beta} \left\{ \alpha \frac{y_c}{h} - \frac{1}{2\varphi} \cos \left( \sin^{-1} \alpha - 2\varphi \frac{y_c}{h} \right) + \frac{1}{2\varphi} \cos \left( \sin^{-1} \alpha \right) \right\}$$

$$T = \frac{bh\sigma_0}{\beta} \left\{ -\alpha \frac{y_t}{h} - \frac{1}{2\varphi} \cos \left( \sin^{-1} \alpha + 2\varphi \frac{y_t}{h} \right) + \frac{1}{2\varphi} \cos \left( \sin^{-1} \alpha \right) \right\}$$

4) 前出論文集 式(22)及び式(34), 93頁及び95頁

$U=T$  とおき且  $y_c = h - y_t$  であるから

$$\begin{aligned} \cos\left(\sin^{-1}\alpha - 2\varphi \frac{h-y_t}{h}\right) - \cos\left(\sin^{-1}\alpha + 2\varphi \frac{y_t}{h}\right) &= 2\alpha\varphi \\ -2\sin\left(\sin^{-1}\alpha + \varphi \frac{2y_t-h}{h}\right)\sin\left(\varphi \frac{-h}{h}\right) &= 2\alpha\varphi \end{aligned}$$

よつて

$$\frac{y_t}{h} = \rho = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\varphi} \left\{ \sin^{-1}\left(\frac{\alpha\varphi}{\sin\varphi}\right) - \sin^{-1}\alpha \right\} \right] \dots\dots\dots(8)$$

従つて梁の上下端に於ける歪ミ度と縁応力は式(5)及び式(6)に於てそれぞれ  $y = -y_t$ ,  $y = h - y_t$  において

$$\left. \begin{aligned} \text{引張側} \quad \frac{-V_0}{\varepsilon \sigma_0} &= -\gamma \left\{ \varphi + \sin^{-1}\left(\frac{\alpha\varphi}{\sin\varphi}\right) - \sin^{-1}\alpha \right\} \\ \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} &= -\frac{1}{\beta} \left[ -\alpha + \sin\left\{ \varphi + \sin^{-1}\left(\frac{\alpha\varphi}{\sin\varphi}\right) \right\} \right] \\ \text{圧縮側} \quad \frac{-V_0}{\varepsilon \sigma_0} &= \gamma \left\{ \varphi - \sin^{-1}\left(\frac{\alpha\varphi}{\sin\varphi}\right) + \sin^{-1}\alpha \right\} \\ \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} &= \frac{1}{\beta} \left[ \alpha + \sin\left\{ \varphi - \sin^{-1}\left(\frac{\alpha\varphi}{\sin\varphi}\right) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

3. 応力による曲ゲモーメント

次に断面に生ずる応力による曲ゲモーメントを求めると

$$\begin{aligned} M &= b \int_{-y_t}^{y_c} \bar{\sigma} y dy \\ &= \frac{b\sigma_0}{\beta} \int_{-y_t}^{h-y_t} \left\{ \alpha - \sin\left(\sin^{-1}\alpha - 2\varphi \frac{y}{h}\right) \right\} y dy \\ &= \frac{b\sigma_0}{\beta} \left[ \frac{\alpha}{2} y^2 - \frac{h}{2\varphi} y \cos\left(\sin^{-1}\alpha - 2\varphi \frac{y}{h}\right) - \frac{h^2}{4\varphi^2} \sin\left(\sin^{-1}\alpha - 2\varphi \frac{y}{h}\right) \right]_{-y_t}^{h-y_t} \\ &= \frac{bh^2\sigma_0}{2\beta} \left[ \alpha \left(1 - 2\frac{y_t}{h}\right) - \frac{1}{\varphi} \left(1 - \frac{y_t}{h}\right) \cos\left\{ \sin^{-1}\alpha - 2\varphi \left(1 - \frac{y_t}{h}\right) \right\} - \frac{1}{\varphi} \frac{y_t}{h} \cos\left(\sin^{-1}\alpha + 2\varphi \frac{y_t}{h}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\varphi^2} \sin\left\{ \sin^{-1}\alpha - 2\varphi \left(1 - \frac{y_t}{h}\right) \right\} + \frac{1}{2\varphi^2} \sin\left(\sin^{-1}\alpha + 2\varphi \frac{y_t}{h}\right) \right] \end{aligned}$$

式(8)の  $y_t/h$  を代入して整理すれば

$$M = W\sigma_0 \frac{3}{\beta} \left( \frac{1}{\varphi} - \cot\varphi \right) \sqrt{\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)^2 - \alpha^2} \dots\dots\dots(10)$$

但し  $W = \frac{bh^2}{\sigma}$  断面係数

梁の外力による各断面の曲ゲモーメントが与えられる時、本式から逆に  $\varphi$  の値を求め、式(8)より中立軸の位置を、式(5)及び(6)よりそれぞれ歪ミと応力の分布を、又式(9)より断面の上下端に於ける歪ミ度と縁応力を決定することができる。

4. 梁の破壊条件と曲ゲ強サ

梁の破壊は引張側の最大縁応力が引張強サの限界に達した時に起るものとしてとることができる。然るに材料の引張り強サは理論上  $d\bar{\sigma}/d\varepsilon = 0$  なる条件から求められるから、式(3)にこの条件を適用して

$$\frac{-V_0}{\varepsilon \sigma_0} = -\gamma \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\alpha \right)$$

を得、従つてこの値を式(3)に代入して引張強サを求めると

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} = -\frac{1}{\beta} (1 - \alpha) \dots\dots\dots(11)$$

式(9)の引張側に於ける応力が式(11)の値に等しいとおいて

$$\sin\left\{ \varphi + \sin^{-1}\left(\frac{\alpha\varphi}{\sin\varphi}\right) \right\} = 1$$

なる関係を得るから、これより矩形梁の破壊条件として

$$\frac{\sin 2\varphi}{2\varphi} = \alpha \dots\dots\dots(12)$$

を得る(表-1)。この式から  $\varphi$  の値を決定しこれを  $\varphi_b$  とすれば、梁が破壊する時の中立軸の位置及び曲ゲモー

メントは

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_{tb}}{h} = \rho_b &= \frac{1}{2\varphi_b} \left\{ \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \alpha \right\} \\ M_b &= W\sigma_0 \frac{3}{\beta} \left( \frac{1}{\varphi_b} - \cot \varphi_b \right) \sqrt{\left( \frac{\sin \varphi_b}{\varphi_b} \right)^2 - \alpha^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

従つて梁の曲げ強さを  $m_b\sigma_0$  とすると

$$m_b = \frac{M_b}{W\sigma_0} = \frac{3}{\beta} \left( \frac{1}{\varphi_b} - \cot \varphi_b \right) \sqrt{\left( \frac{\sin \varphi_b}{\varphi_b} \right)^2 - \alpha^2} \dots\dots\dots (14)$$

破壊を生ずる断面の上下端に於ける歪ミ度と縁応力はそれぞれ次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} \text{引張側} \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \frac{V_0}{\sigma_0} &= -\gamma \left\{ \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \alpha \right\} \\ \frac{\sigma}{\sigma_0} &= -\frac{1}{\beta} (1 - \alpha) \\ \text{圧縮側} \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \frac{V_0}{\sigma_0} &= \gamma \left( 2\varphi_b - \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \alpha \right) \\ \frac{\sigma}{\sigma_0} &= \frac{1}{\beta} (\alpha - \cos 2\varphi_b) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

5. 結果に対する考察

材料の力学的常数  $\mu$  に対する  $\varphi_b$ ,  $m_b$  及び  $\rho_b$  の値を求めると、図-3、図-4 及び図-5 (表-2, 表-3) が得られる。 $\mu$  はポアソン比<sup>5)</sup>  $\nu$  との間に

$$\mu = \sqrt{\frac{3(1-2\nu)}{4(1+\nu)}}$$

なる関係有し、 $\nu$  大ならば  $\mu$  小、 $\nu$  小ならば  $\mu$  大となる。図より  $\mu$  が増し従つて  $\nu$  が減ると、 $\varphi_b$  は小さくな

表-1

$\varphi$	$\alpha$
0.6	0.7767
0.7	0.7039
0.8	0.6247
0.9	0.5410
1.0	0.4546
1.1	0.3675
1.2	0.2814
1.3	0.1983
1.4	0.1196
1.5	0.0470
$\pi/2$	0

図-3

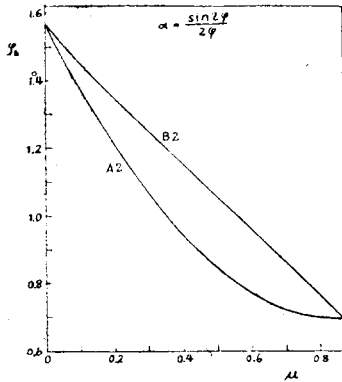


図-4

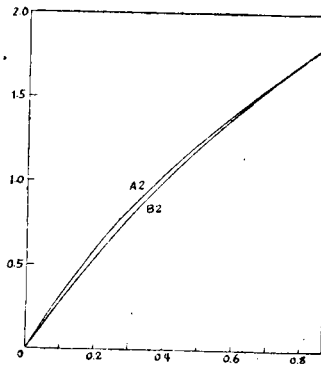


図-5

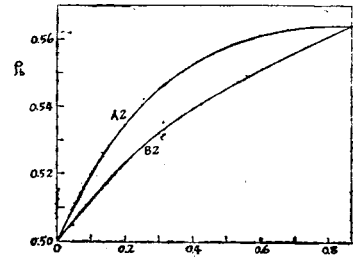


表-2 A2

$\mu$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\varphi_b$	$m_b$	$\rho_b$
0	0	$\infty$	$\infty$	1.5708	0	0.5000
0.1	0.140	3.460	11.92	1.3725	0.3202	0.5205
0.2	0.275	1.636	5.95	1.2073	0.5948	0.5350
0.3	0.399	0.999	4.49	1.0629	0.8305	0.5454
0.4	0.505	0.668	3.90	0.9423	1.0425	0.5528
0.5	0.588	0.476	3.63	0.8437	1.2326	0.5578
0.6	0.649	0.360	3.48	0.7696	1.4017	0.5613
0.7	0.688	0.290	3.33	0.7218	1.5579	0.5634
0.8	0.705	0.251	3.14	0.6980	1.7064	0.5642
0.866	0.707	0.235	3.00	0.6956	1.8041	0.5643

表-3 B2

$\mu$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\varphi_b$	$m_b$	$\rho_b$
0	0	$\infty$	$\infty$	1.5708	0	0.5000
0.1	0.0816	4.050	12.38	1.4513	0.2861	0.5128
0.2	0.1632	1.987	6.37	1.3443	0.5476	0.5236
0.3	0.2448	1.278	4.46	1.2431	0.7861	0.5322
0.4	0.3264	0.912	3.59	1.1481	1.0033	0.5396
0.5	0.4080	0.680	3.13	1.0540	1.2018	0.5463
0.6	0.4896	0.517	2.90	0.9604	1.3857	0.5517
0.7	0.5712	0.392	2.83	0.8640	1.5579	0.5567
0.8	0.6528	0.292	2.89	0.7664	1.7103	0.5616
0.866	0.7071	0.235	3.00	0.6956	1.8041	0.5643

5) 前出論文集 92 頁, 式 (15)

り、 $m_b$  と  $p_b$  とは大きくなることを知る。これは  $\sigma_0$  の等しい場合に梁の曲げ強さは  $\mu$  が大きい程大きく、又破壊時に於ける中立軸の偏りも  $\mu$  が大きい程大きいことを示している。 $p_b$  の最大は  $\mu=0.866$  に於て 0.5643 となつていて、中立軸が梁高の 6.43% だけ偏倚することを示す。A2 (plane strain) と B2 (Space stress) の場合を比較すると、 $m_b$  も  $p_b$  も A2 の方が大きい、 $\mu$  が 0 又は 0.866 に近い程その差は少なくなり、特に  $m_b$  の差は一般に僅かである。

今材料の曲げ強サ、引張り強サ及び圧縮強サを比較するため、それぞれの強サを  $\sigma_0$  で割つた値を  $m, t$  及び  $c$  とすると、それらの比は図-6 のようになる(表-4, 表-5)。この図から圧縮強サに対する曲げ強サと引張り強サの比は何れも  $\mu$  が大きいと小さくなり然も A2 の方が B2 より小さくなつてゐるが、曲げ強サの引張り強サに対する比は  $\mu$  が大きいほど大きくその範囲は 1.212 より 1.451 の間にあり、A2 の方が B2 よりやゝ大きくなつてゐる。

ポアソン比  $\nu$  が 0.13 であるような材料を例にとると、 $\mu$  は 0.70 となるから、B2 の場合に図-6 (表-4) から

$$m/t=1.423, m/c=0.389, t/c=0.272$$

実測の結果によると  $m/t$  は鋳鉄で 1.7、コンクリートで 1.5~2.0 となつており、計算値はやゝ小さすぎる。又コンクリートの  $t/c$  は 0.1 程度、 $m/c$  は  $1/7 \sim 1/5$  と云われるから計算値は何れも過大である。曲げ強サを一応の基準にとつて見ると、実測値は計算値に対し  $t$  が 0.8 倍、 $c$  が 2.0 倍程度となつてゐる。この相違は必ずしも理論の不備に起因するものと云うわけではなく、試験片の内部応力が破壊の際に不均一な分布を示し、破壊が一局部から起つて段々拡大すると云うような現象が大きく影響していると考えられるし、又試験片の支持状態の影響も考えられる。量的な一致を得るにはこのような点を考慮して理論を組立てなければならぬが、著者の塑性理論から導かれた結論は材料の実験的な力学的諸性質と傾向的に矛盾することなくその変形と破壊の機構を巧みに説明することができるように思われる。

図-6

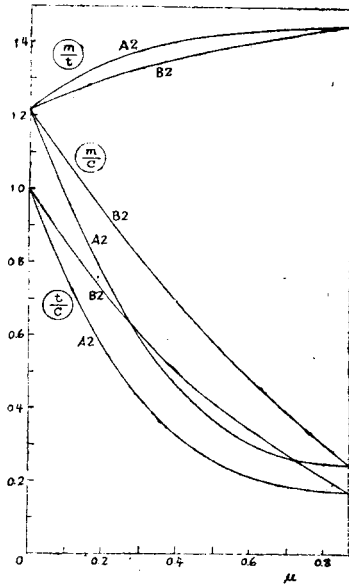


表-4 A2

$\mu$	$m$	$t$	$c$	$m/t$	$m/c$	$t/c$
0	0	0	0	1.212	1.212	1.000
0.1	0.320	0.248	0.329	1.291	0.973	0.753
0.2	0.595	0.443	0.779	1.343	0.763	0.569
0.3	0.830	0.603	1.401	1.377	0.593	0.430
0.4	1.043	0.743	2.260	1.405	0.461	0.328
0.5	1.233	0.865	3.342	1.425	0.369	0.259
0.6	1.402	0.976	4.600	1.436	0.305	0.212
0.7	1.558	1.080	5.821	1.443	0.267	0.185
0.8	1.706	1.180	6.793	1.447	0.251	0.173
0.866	1.804	1.243	7.242	1.451	0.249	0.172

表-5 B2

$\mu$	$m$	$t$	$c$	$m/t$	$m/c$	$t/c$
0	0	0	0	1.212	1.212	1.000
0.1	0.286	0.227	0.267	1.260	1.071	0.850
0.2	0.548	0.421	0.586	1.301	0.930	0.719
0.3	0.786	0.590	0.973	1.332	0.808	0.606
0.4	1.003	0.739	1.455	1.358	0.690	0.507
0.5	1.202	0.870	2.071	1.381	0.580	0.420
0.6	1.386	0.987	2.881	1.404	0.481	0.342
0.7	1.558	1.091	4.002	1.423	0.389	0.272
0.8	1.710	1.185	5.651	1.443	0.303	0.210
0.866	1.804	1.243	7.242	1.451	0.249	0.172

曲げモーメントの増大に伴う  $\phi$  と  $\rho$  の変化する有様は図-7 (A2) 及び図-8 (B2) (次頁) の如くなる。 $\phi$  も  $\rho$  も曲げモーメントが増すと逡加的に増し、その増し方は  $\mu$  が小さいほど大きい。その傾向は A2 も B2 も大きな差異はない。

曲げモーメントが増するとき、断面の歪み度と応力の分布が変化の様子は A2 で  $\mu$  が 0.3, 0.5 及び 0.7 の場合について図示すると図-9 (次頁) のようになる。

### 6. 矩形梁の撓み曲線

塑性材料からなる梁の撓みは破壊に近付くとかなり大きくなるが、塑性の影響は梁の中央附近に著しく表われるから、取扱上の便宜を考えて次式が近似的に成立つものと仮定することができよう。

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{2e}{h} = -\frac{2\gamma\sigma_0}{V_0 h} \dots\dots\dots(16)$$

図-7

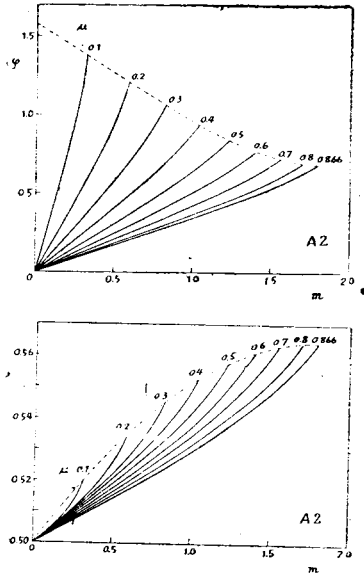
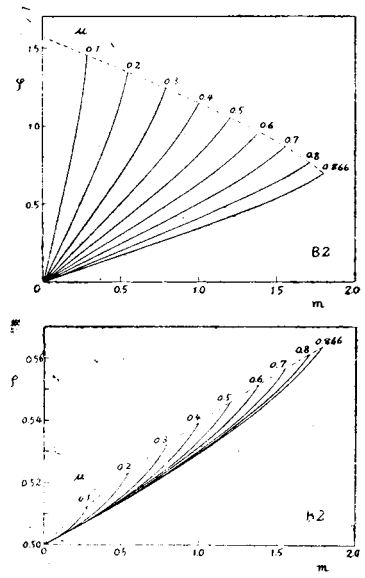


図-8



然るに式 (10) から

$$m = \frac{M}{W\sigma_0} = \frac{3}{\beta} \left( \frac{1}{\varphi} - \cot\varphi \right) \sqrt{\left( \frac{\sin\varphi}{\varphi} \right)^2 - \alpha^2}$$

展開して次式を得る。

$$m = \frac{1}{k} \left\{ \varphi - i_3\varphi^3 - i_5\varphi^5 - i_7\varphi^7 - \dots \right\} \dots\dots(17)$$

ここに

$$k = \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$i_3 = \frac{1}{6(1-\alpha^2)} - \frac{1}{15}$$

$$i_5 = \frac{1}{9} \left\{ \frac{1}{8(1-\alpha^2)^2} - \frac{1}{10(1-\alpha^2)} - \frac{2}{35} \right\}$$

$$i_7 = \frac{1}{9} \left\{ \frac{1}{48(1-\alpha^2)^3} - \frac{1}{40(1-\alpha^2)^2} + \frac{11}{1050(1-\alpha^2)} - \frac{1}{175} \right\}$$

本式を逆に展開し直すと次式を得る。

$$\varphi = km + j_3(km)^3 + j_5(km)^5 + j_7(km)^7 + \dots\dots(18)$$

ここに

$$j_3 = i_3$$

$$j_5 = 3i_3^2 + i_5$$

$$j_7 = 13i_3^3 + 8i_3i_5 + i_7$$

梁の任意の断面に於ける曲ゲモーメントを  $M = m\sigma_0 W$ 、  
最大の曲ゲモーメントを  $M_0 = m_0\sigma_0 W$  として

$$\lambda = \frac{M}{M_0} = \frac{m}{m_0} \dots\dots(19)$$

とおき且梁の支間を  $l$  として

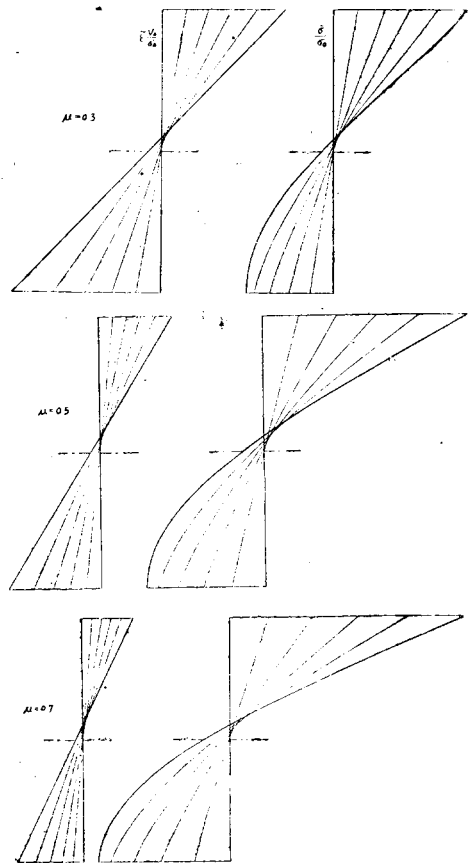
$$\xi = \frac{2x}{l} \dots\dots(20)$$

とおくと、 $\lambda$  は梁の各点に於ける曲ゲモーメントの分布を

示し  $x$  従つて  $\xi$  の函数で表わされる。且  $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{4}{l^2} \frac{d^2\eta}{d\xi^2}$  であるから式 (16) と式 (18) から

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{\gamma\sigma_0 l^2}{2V_0 h} \left\{ k\lambda m_0 + j_3(k\lambda m_0)^3 + j_5(k\lambda m_0)^5 + j_7(k\lambda m_0)^7 + \dots \right\}$$

図-9



積分して撓み曲線を求めると

$$\eta = c'' + c'\xi - \frac{\gamma\sigma_0 l^2}{2V_0 h} \left\{ km_0 \int \int \lambda d\xi d\xi + j_3 k^2 m_0^3 \int \int \lambda^3 d\xi d\xi + j_5 k^5 m_0^5 \int \int \lambda^5 d\xi d\xi + j_7 k^7 m_0^7 \int \int \lambda^7 d\xi d\xi + \dots \right\} \dots (21)$$

曲ゲモーメントの分布即ち  $\lambda$  が与えられる時は、本式の積分を行い、境界条件から  $c'$  及び  $c''$  を決定して梁の撓み曲線を定めることができる。

単梁の場合について (1) 中央に集中荷重ある時と (2) 満載等分布荷重の時の撓み曲線を

$$\eta = \frac{\gamma\sigma_0 l^2}{2V_0 h} \{ km_0 \psi_1 + j_3 k^3 m_0^3 \psi_3 + j_5 k^5 m_0^5 \psi_5 + j_7 k^7 m_0^7 \psi_7 + \dots \} \dots (22)$$

とおいて  $\psi_1, \psi_3, \psi_5, \psi_7$  等を求めて見よう。

表-6 A2

(1) 中央に集中荷重  $P$  がある時の単梁の撓み

$$M = \frac{Pl}{2}, \quad M_0 = \frac{Pl}{4}, \quad \therefore m_0 = \frac{Pl}{4W\sigma_0}$$

であるから

$$\lambda = \frac{M}{M_0} = \frac{2x}{l} = \xi$$

積分して境界条件を入れると

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \left( \xi - \frac{\xi^3}{3} \right)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{4} \left( \xi - \frac{\xi^5}{5} \right)$$

$$\psi_5 = \frac{1}{6} \left( \xi - \frac{\xi^7}{7} \right)$$

$$\psi_7 = \frac{1}{8} \left( \xi - \frac{\xi^9}{9} \right)$$

梁の中央に於ける撓みを求めるには  $\xi=1$  とおいて

$$\psi_1 = \frac{1}{3}, \quad \psi_3 = \frac{1}{5}, \quad \psi_5 = \frac{1}{7}, \quad \psi_7 = \frac{1}{9}$$

荷重  $P$  が小さい間は  $M_0$  従つて  $m_0$  が小さいから式 (22) の第 1 項だけを取ると

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\gamma\sigma_0 l^2}{2V_0 h} km_0 \psi_1 \\ &= \frac{\gamma\sigma_0 l^2}{2V_0 h} \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{Pl}{4W\sigma_0} \frac{1}{2} \left( \xi - \frac{\xi^3}{3} \right) \end{aligned}$$

然るに断面 2 次モーメント  $J$  は  $Wh/2$  に等

しく、 $\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\beta\gamma} V_0$  は応力-歪み曲線の初期接線係数で B2 の場合は  $E$  に等しいから上式は

$$\eta = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ} \times \frac{3}{2} \xi \left( 1 - \frac{\xi^2}{3} \right)$$

となつて弾性理論の結果と一致する。

梁が破壊する時の撓み曲線は式 (14) から求まる  $m_b$  の値を  $m_0$  に代入して計算すれば求まる、図-10 (次頁) は破壊の際の撓み曲線を求め、弾性計算の場合と比較したものである。又図-11 (次頁) は曲ゲモーメントの増大に伴い梁の中央に於ける撓みが増大する模様を計算したものでやはり弾性沈下との比較を示した。塑性による撓みの増大量は思つたほど大きくないようである。

(2) 満載等分布荷重  $p$  による単梁の撓み

$$M = \frac{p}{2} x(l-x), \quad M_0 = \frac{pl^2}{8}$$

であるから

$$\lambda' = M/M_0 = \xi(2-\xi)$$

$\mu$	$k$	$i_3$	$i_5$	$i_7$	$j_3$	$j_5$	$j_7$
0	$\infty$	0.1000	-0.0036	0	0.1000	0.0264	0.0091
0.1	3.495	0.1033	-0.0032	0.0001	0.1033	0.0289	0.0107
0.2	1.701	0.1134	-0.0016	0.0003	0.1134	0.0371	0.0169
0.3	1.087	0.1315	0.0001	0.0007	0.1315	0.0520	0.0284
0.4	0.775	0.1567	0.0037	0.0015	0.1567	0.0775	0.0517
0.5	0.589	0.1880	0.0091	0.0029	0.1880	0.1150	0.0958
0.6	0.474	0.2213	0.0159	0.0039	0.2213	0.1629	0.1617
0.7	0.400	0.2497	0.0226	0.0074	0.2497	0.2098	0.2397
0.8	0.354	0.2646	0.0265	0.0089	0.2646	0.2365	0.2870
0.866	0.333	0.2666	0.0270	0.0091	0.2666	0.2403	0.2965

表-7 B2

$\mu$	$k$	$i_3$	$i_5$	$i_7$	$j_3$	$j_5$	$j_7$
0	$\infty$	0.1000	-0.0036	0	0.1000	0.0264	0.0091
0.1	4.066	0.1011	-0.0035	0.0001	0.1011	0.2710	0.0095
0.2	2.014	0.1045	-0.0031	0.0001	0.1045	0.0296	0.0107
0.3	1.318	0.1106	-0.0025	0.0002	0.1106	0.0341	0.0148
0.4	0.965	0.1198	-0.0014	0.0004	0.1198	0.0418	0.0194
0.5	0.745	0.1333	0.0003	0.0008	0.1333	0.0537	0.0299
0.6	0.593	0.1525	0.0031	0.0014	0.1525	0.0730	0.0472
0.7	0.478	0.1807	0.0078	0.0025	0.1807	0.1059	0.0846
0.8	0.386	0.2237	0.0165	0.0052	0.2237	0.1665	0.1691
0.866	0.333	0.2666	0.0270	0.0091	0.2666	0.2403	0.2965

6) 式 (3) より  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  を求め  $\varepsilon=0$  とおくとこの値を得る。

図-10

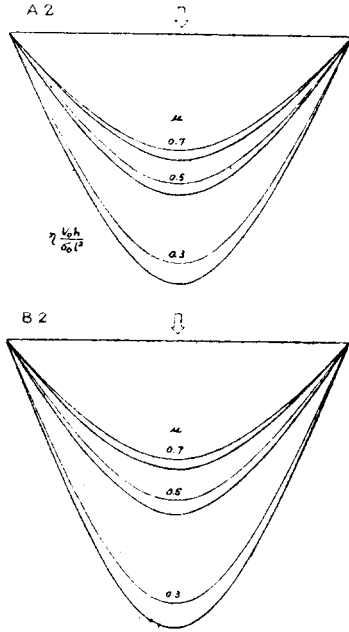
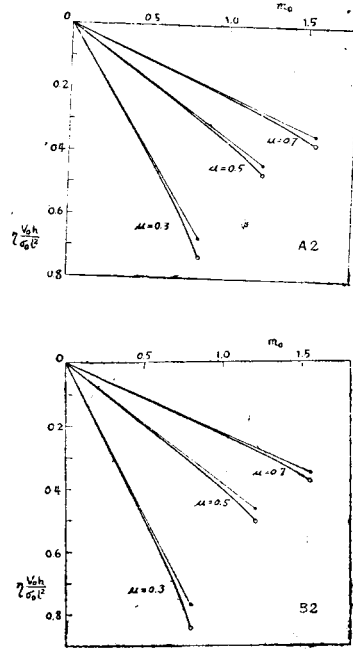


図-11



よつて

$$\psi_1 = \frac{2}{3}\xi - \frac{1}{3}\xi^3 + \frac{1}{12}\xi^4$$

$$\psi_3 = \frac{16}{35}\xi - \frac{2}{5}\xi^5 + \frac{2}{5}\xi^6 - \frac{1}{7}\xi^7 + \frac{1}{56}\xi^8$$

$$\psi_5 = \frac{256}{693}\xi - \frac{16}{21}\xi^7 + \frac{10}{7}\xi^8 - \frac{10}{9}\xi^9 + \frac{4}{9}\xi^{10} - \frac{1}{11}\xi^{11} + \frac{1}{132}\xi^{12}$$

$$\psi_7 = \frac{2048}{6435}\xi - \frac{16}{9}\xi^9 + \frac{224}{45}\xi^{10} - \frac{336}{55}\xi^{11} + \frac{140}{33}\xi^{12} - \frac{70}{39}\xi^{13} + \frac{6}{13}\xi^{14} - \frac{1}{15}\xi^{15} + \frac{1}{240}\xi^{16}$$

梁の中心では  $\xi=1$  とおいて

$$\psi_1 = \frac{5}{12}$$

$$\psi_3 = \frac{93}{280}$$

$$\psi_5 = \frac{793}{2772}$$

$$\psi_7 = \frac{26333}{102960}$$

$p$  が小さい間は式(22)の第1項だけとると

$$\eta = \frac{\gamma \sigma_0 l^2}{2V_0 h} k m_0 \psi_1 = \frac{\gamma \sigma_0 l^2}{2V_0 h} \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}} \frac{p l^2}{8W\sigma_0} \frac{1}{3} \xi \left( 2 - \xi^2 + \frac{1}{4} \xi^3 \right)$$

B2の場合に

$$\eta = \frac{5}{384} \frac{p l^4}{EJ} \cdot \frac{4}{3} \xi \left( 2 - \xi^2 + \frac{1}{4} \xi^3 \right)$$

となり弾性理論の結果と一致する。

本研究に於ける諸数値計算は宇田川和子君に負う所極めて大である。附記して厚く謝意を表する。