梁及び矩形版の撓み振動の理論

正員 喜 内 敏*

VIBRATION THEORY OF THE DEFLECTION OF BEAMS AND RECTANGULAR SLABS

Bin Kinai C. E. Member.

Synopsis; Influence of vibration load upon beams and slabs has been studied for various purposes.

There are many methods, i. e. Stokes method.' This paper describes about the most general case.

目 次

緒 言

梁及び版の振動荷重による影響は，これまで種々の目的のために研究されている。即ち作用点の移動しない場合は繰返し荷重及び衝撃荷重などに関して論ぜられ，又作用点の移動する場合は主として橋梁及び鋪装版などの振動に関連して考察され，普通一定或は単独的変動の荷重が等速度で走行するものとして取扱われている。これらの問題を解くには，Stokes の方法を始めとして種々の方法が考えられているが，本文では最も一般的な場合を取扱うこととし，特に荷重の質量を考慮しない場合は Inversion formulae の1種として Laplace 変換を応用し，これを撓みの一般式中に記号として含ましめたのである。

本文の結果を適当に利用すれば，従来あまり知られなかつた撓みに対する荷重の時間的影響，走行荷重の速度の影響或は単一の衝撃及び軌条継目にて受ける如き継続的な衝撃の影響などを具体的に計算出来る。

本研究は京大教授石原藤次郎博士の御指導御激励によつて行われたものであり，その間京大教授国井修二郎博士，同林重憲博士及山梨工専宮武修教授の御教示を賜つた点も甚だ多い。茲に深謝の意を表する次第である。

第1編 梁の撓み振動

1. 單一集中荷重を受ける場合の一般公式

（1） エネルギー式による誘導

(a) 荷重の質量を考慮する場合

断面一様にして支間 l なる梁の両端が自由支持の場合，任意点 x に於ける梁の撓み $y(x;t)$ は一般座標 q_{rt} を

* 金沢工専教授

用いて一般に次の如く展開される。

$$y(x;t)=\sum_{r=1}^{\infty} q_{rt}\cdot\sin\frac{r\pi x}{l} \quad \cdots\cdots(1)$$

次に梁運の動及び位置のエネルギー T 及び V を，梁の廻転慣性剪断力及び軸力の影響を考慮して計算すると，

$$T=\frac{1}{2}\frac{\gamma A_0}{g}\int_0^l\left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial t}\right)^2+\sigma(k_1^2-k_2^2)\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\partial t}+k_1^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\right)^2\right\}dx \quad \cdots\cdots(2)$$

$$V=\frac{EJ}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2dx+\frac{E^2J^2k_0}{2GA_0}\int_0^l\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^2dx+\frac{k_1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dx-\frac{\mathfrak{n}(t)}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dx \quad \cdots\cdots(3)$$

茲に，　γ：梁の材料の単位重量，　A_0：梁の断面積，　g：重力加速度，
J：度梁の慣性 2 次モーメント，　E：梁のヤング率，　σ：梁のポアソン比，
G：梁の剛性係数，　k_0：梁の横断面の形状に関する係数，
k_1：梁の捩り剛さ，　k_2：曲げの面を含む方向に於ける中立軸に関する断面の廻転 2 次半径，
$\mathfrak{n}(t)$：時間的に変動する軸方向荷重，　l：梁の支間，　t：時間.

(2)，(3) 式に (1) 式を代入し直交函数の性質を利用して整理すると，

$$T=\frac{M}{4}\left[\sum_{r=1}^{\infty}\dot{q}_{rt}^2+\{(1-\sigma)k_1^2+\sigma k_2^2\}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{r\pi}{l}\right)^2\dot{q}_{rt}^2\right] \quad \cdots\cdots(4)$$

$$V=\frac{EJ\pi^4}{4l^3}\sum_{r=1}^{\infty}y^4q_{rt}^2+\frac{E^2J^2\pi^6k_0}{4GA_0l^5}\sum_{r=1}^{\infty}r^6q_{rt}^2+\frac{\pi^2}{4l}\{k_1-\mathfrak{n}(t)\}\sum_{r=1}^{\infty}r^6q_{rt}^2 \quad \cdots\cdots(5)$$

茲に M は梁の全質量にして，F を散逸函数 (Dissipation function)，k を梁の減衰係数とすれば

$$F=k\frac{\gamma A_0}{g}\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2dx=\frac{kM}{2}\sum_{r=1}^{\infty}\dot{q}_{rt}^2 \quad \cdots\cdots(6)$$

である。今質量 m なる時間的に変動する荷重 $\mathfrak{p}(x;t)$ が速度 $v(t)$ にて梁の上を移動する場合，一般力 Q_r は次式にて表される。[1]

$$Q_r=\left\{mg+\mathfrak{p}(x;t)-m\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}q_{jt}\sin\frac{j\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau\right)\right\}\sin\frac{r\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau \quad \cdots\cdots(7)$$

但し $\mathfrak{p}(x,t)$ 中の x は荷重の移動距離であるから，$x=\int_0^t v(\tau)d\tau$ なる関係によつて $\mathfrak{p}(x;t)$ は t の与えられた函数である。

上の各式を Lagrange の運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{rt}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_{rt}}+\frac{\partial F}{\partial\dot{q}_{rt}}=-\frac{\partial V}{\partial q_{rt}}+Q_r \quad \cdots\cdots(8)$$

に代入して整理すると。

$$\frac{M}{2}\left[1+\{(1+\sigma)k_1^2+\sigma k_2^2\}\left(\frac{r\pi}{l}\right)^2\right]\ddot{q}_{rt}+kM\dot{q}_{rt}+\left\{\frac{EJ\pi^4}{2l^3}r^4+\frac{E^2J^2\pi^6k_0}{2GA_0l^5}r^6+\frac{\pi^2}{2l}k_1-\mathfrak{n}(t)r^2\right\}q_{rt}$$
$$=\left[mg+\mathfrak{p}(x;t)-m\sum_{j=1}^{\infty}\left[\ddot{q}_{jt}\sin\frac{j\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau+2\dot{q}_{jt}\frac{j\pi}{l}v(t)\cos\frac{j\pi}{l}\int_0^t a(\tau)d\tau+q_{jt}\frac{j\pi}{l}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left\{\cos\frac{j\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau\frac{dv(t)}{dt}-\left(\frac{j\pi}{l}\right)v^2(t)\sin\frac{j\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau\right\}\right]\right]\sin\frac{r\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau \quad \cdots\cdots(9)$$

この式から q_{rt} を求めて (1) 式に入れると所要の解が得られるが，(9) 式を解くことは殆ど不可能である。今軸方向力を零とし走行荷重が等速度 v にて進行するものとすれば (9) 式は，

$$K_r^2\ddot{q}_{rt}+kM\dot{q}_{rt}+L_r^2q_{rt}=\left[\mathfrak{p}(x:t)+mg-m\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\ddot{q}_{jt}\sin\frac{j\pi vt}{l}+2\dot{q}_{jt}\frac{j\pi}{l}v\cos\frac{j\pi vt}{l}\right.\right.$$
$$\left.\left.-q_{jt}\left(\frac{j\pi}{l}\right)^2v^2\sin\frac{j\pi vt}{l}\right\}\right]\sin\frac{r\pi vt}{l} \quad \cdots\cdots(10)$$

茲に，

$$K_r=\sqrt{\frac{M}{2}\left[1+\{(1-\sigma)k_1^2+\sigma k_2^2\}\left(\frac{r\pi}{l}\right)^2\right]} \quad \cdots\cdots(11)$$

$$L_r=\sqrt{\frac{\pi^2r^2}{2l}\left(\frac{EJ\pi^2r^2}{l^2}+\frac{E^2J^2\pi^4k_0r^4}{GA_0l^4}+k_1\right)} \quad \cdots\cdots(12)$$

---

1) 三瀬幸三郎，国井修二郎；九大弾性工学研究所報告，第 1 巻第 1 号，昭 18—3，頁 9．

この (10) 式を解くことも極めて困難であるが，右辺が軸対称行列をなしているから，梁の質量に比べて荷重の質量がかなり小さい時は，次の如く Iteration method[2] によることが出来る。即ち右辺の対角行列のみをとると，

$$\ddot{q}_{rt}\left\{\boldsymbol{K}_r^2+\frac{m}{2}\left(1-\cos\frac{2r\pi vt}{l}\right)\right\}+\dot{q}_{rt}\left(kM+m\frac{r\pi v}{l}\sin\frac{2r\pi vt}{l}\right)$$
$$+q_{rt}\left\{\boldsymbol{L}_r^2-\frac{m}{2}\left(\frac{r\pi}{l}\right)^2 v^2\left(1-\cos\frac{2r\pi vt}{l}\right)\right\}=\{\mathfrak{p}(x;t)+mg\}\sin\frac{r\pi vt}{l} \quad\cdots\cdots(13)$$

この式から q_{rt} を求めるのであるが，左辺の $\ddot{q}_{rt}$, $\dot{q}_{rt}$ 及び q_{rt} の各係数が夫々時間 t の函数となつているから，近似的に数値積分による方が適当と思われる。この求めた q_{rt} を (1) 式に代入して撓みの第1近似値が得られるが，この q_{rt} を原式 (10) の右辺に代入し第2の近似値を求め，順次繰返して q_{rt} の正しい値に近づけることが出来る。

(b) 荷重の質量を考慮しない場合

走行荷重の質量を考えない場合は (9) 式にて $m=0$ とし，(11)，(12) 式の記号を用いて，

$$\boldsymbol{K}_r^2\ddot{q}_{rt}+kM\dot{q}_{rt}+\left\{\boldsymbol{L}_r^2-\frac{\pi^2r^2}{2l}\mathfrak{n}(t)\right\}q_{rt}=\mathfrak{p}(x;t)\sin\frac{r\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau \quad\cdots\cdots(14)$$

特に軸方向力がない場合は，

$$\boldsymbol{K}_r^2\ddot{q}_{rt}+kM\dot{q}_{rt}+\boldsymbol{L}_{rt}^2q_{rt}=\mathfrak{p}(x;t)\sin\frac{r\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau \quad\cdots\cdots(15)$$

これらの微分方程式を解くために Laplace 変換を用いることにするが，それは種々の荷重に対し Operator を用いて容易に表し得ることと演算子法の利点を利用するためである。Laplace 変換には第1種と第2種との区別があり，著者によつて記号を異にするが，玆では第1種変換の順及び逆変換を夫々 $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_1^{-1}$，同じく第2種変換のそれらを $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_2^{-1}$ にて示し，次の関係にあるものとする。

$$\mathfrak{L}_1 f(t)=\phi_1(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \quad\cdots\cdots(16)$$

$$\mathfrak{L}_1^{-1}=\phi_1(p)=f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\phi_1(p)e^{pt}dp \quad\cdots\cdots(17)$$

$$\mathfrak{L}_2 f(t)=\phi_2(p)=p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \quad\cdots\cdots(18)$$

$$\mathfrak{L}_2^{-1}\phi_2(p)=f(t)=\frac{1}{1\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\phi_2(p)}{p}e^{pt}dp \quad\cdots\cdots(19)$$

玆に c は $(c-i\infty)$ より $(c+i\infty)$ に至る虚軸に平行な積分路が $\phi(p)$ の特異点を悉く左側 ($-\infty$側) に見る様に選ばれた正数とする。本文では振動の応用的見地などから主として第2種変換を用いたが，最後に求めた撓みの一般公式では順変換と逆変換とを同時に含むので，或特殊の場合の外は第1種，第2種何れを用いても公式の運用以外は大差がない。

この様に Laplace 変換を用いると，(15) 式より

$$q_{rt}=\mathfrak{L}_2^{-1}\left[\left\{\mathfrak{L}_2\mathfrak{p}(x;t)\sin\frac{r\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau+(p^2\boldsymbol{K}_r^2+pkM)q_{r0}+p\boldsymbol{K}_r^2\dot{q}_{r0}\right\}\Big/(\boldsymbol{K}_r^2p^2+kMp+\boldsymbol{L}_r^2)\right] \cdots\cdots(20)$$

$\therefore\ y(x;t)=[1]+[2]$,

但し

$$\left.\begin{aligned}
[1]&=\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\,\mathfrak{L}_2^{-1}\left[\mathfrak{L}_2\left\{\mathfrak{p}(x;t)\sin\frac{r\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau\right\}\Big/(\boldsymbol{K}_r^2p^2+kMp+\boldsymbol{L}_r^2)\right]\\
[2]&=\frac{2}{l}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\left[\int_0^l \boldsymbol{A}_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\cdot\mathfrak{L}_2^{-1}\left\{(\boldsymbol{K}_r^2p^2+kMp)\Big/(\boldsymbol{K}_r^2p^2+kMp+\boldsymbol{L}_r^2)\right\}\right.\\
&\quad\left.+\int_0^l \boldsymbol{B}_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\cdot\mathfrak{L}_2^{-1}\left\{(\boldsymbol{K}_r^2p)/(\boldsymbol{K}_r^2p^2+kMp+\boldsymbol{L}_r^2)\right\}\right]
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(21)$$

玆に $\boldsymbol{A}_x$, $\boldsymbol{B}_x$ は時刻 $t=0$ の時の梁の中立軸の位置及びその速度を表わす式とする。上式にて [1] は荷重による強制振動を示し，[2] は初期条件にて決定される自由振動を表わしているが，Laplace の変換公式[3] を用いて

2) Kármán and Biot; "Mathematical methods in engineering," 1940, p.197.

3) 例えば，林重憲；"過渡現象の数学的方法，初等原理篇" 附錄 2.
K.W.Wagner; "Operatorenrechnung," 1940, S.43.

2〕を書き換えると,

$$\left.\begin{aligned}&y(x;t)=〔1〕+〔2〕\\&\text{但し}\ 〔1〕:(21)\ \text{式と同じ};\\&〔2〕=\frac{2}{l}\sum_{r=1}^{\infty}e^{-m_r t}\sin\frac{r\pi x}{l}\left[\frac{\sin(k_r t)}{k_r}\left(\int_0^l B_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx+2m_r\int_0^l A_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\right)\right.\\&\left.\quad-\frac{l_r}{k_r}\sin\{k_r t-\tan^{-1}(k_r/m_r)\}\int_0^l A_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\right];\\&k_r=\sqrt{(L_r/k_r)^2-(kM2/K_r^2)^2},\quad l_r=L_r/K_r,\quad m_r=kM/(2K_r^2)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(-1)$$

これは梁の廻転半径,剪断力及び材料の減衰係数を考慮した場合の一般式でてり,第1項〔1〕,即ち荷重による強制振動は次の様に計算すればよい。

1. **荷重 $\mathfrak{p}(x;t)$ の計算:** 或荷重の振動形式が与えられると,これを式にて表わすことが必要であるが,荷重の特殊の振動波形に就ては p 函数として示す方が好都合である。即ち単なる衝撃,週期的に継続する衝撃或は階段型波形の荷重の場合であつて,例えば無限小の時間に或荷重が衝撃波として作用する時は,Dirac の δ 函数を採れば簡単に p と置くことが出来,これを Laplace 変換公式に代入して割合に容易に解を得ることが出来る。この場合変換公式を用いて計算してもよいし,定積分表[4] 又は Laplace 変換の表[5] を利用して見出してもよいが,週期的な振動波に対しては便利な計算公式がある。[6] $\mathfrak{p}(x;t)$ を t 函数として示すか,p 函数として示すかにより,撓みを求める計算方法が異つてくる。

2. **Laplce 変換式の計算;** 荷重が梁の上を移動する場合には,$\mathfrak{L}_2\{\mathfrak{p}(x;t)\times\sin(r\pi\int_0^l v(\tau)d\tau/l)\}$ の如く,t に関する2函数の積の Laplace 変換の順変換を行い,後に逆変換をする形になつている。それで順変換の項を p 函数に置換せずに計算するときは,次の如く積分式に直して解き求めた。即ち相乗定理[7] を用いると,

$$\mathfrak{L}_2^{-1}\frac{1}{p^2+2kp+D_r^2}\ \mathfrak{L}_2\left\{\mathfrak{p}(x;t)\sin\frac{r\pi}{l}\int_0^l v(\tau)d\tau\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{D_r^2-k^2}}\int_0^t e^{-k(t-\tau)}\sin\{\sqrt{D_r^2-k^2}(t-\tau)\}\cdot\mathfrak{p}(x;\tau)\sin\frac{r\pi}{l}\int_0^\tau v(\xi)d\xi.d\tau\quad\cdots\cdots(22)$$

或は(22)式を重複積分に変形し,即ち拡張せる相乗定理[8] を用いて解を求めると都合のよい場合がある。茲に D_r は後に用いる記号であるが,ここでは或常数として置く。

以上は Laplace 変換の順変換を行わずに t 函数のまゝ積分式に代入する方法であるが,p 函数にかえて逆変換を施す時は次の如き方法がある。即ち逆変換の公式に代入して実際に計算する方法として,$\mathfrak{L}_1$ のものに Doetsch[9] 及び桜井氏[10] の公式があり,$\mathfrak{L}_2$ のものに Wagner[11] の公式がある。

今荷重が梁上の一定点 c より正,負の方向に任意速度にて $\mathfrak{p}(x;t)$ の振動作用を与えながら移動する場合,(1-1)式に(22)式を用いて積分式に変形すると,

$$\left.\begin{aligned}&y(x;t)=〔1〕+〔2〕\\&\text{但し}\ 〔1〕=\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}K_r^{-2}k_r^{-1}\int_0^t e^{-m_r(t-\tau)}.\sin\{k_r(t-\tau)\}\cdot\mathfrak{p}(x;t)\sin\frac{r\pi}{l}\left\{c\pm\int_0^\tau v(\xi)d\xi\right\}d\tau\\&〔2〕:(1\text{-}1)\ \text{式と同じ}\end{aligned}\right\}\cdots(1\text{-}2)$$

荷重が梁の上を移動せず,一定点 c に作用する場合は,(1-1)及び(1-2)式の第1項〔1〕は次の如く書改められる。

$$〔1〕=\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi c}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\left[\{\mathfrak{L}_2\mathfrak{p}(c;t)\}/(K_r^2p^2+kMp+L_r^2)\right]\quad\cdots\cdots(1\text{-}3)$$

---

4) 例えば D.Bierens de Haan;"Nonvelles tables d' intégrales définies," 1867.
5) 前出 4)林; 附録 頁 1-4, K.W.Wagner S.42—49.
6) 小泉四郎; 電気学会雑誌, 第 63 巻第665号, 昭 18-12, 頁 933-934.
山田直平: 電気学会雑誌, 第 91 巻第632号, 昭 16-3, 頁 76-78, 同第 63 巻第665号, 昭 18-12, 頁 931-531.
7) 前出4)林; 頁 51-54. K.W. Wagner; S.60—65.
8) 林重憲; 電気評論, 第 30 巻第7号, 昭 17-7, 頁 403-410. K.W. Wagner; S.62,398—399.
9) G.Doetsch;"Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation," 1937, S.167—168.
10) 櫻井時夫; 東京工業大学学報, 第7巻第3号, 昭 13, 頁 168-189.
11) 前出4) K.W. Wagner; S63—65.

$$= \sum_{r=1}^{\infty} K_r^{-2} k_r^{-1} \sin\frac{r\pi c}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}\int_0^t e^{-m_r(t-\tau)}\sin\{k_r(t-\tau)\}\cdot \mathfrak{p}(c;\tau)d\tau \quad \cdots\cdots(1\text{-}4)$$

以上は梁の廻転慣性及び剪断力の影響を考えた場合であるが，実際上はこれらを無視してよいことが多く，かゝる場合は (1-1) 式にて $k_0=k_1=k_2=0$ として，

$$\left.\begin{aligned} & y(x;t)=[1]+[2] \\ \text{但し}\quad & [1]=\frac{2a^2}{EJl}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\left[\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{p}(x;t)\sin\frac{r\pi}{l}\left(c\pm\int_0^t v(\tau)d\tau\right)\Big/(p^2+2kp+D_r^2)\right] \\ & [2]=\frac{2}{l}e^{-kt}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r\pi x}{l}\left[\frac{\sin(d_r t)}{d_r}\left(\int_0^l B_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx+2k\int_0^l A_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\right)\right. \\ & \left.\qquad -\frac{D_r}{d_r}\sin\{d_r t-\tan^{-1}(d_r/k)\}\int_0^l A_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\right] \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1\text{-}5)$$

玆に $a=\sqrt{gEJ/\gamma A_0}$,　$D_r=r^2\pi^2 a/l^2$,　$d_r=\sqrt{D_r^2-k}$ $\cdots\cdots(23)$

(22) 式を用いて (1-5) 式の [1] を書改めると，

$$[1]=\frac{2a^2}{EJl}\sum_{r=1}^{\infty}d_r^{-1}\sin\frac{r\pi x}{l}\int_0^t e^{-k(t-\tau)}\sin\{d_r(t-\tau)\}\cdot\mathfrak{p}(x;t)\sin\frac{r\pi}{l}\left[c\pm\int_0^\tau v(\xi)d\xi\right]d\tau \quad\cdots\cdots(1\text{-}6)$$

荷重が一定点 c に作用する場合は，(1-5) の第1項及び (1-6) 式は，夫々

$$[1]=\frac{2a^2}{EJl}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi c}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\left[\{\mathfrak{L}_2\mathfrak{p}(c;t)\}/(p^2+2kp+D_r^2)\right] \quad\cdots\cdots(1\text{-}7)$$

$$=\frac{2a^2}{EJl}\sum_{r=1}^{\infty}d_r^{-1}\sin\frac{r\pi c}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}\int_0^t e^{-k(t-\tau)}\sin\{d_r(t-\tau)\}\cdot\mathfrak{p}(c;\tau)d\tau \quad\cdots\cdots(1\text{-}8)$$

(1-5)～(1-6) 式にて減衰係数 k を無視すると，

$$\left.\begin{aligned} & y(x;t)=[1]+[2] \\ \text{但し}\quad & [1]=\frac{2a^2}{EJl}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\left[\mathfrak{L}_2\left\{\mathfrak{p}(x;t)\sin\frac{r\pi}{l}\left(c\pm\int_0^t v(\tau)d\tau\right)\right\}\Big/(p^2+d_r^2)\right] \\ & [2]=\frac{2}{l}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\left\{\sin\frac{(D_r t)}{D_r}\int_0^l B_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx+\cos(D_r t)\int_0^l A_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\right\} \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1\text{-}9)$$

相乗定理により (1-9) 式の [1] を改めると，

$$[1]=\frac{2a^2}{EJl}\sum_{r=1}^{\infty}D_r^{-1}\sin\frac{r\pi x}{l}\int_0^t\sin\{D_r(t-\tau)\}\cdot\mathfrak{p}(x;\tau)\sin\frac{r\pi}{l}\left\{c\pm\int_0^\tau v(\xi)d\xi\right\}d\tau \quad\cdots\cdots(1\text{-}10)$$

荷重が一定点 c に作用する場合は，(1-9) 式の第1項及び (1-10) 式は夫々

$$[1]=\frac{2a^2}{EJl}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi c}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\left[\{\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{p}(c;t)\}/(p^2+D_r^2)\right] \quad\cdots\cdots(1\text{-}11)$$

(2) 積分方程式による誘導

梁の廻転慣性及び剪断力の影響を無視し，軸方向力がなく且減衰係数を考えず，更に荷重の質量も考慮しないものとすれば，

$$y(x;t)=\frac{1}{EJ}\,\mathfrak{p}(x;t)\cdot K_2\left(x,c\pm\int_0^t v(\tau)d\tau\right)-\frac{1}{a^2}\int_0^l K(x,q)\frac{\partial^2 y(q,t)}{\partial t^2}dq \quad\cdots\cdots(25)$$

玆に $K_2(x,c\pm\int_0^t v(\tau)d\tau)$ 及び $K_2(x,q)$ は積分方程式の二重複核を示すが，上式に Laplace 変換を施すと，

$$\mathfrak{y}(x;p)=\frac{1}{EJ}\,\mathfrak{L}_2\left[\mathfrak{p}(x;t)\cdot K_2\left(x,c\pm\int_0^t v(\tau)d\tau\right)\right]-\frac{p^2}{a^2}\int_0^l k_2(x,q)\,\mathfrak{y}(q;p)\,dq+\int_0^l\frac{p^2A_x+pB_x}{a^2}K_2(x,q)dq$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varphi_r(x)}{\lambda_r^2}\left[\frac{1}{EJ}\ \mathfrak{L}_2\left\{\mathfrak{p}(x;t)\cdot\varphi_r\left(c\pm\int_0^t x(\tau)d\tau\right\}+\frac{p^2A_x+pB_x}{a^2}\left\{\frac{l}{r\pi}(1-\cos r\pi)\cdot\mathrm{cosec}\frac{r\pi}{l}\cdot\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(c\pm\int_0^l v(\tau)d\tau\right)\cdot\varphi_r\left(c\pm\int_0^t v(\tau)d\tau\right)\right\}\right]+\lambda\int_0^l K_2(x,q)\,\mathfrak{y}(q:p)dq \quad\cdots\cdots(26)$$

玆に $\mathfrak{L}_2 y(x;t)=\mathfrak{y}(x;p)$ にして，λ_r 及び $\varphi_r(x)$ は夫々積分方程式の核の固有値及び固有函数である。而して梁の両端が自由支持の場合には，Sturm の条件を満足し，

$$\varphi_r(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{r\pi x}{l},\quad \lambda_r=\frac{r^2\pi^2}{l^2} \quad\cdots\cdots(27)$$

にて表わされる。なお λ を積分方程式のパラメーターとして $\lambda=-p^2/a^2$ とし，(26) 式に相反核又は解核の性質

を応用すると，

$$\mathfrak{y}(x;p)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varphi_r(x)}{\lambda_r^2-\lambda}\left[\frac{1}{EJ}\ \mathfrak{L}_2\left\{\varphi_r\left(c\pm\int_0^t v(\tau)d\tau\right)\cdot\mathfrak{p}(x;t)\right\}+\frac{p^2\boldsymbol{A}x+p\boldsymbol{B}x}{\boldsymbol{a}^2}\ \frac{\sqrt{2l}(1-\cos r\pi)}{r\pi}\right]\cdots\cdots\cdots(28)$$

従つて上式の逆変換により，(1-9) 式と全く同一の式が導かれる。

2. 作用點の移動する數個の集中荷重を受ける場合の一般公式

數個の集中荷重が各々変速度で梁の上を移動する場合は，"重畳の原理"[12] により，単一集中荷重の場合の公式を組合わすことによつて解を求めることが出来る。実際上最も重要なのは，橋梁上を列車又は自動車等が通過する場合の如く，連行荷重即ち數個の集中荷重が一定の間隔を保ちつゝ走行する場合であるが，荷重の質量を考慮すると撓みを一般公式として示すことは困難である。それで荷重の質量を無視した場合を説明するが，先づ最も簡単な2個の連行荷重の場合を考えよう。今先頭より荷重を $\mathfrak{p}_1$，$\mathfrak{p}_2$，その間隔を d_1 とし，荷重の走行速度を $v(t)$，荷重 $\mathfrak{p}_2$ が梁の原点にある時を $t=0$ とすれば，(1-1) 式から次式が導かれる。

$$\left.\begin{aligned}
&y(x;t)=[1]+[2];\\
&\text{但し}\quad [1]=\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\left[\ \mathfrak{L}_2\left\{\ \mathfrak{p}_1\sin\frac{r\pi}{l}\left(\int_0^t u(\tau)d\tau+d_1\right)+\ \mathfrak{p}_2\sin\frac{r\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau\right\}\right.\\
&\qquad\left.\Big/(\boldsymbol{K}_r^2p^2+kMp+\boldsymbol{L}_r^2)\right]\\
&\qquad [2]=\sum_{r=1}^{\infty}e^{-\boldsymbol{m}_r t_1}\sin\frac{r\pi x}{l}\left[\sin\frac{(\boldsymbol{k}_r t)}{\boldsymbol{k}_r}\left\{\left(\frac{d}{dt}\left[\ \mathfrak{L}_2^{-1}\left\{\mathfrak{L}_2\left(\ \mathfrak{p}_1\sin\frac{r\pi}{l}\int_0^{t_1}v_1(\tau)\,d\tau\right)\right.\right.\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.\Big/(\boldsymbol{K}_r^2p^2+kMp+\boldsymbol{L}_r^2)\right\}\Bigg]+\frac{2}{l}e^{-\boldsymbol{m}_r t_1}l_0\int_0^l\boldsymbol{B}_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\Bigg)\\
&\qquad+2\boldsymbol{m}_r\left[\ \mathfrak{L}_2^{-1}\left\{\ \mathfrak{L}_2\left(\ \mathfrak{p}_1\sin\frac{r\pi}{l}\int_0^{t_1}v_1(\tau)d\tau\right)\Big/(\boldsymbol{K}_r^2p^2+kMp+\boldsymbol{L}_r^2)\right\}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{2}{l}\ e^{-\boldsymbol{m}_r t_1}\int_0^l\boldsymbol{A}_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\right]\Bigg\}-\frac{\boldsymbol{l}_r}{\boldsymbol{k}_r}\sin\left(\boldsymbol{k}_r t-\tan^{-1}\frac{\boldsymbol{k}_r}{\boldsymbol{m}_r}\right)\Bigg[\ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big\{\ \mathfrak{L}_2\\
&\qquad\left(\ \mathfrak{p}_1\sin\frac{r\pi}{l}\int_4^{t_1}v_1(\tau)d\tau\right)\Big/(\boldsymbol{K}_r^2p^2+kMp+\boldsymbol{L}_r^2)\Big\}+\frac{2}{l}e^{-\boldsymbol{m}_r t_1}\\
&\qquad\int_0^l\boldsymbol{A}x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\Bigg]\Bigg]
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}12)$$

茲に $v_1(t)$ は先頭の荷重 $\mathfrak{p}_1$ が $x=0$ より距離 d_1 まで進行する時の速度変化の式，t_1 は $x=0$ の点を $\mathfrak{p}_1$ 及び $\mathfrak{p}_2$ が通過する時間間隔とする。又 $\boldsymbol{A}_x$，$\boldsymbol{B}_x$ は $\mathfrak{p}_1$ が $x=0$ に達した時の中立軸の位置及びその速度を表す式とする。

若し梁の廻転慣性及剪断力の影響を無視すれば，

$$\left.\begin{aligned}
&y(x;t)=[1]+[2]\\
&\text{但し}\quad [1]=\frac{2\boldsymbol{a}^2}{EJl}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi 1}{l}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\left[\ \mathfrak{L}_2\left\{\ \mathfrak{p}_1\sin\frac{r\pi}{l}\left(\int_0^t v(\tau)d\tau+d_1\right)+\ \mathfrak{p}_2\sin\frac{r\pi}{l}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\int_0^t v(\tau)d\tau\right\}\Big/(p^2+2kp+\boldsymbol{D}_r^2)\right]\\
&\qquad [2]=\frac{2}{l}e^{-kt}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\left[\sin\frac{(\boldsymbol{d}_r t)}{\boldsymbol{d}_r}\left(\frac{\boldsymbol{a}^2}{EJ}\ \frac{d}{dt}\left[\ \mathfrak{L}_2^{-1}\left\{\ \mathfrak{L}_2\left(\ \mathfrak{p}_1\sin\frac{r\pi}{l}\right.\right.\right.\right.\right.\\
&\qquad\left.\int_0^{t_1}v_1(\tau)d\tau\right)\Big/(p^2+2kp+\boldsymbol{D}_r^2)\Big\}\Bigg]+e^{-kt_1}\int_0^l\boldsymbol{B}_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\\
&\qquad+\frac{2k\boldsymbol{a}^2}{\boldsymbol{EJ}}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\left\{\ \mathfrak{L}_2\left(\ \mathfrak{p}_1\sin\frac{r\pi}{l}\int_0^{t_1}v_1(\tau)d\tau\right)\Big/(p^2+2kp+\boldsymbol{D}_r^2)\right\}\\
&\qquad+2ke^{-k_1 t}\int_0^l\boldsymbol{A}_x\sin\frac{r\pi x}{l}\Bigg)-\frac{\boldsymbol{D}_r}{\boldsymbol{d}_r}\sin\left(\boldsymbol{d}_r t-\tan^{-1}\frac{\boldsymbol{d}_r}{k}\right)\Bigg[\ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big\{\ \mathfrak{L}_2\Big(\ \mathfrak{p}_1\sin\frac{r\pi}{l}\\
&\qquad\int_0^{t_1}v_1(\tau)d\tau\Big/(p^2+2kp+\boldsymbol{D}_r^2)\Big\}+e^{-kt_1}\int_0^t\boldsymbol{A}^x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\Bigg]
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}13)$$

更に減衰係数を無視すると，(1-15) 式は夫々次の様になる。

---

12) 大井鉄郎；応用偏微分方程式論，頁 29-30.

$$
\left.\begin{aligned}
&k\ y(x;t)=[1]+[2]\\
&\text{但し}\quad [1]=\frac{2a^2}{EJl}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big[\ \mathfrak{L}_2\Big\{\ \mathfrak{p}_1\sin\Big(\frac{r\pi}{l}\Big(\int_0^t v(\tau)d\tau+d_1\Big)+\mathfrak{p}_2\sin\frac{r\pi}{l}\\
&\qquad\int_0^t v(\tau)d\tau\Big\}\Big/(p^2+D_r^2)\Big]\\
&\qquad [2]=\frac{2}{l}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\Big[\sin\frac{(D_rt)}{D_r}\Big(\frac{a^2}{EJ}\ \frac{d}{dt}\Big[\ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big\{\ \mathfrak{L}_2\Big(\ \mathfrak{p}_1\sin\frac{r\pi}{l}\int_0^{t_1}v_1(\tau)d\tau\Big)\\
&\qquad\Big/(p^2+D_r^2)\Big\}\Big)+\int_0^l B_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\Big)+\cos(D_rt)\Big[\frac{a^2}{EJ}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big\{\ \mathfrak{L}_2\Big(\ \mathfrak{p}_1\sin\frac{r\pi}{l}\\
&\qquad\int_0^{t_1}v_1(\tau)d\tau\Big)\Big/(\mathfrak{p}^2+D_r^2)\Big\}+\int_0^t A_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\Big]\Big]
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{–}14)
$$

3個以上の集中荷重が連行する場合も，同様の考えにて公式を導くことが出来る。

3.　作用點の移動しない數個の集中荷重及は分布荷重を受ける場合の一般公式

數個の集中荷重が梁上の夫々定点に作用する場合は，単一集中荷重の場合の撓みの公式を組合わすと簡単に解が得られる。今荷重の質量及び軸方向力を考えない場合，n 個の振動荷重 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_n$ が夫々梁の上の定点 c_1, $c_2, \cdots\cdots, c_n$ に作用したとすれば，(1–1)，(1–3) 式を用いて，

$$
\begin{aligned}
y(x;t)=&\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi c_\nu}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big\{\mathfrak{L}_1\mathfrak{p}_\nu/(K_r^2p_2+kMp+L_r^2)\Big\}\\
&+\frac{2}{l}\sum_{r=1}^{\infty}e^{-m_r t}\sin\frac{r\pi x}{l}\Big[\frac{\sin(k_rt)}{k_rl}\Big(\int_0^{\circ}B_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx+2m_r\int_0^l A_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\Big)\\
&-\frac{l_r}{k_r}\sin\Big\{k_rt-\tan^{-1}(k_r/m_r)\Big\}\int_0^l A_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\Big]
\end{aligned}
\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{–}15)
$$

若し梁の廻転慣性及び剪断力の影響を無視すると，

$$
\begin{aligned}
y(x;t)=&\frac{2a^2}{EJl}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{\pi c_\nu}{l}\sin\frac{r\pi_\nu}{l}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\{\mathfrak{L}_2\mathfrak{p}_\nu/(p^2+2kp+D_r^2)\}\\
&+\frac{2}{l}e^{-kt}\sum_{r=1}^{\infty}\mathrm{iin}\frac{r\pi x}{l}\Big[\frac{\sin(d_rt)}{d_r}\Big(\int_0^l B_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx+2k\int_0^l A_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\Big)\\
&-\frac{D_r}{d_r}\sin\{d_rt-\tan^{-1}(d_r/k)\}\int_0^l A_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\Big]
\end{aligned}
\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{–}16)
$$

上式にて $k=0$ とせば減衰係数を無視した場合の式が得られる。

次に各種の型の分布荷重が時間函数として作用する場合は，荷重の分布強度を $\mathfrak{p}_0f(\zeta, c)$， 分布長を $c_0\sim l_0$ 間とすれば，(1–15)，(1–16) 式にて第1項〔1〕のみを夫々次の如く書改めればよい。

$$
[1]=\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big[\ \mathfrak{L}_2\Big\{\int_{c_0}^{c_0+l_0}\mathfrak{p}_0f(\zeta,c)\sin\frac{c\pi c}{l}dc\Big\{\Big/(K_r^2p^2+kMp+L_r^2)\Big]\cdots\cdots\cdots(1\text{–}17)
$$

$$
[1]=\frac{2a^2}{EJl}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big[\ \mathfrak{L}_2\Big\{\int_{c_0}^{c_0+l_0}\mathfrak{p}_0f(\zeta,c)\sin\frac{r\pi c}{l}dc\Big\}\Big/(p^2+2kp+D_r^2)\Big]\cdots\cdots\cdots(1\text{–}18)
$$

第2編　弾性支床上の矩形版の撓み振動

1.　單一集中荷重を受ける場合の一般公式

(1)　エネルギー式による誘導

弾性支床上の梁の撓み振動を求める場合，弾性支持の状態を如何に仮定し計算するかゞ極めて重要な問題となるが，玆では計算を容易にするため従来より用いられている普通の仮定[13]に従うこととし，撓みに比例する基礎反力によつて支持されるものとする。

(b)　荷重の質重を考慮する場合

断面一様にして長さ l なる梁が弾性支床上にある場合，任意点 x に於ける梁の撓み $y(x;t)$ を一般座標 q_{rt} を用いて展開すれば，前と同様にして，

13)　例えば，Kármán and Biot, "Mathematical methods in engineering", 1940, p.271–273, 323–325, 340–343.

$$y(x;t)=\sum_{r=1}^{\infty} q_{rt}\cdot\sin\frac{r\pi x}{l} \qquad \cdots\cdots(1)$$

次に梁の運動及び位置のエネルギー T 及び V の計算に於て，梁の廻転慣性及び剪断力の影響は実際問題として殆ど考慮する必要がないから，之等を無視し，基礎反力を κy（但し，κ：地盤反力係数）とすれば，V のみ前と異り

$$\begin{aligned} V &= \frac{EJ}{2}\int_0^t\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx-\frac{\mathfrak{n}(t)}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx+\frac{\kappa}{2}\int_0^l y^2 dx \\ &= \frac{EJ\pi^4}{4l^3}\sum_{r=1}^{\infty} r^4 q^2{}_{rt}-\frac{\pi^2}{4l}\mathfrak{n}(t)\sum_{r=1}^{\infty} r^2 q^2{}_{rt}+\frac{\kappa l}{4}\sum_{r=1}^{\infty} q_{rt}^2 \qquad \cdots\cdots(2) \end{aligned}$$

茲に用いた各記号の意味は第1編に於けるものと同様である。今これらを Lagrange の運動方程式に代入して整理すると，

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_{rt}+2k\dot{q}_{tr}+\left\{\frac{a^2\pi^4 r^4}{l^4}+\frac{a^2\kappa}{EJ}-\frac{a^2\pi^2 r^2}{EJl^2}\mathfrak{n}(t)\right\}q_{rt} \\ &=\frac{2}{M}\Bigg[mg+\mathfrak{p}(x;t)-m\sum_{j=1}^{\infty}\Bigg[\ddot{q}_{jt}\sin\frac{j\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau+2\dot{q}_{jt}\frac{j\pi}{l}v(t)\cos\frac{j\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau \\ &+q_{jt}\frac{j\pi}{l}\left\{\cos\frac{j\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau\times\frac{dv(t)}{dt}-\left(\frac{j\pi}{l}\right)v^2(t)\sin\frac{j\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau\right\}\Bigg]\Bigg]\sin\frac{r\pi}{l}\int_0^t v(\tau)d\tau \quad \cdots\cdots(3) \end{aligned}$$

この式から q_{rt} を求めて（1）式に入れると所要の解が得られるが，（3）式を解くことが殆ど不可能であるから，前述の如き近似方法によることもある。即ち梁の質量に比べて荷重のそれがかなり小さい時は，右辺の対角行列のみをとつた微分方程式より q_{rt} を求めて第1近似値とし，これより順次 Iteration method によつて q_r の正しい値に近づけ，それを（1）式に入れて所要の撓み式とするわけである。なお

$$\boldsymbol{G}_r=\sqrt{r^4\pi^4 a^2/l^4+\kappa a^2/EJ} \qquad \cdots\cdots(4)$$

とすれば，上の各式が両端自由支持の場合の諸公式にて $\boldsymbol{D}_r$ を $\boldsymbol{G}_r$ に置換した式に一致することは，注目すべき事柄である。

(b) 荷重の質量を考慮しない場合

（5）式にて荷重の質量 m 及び軸方向力を考えない場合は，

$$\ddot{q}_{rt}+2k\dot{q}_{rt}+\boldsymbol{G}_r^2 q_{rt}=\frac{2}{M}\mathfrak{p}(x;t)\sin\frac{r\pi}{l}\left\{c\pm\int_0^t v(\tau)d\tau\right\} \qquad \cdots\cdots(6)$$

茲に荷重 $\mathfrak{p}(x;t)$ は梁上の一定点 c より速度 $v(t)$ にて正又は負の方向に走行するものとする。（6）式を解いて q_{rt} を求め（1）式に代入すれば，所要の撓みとして次式が得られ，（1–5）式の $\boldsymbol{D}_r$ を $\boldsymbol{G}_r$ に，$\boldsymbol{d}_r$ を $\boldsymbol{g}_r$ に置換したものと一致する。

$$\left.\begin{aligned} &y(x;t)=[1]+[2] \\ &\text{但し}\quad [1]=\frac{2a^2}{EJl}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\,\mathfrak{L}_2^{-1}\left[\mathfrak{L}_2\mathfrak{p}(x;t)\sin\frac{r\pi}{l}\left(c\pm\int_0^t v(\tau)d\tau\right)\Big/(p^2+2kp+\boldsymbol{G}_r^2)\right] \\ &[2]=\frac{2}{l}e^{-kt}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\left[\frac{\sin(\boldsymbol{g}_r t)}{\boldsymbol{g}_r}\left(\int_0^l \boldsymbol{B}_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx+2k\int_0^l \boldsymbol{A}_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\right)\right. \\ &\left.\qquad-\frac{\boldsymbol{G}_r}{\boldsymbol{g}_r}\sin\left\{\boldsymbol{g}_r t-\mathrm{ton}^{-1}(\boldsymbol{g}_r/k)\right\}\int_0^l \boldsymbol{A}_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\right] \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2\text{–}1)$$

荷重が一定点 c に作用する場合は上式の第1項〔1〕は，

$$[1]=\frac{2a^2}{EJl}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi c}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}\,\mathfrak{L}_2^{-1}\left[\{\mathfrak{L}_2\mathfrak{p}(x;t)\}/(p^2+2kp+\boldsymbol{G}_r^2)\right] \qquad \cdots\cdots(2\text{–}2)$$

更に減衰係数 k を無視すると，上の2式に対応するものとして

$$\left.\begin{aligned} &y(x;t)=[1]+[2] \\ &[1]=\frac{2a^2}{EJl}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\,\mathfrak{L}_2^{-1}\left[\mathfrak{L}_2\left\{\mathfrak{p}(x;t)\sin\frac{r\pi}{l}\left(c\pm\int_0^t v(\tau)d\tau\right)\right\}\Big/(p^2+\boldsymbol{G}_r^2)\right] \\ &[2]=\frac{2}{l}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\left\{\frac{\sin(\boldsymbol{G}_r t)}{\boldsymbol{G}_r}\int_0^l \boldsymbol{B}_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx+\cos(\boldsymbol{G}_r t)\int_0^l \boldsymbol{A}_x\sin\frac{r\pi x}{l}dx\right\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2\text{–}3)$$

$$[1]=\frac{2a^2}{EJl}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi c}{l}\sin\frac{r\pi x}{l}\,\mathfrak{L}_2^{-1}\left[\{\mathfrak{L}_2\mathfrak{p}(c;t)\}/(p^2+\boldsymbol{G}_r^2)\right] \qquad \cdots\cdots(2\text{–}4)$$

要するに両端自由支持の場合の公式にて D_e を G_r に，d_r を g_r に置換すれば，弾性支床上の梁の場合の公式が得られるわけであつて，茲では単一集中荷重を受けた場合の一般公式のみを掲げ，他は省略することにする。

(2) 積分方程式による誘導

(2.3) 式と同様の最も簡単な場合を考えると，題意によつて

$$y(x;t)=\frac{1}{EJ}\mathfrak{p}(x;t)\cdot K_2(x,c\pm\int_0^l v(\tau)d\tau)-\int_0^l\left\{\frac{\kappa}{EJ}y(q,t)+\frac{\gamma A_0}{EJg}\frac{\partial^2 y(q,t)}{\partial t^2}\right\}K_2(x,q)dq \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

上式に初期条件を考慮して Laplace 変換を施せば，第1編 (28) 式にて $\lambda=-p^2/a^2$ の代りに $\lambda=-(\kappa+\gamma A_0 p^2/g)/EJ$ を置換えた式が得られ，結局

$$\mathfrak{y}(x,p)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varphi_r(x)}{\lambda_r{}^2-\lambda}\left[\frac{1}{EJ}\mathfrak{L}_2\left\{\varphi_r(c\pm\int_0^t t_0 v(\tau)d\tau\cdot\mathfrak{p}(x;t)\right\}+\frac{p^2\boldsymbol{A}_x+p\boldsymbol{B}_x}{\boldsymbol{a}^2}\frac{\sqrt{2l}(1-\cos r\pi)}{r\pi}\right]\cdots\cdots\cdots(8)$$

となる。これを更に逆変換すれば第1編と全く同様にして (2-3) 式と同一の式が得られる。

第3編 矩形版の撓み振動

1. 單一集中荷重を受ける場合の一般公式

(1) エネルギー式による誘導

厚さ一定なる薄い矩形版の各隅角点の座標を夫々 (o,o), (a,o), (o,b), (a,b) とし，4辺にて自由支持された場合の撓み振動を梁の場合と同様の考察の下に導くことにする。

(a) 荷重の質量を考慮する場合

矩形版上の任意点 (x,y) の時刻 t に於ける撓み $w(x,y;t)$ を一般座標 $q_{rs,t}$ を用いて展開すれば，

$$w(x,y;t)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}q_{rs,t}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

次に版の運動及び位置のエネルギー T 及び V を計算し，(1)式を代入し直交函数の性質を利用して整理すれば，

$$T=\frac{\rho h}{2g}\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2dxdy=\frac{M}{8}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\dot{q}^2_{rs,t}\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$V=\frac{N}{2}\int_0^a\int_0^b\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right\}dxdy$$

$$=\frac{N}{2}\frac{ab\pi^4}{4}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\dot{q}^2_{rs,t}\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}\right)^2\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

茲に，ρ：版の材料の単位重量，　h：版の厚さ，　g：重力加速，

σ：版のポアソン比，　E：版のヤング率，　$M=\rho abh/g$：版の全質量，

a,b：夫々 x,y 軸方向の版の長さ，　$N=Eh^3/\{12(1-\sigma^2)\}$：版の剛度

又 F を散逸函数，k を版の減衰係数とすれば，

$$F=k\frac{\rho h}{g}\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2dxdy=\frac{kM}{4}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\dot{q}^2_{rs,t}\quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

今質量 m なる時間的に変動する荷重 $\mathfrak{p}(x,y;t)$ が版の上を x,y 軸方向に夫々 $v_x(t),v_y(t)$ なる速度で移動するものとすれば，一般力 Q_{rs} は，

$$Q_{rs}=\left\{mg+\mathfrak{p}(x,y;t)-m\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}g_{j\nu,t}\sin\frac{j\pi}{a}\int_0^t v_x(\tau)d\tau\cdot\sin\frac{\nu\pi}{b}\int_0^t v_y(\tau)d\tau\right)\right\}$$

$$\times\sin\frac{r\pi}{a}\int_0^t v_x(\tau)d\tau\cdot\sin\frac{s\pi}{a}\int_0^t v_y(\tau)d\tau\quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

上の公式を Lagrange の運動方程式に入れて整理すると，

$$\frac{M}{4}\ddot{q}_{rs,t}+\frac{kM}{2}\dot{q}_{rs,t}+\frac{Nab\pi^4}{4}\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}\right)^2q_{rs,t}$$

$$=\left[mg+\mathfrak{p}(x,y;t)-m\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}q_{j\nu,t}\sin\frac{j\pi}{a}\int_0^t v_x(\tau)d\tau\cdot\sin\frac{\nu\pi}{b}\int_0^t v_y(\tau)d\tau\right)\right\}$$

$$\sin\frac{r\pi}{a}\int_0^t v_x(\tau)d\tau\cdot\sin\frac{s\pi}{b}\int_0^t v_y(\tau)d\tau\quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

この微分方程式を解いて $q_{rs,t}$ を求めることは困難であるから，荷重の質量がかなり小さい場合のみ右辺の対角行列のみをとつて先づ $q_{rs,t}$ の第1近似値を求め，之を再び (6) 式に入れ順次 $q_{rs,t}$ の正しい値を求める Iteration method によれば，最後に求めた $q_{rs,t}$ を (1) 式に入れて所要の撓みとすることも出来る。

(b)　荷重の質量を考慮しない場合

この場合は (6) 式にて $m=0$ として，

$$\frac{M}{4}\ddot{q}_{rs,t}+\frac{kM}{2}\dot{q}_{rs,t}+\frac{Nab\pi^4}{4}\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}\right)^2 q_{rs,t}=\mathfrak{p}(x,y;t)\cdot\sin\frac{r\pi}{a}\int_0^t v_x(\tau)d\tau\cdot\sin\frac{s\pi}{b}\int_0^b v_y(\tau)d\tau \qquad\cdots\cdots(7)$$

$t=0$ の時の $q_{rs,t}$ 及び $\dot{q}_{rs,t}$ を夫々 $q_{rs,o}$ 及び $\dot{q}_{rs,o}$ として，上式に Laplace 変換を施すと，

$$(p^2+2kp+D^2_{rs})\,q_{rs,p}=\frac{4}{M}\,\mathfrak{L}_2\left\{\mathfrak{p}(x,y;t)\cdot\sin\frac{r\pi}{a}\int_0^t v_x(\tau)d\tau\cdot\sin\frac{s\pi}{b}\int_0^t v_y(\tau)d\tau\right\}+p^2q_{rs,o}+p(\dot{q}_{rs,o}+2kq_{rs,o})$$

$$\therefore\quad q_{rs,t}=\frac{4}{M}\,\mathfrak{L}_2^{-1}\Big[\mathfrak{L}_2\mathfrak{p}(x,y;t)\cdot\sin\frac{r\pi}{a}\int_0^t v_x(\tau)d\tau\cdot\sin\frac{s\pi}{b}\int_0^t v_y(\tau)d\tau\Big/(p^2+2kp+D^2_{rs})+p(\dot{q}_{rs,o}+2kq_{rs,o})\Big/(p^2+2kp+D^2_{rs})+p^2q_{rs,o}\Big/(p^2+2kp+D^2_{rs})\Big]\qquad\cdots\cdots(8)$$

但し　$D_{rs}=\sqrt{(r^2/a^2+s^2/b^2)^2\pi^4gN/(\rho h)}$,　　$\sqrt{D^2_{rs}-k^2}\equiv d_{rs}$　　$\cdots\cdots(9)$

$$\left.\begin{aligned}
&\therefore\quad w(x,y;t)=[1]+[2]\\
&\text{但し}\quad [1]=\frac{4}{M}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{a}\,\mathfrak{L}_2^{-1}\Big[\mathfrak{L}_2\Big\{\mathfrak{p}(x,y;t)\cdot\sin\frac{r\pi}{a}\int_0^t v_x(\tau)d\tau\cdot\sin\frac{s\pi}{b}\int_0^t v_y(\tau)d\tau\Big\}\Big/(p^2+2kp+D^2_{rs})\Big]\\
&[2]=\frac{4}{ab}e^{-kt}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\Big[\frac{\sin(d_{rs}t)}{d_{rs}}\Big(\int_0^a\!\!\int_0^b B_{xy}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy\\
&\qquad+2k\int_0^a\!\!\int_0^b A_{xy}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy\Big)-\frac{D_{rs}}{d_{rs}}\sin\{d_{rs}t-\tan^{-1}(d_{rs}/k)\}\int_0^a\!\!\int_0^b A_{xy}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy\Big]
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3\text{-}1)$$

玆に A_{xy}, B_{xy} は時刻 $t=0$ の時の版の中立面の位置及びその速度を表す式である。又第1項 [1] は荷重による強制振動，第2項 [2] は初期条件により決定される自由振動を示すが，$t=0$ のとき版上の1点 (ξ_1a,ξ_2b) にあつた荷重が任意の径路 $f_x\left(\int_0^t v_x(\tau)d\tau\right)$, $f_y\left(\int_0^t v_y(\tau)d\tau\right)$ を以て版上を走行する場合は，[1] のみが次の如くなる。

$$[1]=\frac{4}{M}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\,\mathfrak{L}_2^{-1}\Big[\mathfrak{L}_2\Big[\mathfrak{p}(x,y;t)\cdot\sin\frac{r\pi}{a}\Big\{\xi_1a+f_x\Big(\int_0^t v_x(\tau)d\tau\Big)\Big\}\cdot\sin\frac{s\pi}{b}\Big\{\xi_2b+f_y\Big(\int_0^t v_y(\tau)d\tau\Big)\Big\}\Big]\Big/(p^2+2kp+D^2_{rs})\Big]\qquad\cdots\cdots(3\text{-}2)$$

$$=\frac{4}{M}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}d_{rs}^{-1}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{a}\int_0^t e^{-k(t-\tau)}\sin\{d_{rs}(t-\tau)\}\cdot\mathfrak{p}(x,y;\tau)\times\sin\frac{r\pi}{a}\Big\{\xi_1a+f_x\Big(\int_0^\tau v_x(\xi)d\xi\Big)\Big\}\cdot\sin\frac{s\pi}{a}\Big\{\xi_2b+f_y\Big(\int_0^\tau v_y(\xi)d\xi\Big)\Big\}d\tau\qquad\cdots\cdots(3\text{-}3)$$

この (3-3) 式は相乗定理を用いて書換えたものであるが，この式で計算しにくい場合は“拡張した相乗定理”を用いてもよい。

荷重が版上の一定点 (ξ_1a,ξ_2b) に作用する場合は，上の式を書改めて，

$$[1]=\frac{4}{M}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin r\pi\xi_1\sin s\pi\xi_2\cdot\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\,\mathfrak{L}_2^{-1}\Big[\mathfrak{L}_2\mathfrak{p}(\xi_1a,\,\xi_2b;\,t)/(p^2+2kp+D^2_{rs})\Big]\qquad\cdots\cdots(3\text{-}4)$$

$$=\frac{4}{M}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}d_{rs}^{-1}\cdot\sin r\pi\xi_1\sin s\pi\xi_2\cdot\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{p}\int_0^t e^{-k(t-\tau)}\sin\{d_{rs}(t-\tau)\}\cdot\mathfrak{p}(\xi_1a,\xi_2b;\tau)d\tau\cdots(3\text{-}5)$$

版の減衰係数を無視すると，(3-2)〜(3-5) 式に相当して，

$$w(x,y;t)=[1]+[2]$$

但し
$$[1]=\frac{4}{M}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big[\mathfrak{L}_2\mathfrak{p}(x,y;t)\cdot\sin\frac{r\pi}{a}\Big\{\xi_1 a+f_x\Big(\int_0^t v_x(\tau)d\tau\Big)\Big\}\cdot\sin\frac{s\pi}{b}\Big\{\xi_2 b+f_y\Big(\int_0^t v_y(\tau)d\tau\Big)\Big\}\Big/(p^2+D^2_{rs})\Big]$$
$$[2]=\frac{4}{ab}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\Big[\frac{\sin D_{rs}t}{D_{rs}}\Big(\int_0^a\int_0^b B_{xy}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy+\cos D_{rs}t\Big)\int_0^a\int_0^b A_{xy}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy\Big] \quad\cdots\cdots(3\text{-}6)$$

$$[1]=\frac{4}{M}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}D_{rs}^{-1}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{a}\int_0^t\sin\{D_{rs}(t-\tau)\}\cdot\mathfrak{p}(x,y;t)\times\sin\frac{r\pi}{a}\Big\{\xi_1 a+f_x\Big(\int_0^\tau v_x(\xi)d\xi\Big)\Big\}\cdot\sin\frac{s\pi}{a}\Big\{\xi_2 b+f_y\Big(\int_0^\tau v_y(\xi)d\xi\Big\} \quad\cdots\cdots(3\text{-}7)$$

$$[1]=\frac{4}{M}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin r\pi\xi_1\sin s\pi\xi_2\cdot\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big\{\mathfrak{L}_2\mathfrak{p}(\xi_1 a,\xi_2 b;t)/(p^2+D_{rs}^2)\Big\} \quad\cdots\cdots(3\text{-}8)$$
$$=\frac{4}{M}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}D_{rs}^{-1}\sin r\pi\xi_1\sin s\pi\xi_2\cdot\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\int_0^t\sin\{D_{rs}(t-\tau)\}\mathfrak{p}(\xi_1 a,\xi_2 b;t)d\tau \quad\cdots\cdots(3\text{-}9)$$

(b) 積分方程式による誘導

(3-6) 式と同様の最も簡単な場合を考え，時刻 t に於ける荷重の位置を $\Big\{\xi_1 a+f_x\Big(\int_0^t v_x(\tau)d\tau\Big),\ \xi_2 a+f_y\Big(\int_0^t v_y(\tau)d\tau\Big)\Big\}$ とし，(x,y) 点の撓みを $w(x,y;t)$ とすれば，

$$w(x,y;t)=\frac{\mathfrak{p}(x,y;t)}{N}K_2\Big\{x,y;\ \xi_1 a+f_x\Big(\int_0^t v_x(\tau)d\tau\Big),\ \ \xi_2 b+f_y\Big(\int_0^t v_y(\tau)d\tau\Big)\Big\}-\int_0^a\int_0^b K_2(x,y;\xi,\eta)\frac{\rho h}{g}\cdot\frac{1}{N}\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}d\xi d\eta \quad\cdots\cdots(10)$$

茲に K_2 は積分方程式の二重複核であるが，この式に初期条件を考慮して Laplace 変換を施すと，

$$\mathfrak{w}(x,y;p)=\frac{1}{N}\ \mathfrak{L}_2\Big\{\mathfrak{p}(x,y;t)K_2\Big\{x,y;\xi_1 a+f_x\Big(\int_0^t v_x(\tau)d\tau\Big),\ \xi_2 b+f_y\Big(\int_0^t v_y(\tau)d\tau\Big)\Big\}\Big]-\frac{\rho h}{g}\ \frac{p^2}{N}\int_0^a\int_0^b K_2(x,y;\xi,\eta)\mathfrak{w}(x,y;p)d\xi d\eta+\frac{\rho h}{g}\ \frac{1}{N}(p^2 A_{xy}+pB_x{}^y)\int_0^a\int_0^b K_2(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta \quad\cdots\cdots(11)$$

茲に $\mathfrak{L}_2 w(x,y;t)=\mathfrak{w}(x,y;p)$ にして，積分方程式の核の固有値及び固有函数 $\lambda_{rs},\varphi_{rs}(x,y)$ は4辺自由支持の矩形版に対して次の如く表される。

$$\lambda r_s=\pi^2\Big(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}\Big),\quad \varphi_{rs}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b} \quad\cdots\cdots(12)$$

従つて $\lambda=-p^2/(gN/\rho h)$ を積分方程式のパラメーターとして，(11) 式に相反核又は解核の性質を応用すると．

$$\mathfrak{w}(x,y;p)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\varphi_{rs}(x,y)}{\lambda_{rs}^2-\lambda}\Big[\frac{1}{N}\ \mathfrak{L}_2\Big[\varphi_{rs}\Big\{\xi_1 a+f_x\Big(\int_0^t v_x(\tau)d\tau\Big),\ \xi_2 b+f_y\Big(\int_0^t v_y(\sigma)d\tau\Big)\Big\}\cdot\mathfrak{p}(x,y;t)\Big]+\frac{\partial h}{gN}(p^2 A_{xy}+pB_{xy})\frac{2\sqrt{ab}}{rs\pi^2}(1-\cos r\pi)(1-\sin r\pi)\Big] \quad\cdots\cdots(13)$$

これを更に逆変換すれば，(3-6) 式と同一の式が導かれ，次いで (3-7)〜(3-9) の各式を求めることが出来る。

2. 作用點の移動する數個の集中荷重を受ける場合の一般公式

梁の場合と同様に，単一集中荷重の場合の公式を組合わすことによつて解を求めることが出来る。実際重要なのは連行荷重の場合であるが，荷重の質量を考慮すると撓みを一般公式として示すことは困難であるから，茲では荷重の質量を無視し (3-1) 式以下を用いて計算することにする。

今自動車が版上を通る場合の如く，4個の荷重 $\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \mathfrak{p}_4$ を考え，車輪の前後及左右の間隔を夫々 d_1，

d_0 とし，図の如く y 軸に平行に速度 $v(t)$（但し前車輪が $y=0$ より距離 d_1 まで進む際の速度は $v_1(t)$ とする）を以て進むものとすれば，

$$
\begin{aligned}
u(x,y;t)=&\frac{4}{M}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{b\pi y}{b}\ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big[\ \mathfrak{L}_2\Big\{\ \mathfrak{p}_1\sin r\pi\xi_1\sin\frac{s\pi}{b}\\
&\left(\int_0^t v(\tau)d\tau+d_1\right)+\ \mathfrak{p}_2\sin\frac{r\pi}{a}(\xi_1 a+d_0)\sin\frac{s\pi}{b}\left(\int_0^t v(\tau)d\tau+d_1\right)\\
&+\mathfrak{p}_3\sin r\pi\xi_1\sin\frac{s\pi}{b}\left(\int_0^t v(\tau)d\tau\right)+\mathfrak{p}_4\sin\frac{r\pi}{a}(\xi_1 a+d_0)\sin\frac{s\pi}{b}\left(\int_0^t v(\tau)d\tau\right)\Big\}\Big/\left(p^2+2kp+\boldsymbol{D}_{rs}^2\right)\Big]\\
&+\frac{4}{M}e^{-kt}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\Big[\frac{\sin(\boldsymbol{d}_{rs}t)}{\boldsymbol{d}_{rs}}\Big(\frac{d}{dt}\Big[\ \sin r\pi\xi_1\mathfrak{L}_2^{-1}\\
&\Big\{\ \mathfrak{L}_2\Big(\ \mathfrak{p}_1\times\sin\frac{s\pi}{b}\int_0^{t_1}v_1(\tau)d\tau\Big)\Big/(p^2+2kp+\boldsymbol{D}_{rs}^2)\\
&+\sin\frac{r\pi}{a}(\xi_1 a+d_0)\ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big\{\ \mathfrak{L}_2\Big(\ \mathfrak{p}_2\sin\frac{s\pi}{b}\int_0^{t_1}v_1(\tau)d\tau\Big)\Big/(p^2+2kp+\boldsymbol{D}_{rs}^2)\Big\}\Big]\\
&+\frac{M}{ab}e^{-kt_1}\int_0^a\int_0^b\boldsymbol{B}_{xy}\sin\frac{s\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy\Big)+2k\Big[\ \sin r\pi\xi_1\ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big\{\ \mathfrak{L}_2\Big(\ \mathfrak{p}_1\sin\frac{s\pi}{b}\int_0^{t_1}v_1(\tau)d\tau\Big)\\
&\Big/(p_2+2kp+\boldsymbol{D}_{rs}^2)\Big\}+\sin\frac{r\pi}{a}(\xi_1 a+d_0)\ \ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big\{\ \mathfrak{L}_2\Big(\ \mathfrak{p}_2\sin\frac{s\pi}{b}\int_0^{t_1}v_1(\tau)d\tau\Big)\Big/(p^2+2kp+\boldsymbol{D}_{rs}^2)\Big\}\\
&+\frac{M}{ab}e^{-kt_1}\int_0^a\int_0^b\boldsymbol{A}_{xy}\sin\frac{r\pi x}{a}\times\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy\Big]-\frac{\boldsymbol{D}_{rs}}{\boldsymbol{d}_{rs}}\sin\Big\{\boldsymbol{d}_{rs}t-\tan^{-1}\Big(\frac{\boldsymbol{d}_{rs}}{k}\Big)\Big\}\Big[\ \sin r\pi\xi_1\ \mathfrak{L}_2^{-1}\\
&\Big\{\ \mathfrak{L}_2\Big(\ \mathfrak{p}_1\sin\frac{s\pi}{b}\int_0^{t_1}v_1(\tau)d\tau\Big)\Big/(p^2+2kp+\boldsymbol{D}_{rs}^2)\Big\}+\sin\frac{r\pi}{a}(\xi_1 a+d_0)\ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big\{\ \mathfrak{p}_2\Big(\mathfrak{L}_2\sin\frac{s\pi}{b}\\
&\int_0^{t_1}v_1(\tau)d\tau\Big)\Big/(p^2+2kp+\boldsymbol{D}_{rs}^2)\Big\}+\frac{M}{ab}e^{-kt_1}\int_0^a\int_0^b\boldsymbol{A}_{x^y}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy\Big]\Big]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}10)
\end{aligned}
$$

茲に t_1 は $y=0$ の点を前，後の車輪が通る時間間隔，$\boldsymbol{A}_{xy}$ 及び $\boldsymbol{B}_{xy}$ は前車輪が $y=0$ に達した時の版の中立面の位置及びその速度を表す式とする。式中各荷重は互に連成振動をするから，その関係式を代入すれば求める解となる。

次に減衰係数 k を無視する場合は，(3-10) 式にて $k=0$，従つて $\boldsymbol{d}_{rs}=\boldsymbol{D}_{rs}$，$e^{-kt_1}=1$，$\sin\{\boldsymbol{d}_{rs}t-\tan^{-1}(\boldsymbol{d}_{rs}/k)\}=-\cos(\boldsymbol{D}_{rs}t)$ とすればよい。

任意の車輪配置を有する数多くの車輛の場合に対して容易に公式を書くことが出来るはずである。

3.　作用點の移動しない數個の集中荷重又は分布荷重を受ける場合の一般公式

n 個の振動荷重 $\mathfrak{p}_1$，$\mathfrak{p}_2$，……，$\mathfrak{p}_n$ が夫々版上の定点 (c_{1x},c_{1y})，(c_{2x},c_{2y})，……，(c_{nx},c_{ny}) に作用する場合は，荷重の質量を無視し (3-1) 式以下を用いると，

$$
\begin{aligned}
u(x,y;t)=&\frac{4}{M}\sum_{\nu=1}^{\Omega}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi c_{\nu x}}{a}\sin\frac{s\pi c_{\nu y}}{b}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\ \ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big\{\mathfrak{L}_2\mathfrak{p}_\nu\ (x,y;t)\,/\,(p^2+2kp+\boldsymbol{D}_{rs}^2)\Big\}\\
&+\frac{4}{ab}e^{-kt}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\Big[\frac{\sin(\boldsymbol{d}_{rs}t)}{\boldsymbol{d}_{rs}}\Big(\int_0^a\int_0^b\boldsymbol{B}_{xy}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy\\
&+2k\int_0^a\int_0^b\boldsymbol{A}_{xy}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy-\frac{\boldsymbol{D}_{rs}}{\boldsymbol{d}_{rs}}\sin\Big\{\boldsymbol{d}_{rs}t-\tan^{-1}\Big(\frac{\boldsymbol{d}_{rs}}{k}\Big)\Big\}\\
&\int_0^a\int_0^b\boldsymbol{A}_{xy}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy\Big]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}11)
\end{aligned}
$$

減衰係数を無視する場合は，上式にて　$k=0$，従つて　$\boldsymbol{d}_{rs}=\boldsymbol{D}_{rs}$，$e^{-kt}=1$，$\sin\Big\{\boldsymbol{d}_{rs}t-\tan^{-1}\Big(\frac{\boldsymbol{d}^{rs}}{k}\Big)\Big\}=-\cos(\boldsymbol{d}^{rs}t)$ とすればよい。

次に各種の型の分布荷重が時間函数として作用する場合は，荷重の分布強度の曲面を $z=\mathfrak{p}_0 f(p;x,y)$ で表すと，(3-11) 式にて第1項〔1〕のみを次の如く書改めればよい。

$$
〔1〕=\frac{4}{M}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\ \ \mathfrak{L}_2^{-1}\Big[\ \mathfrak{L}_2\Big\{\iint p_0\sin\frac{r\pi\xi}{a}\sin\frac{s\pi\eta}{b}f(q;\xi,\eta)d\xi d\eta\Big\}\Big/(p^2+2kp+\boldsymbol{D}_{rs}^2)\Big]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3\text{-}12)
$$

なお減衰係数 k を無視した場合の関係は，(3-11) 式に於けると同様である。

4. 作用點の移動する線型分布荷重を受ける場合の一般公式

座標軸方向に線型の分布をした荷重がそれと直角の方向に任意の速度 $v(t)$ にて移動する場合は，単一集中荷重の場合の公式より簡単に一般公式を導くことが出来る。今 x 軸方向に分布した荷重強度を $\mathfrak{p}_0 f(q,c)$ とし，これが y 軸方向に速度 $v(\tau)$ にて移動するとすれば，(3-11) 式にて第1項〔1〕のみを次の如く書改めればよい。

$$[1]=\frac{4}{M}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{\pi xa}{r}\sin\frac{s\pi y}{b}\;\mathfrak{L}_2^{-1}\left[\mathfrak{L}_2\left\{\int \mathfrak{p}_0\sin\frac{s\pi}{b}\int_0^t u(\tau)d\tau\cdot\sin\frac{r\pi c}{a}\cdot f(q,c)dc\right\}\Big/(p^2+2kp+D_{rs}^2)\right] \quad\cdots\cdots(3\text{-}13)$$

又 y 軸方向の分布荷重 $\mathfrak{p}_0 f(q,c)$ が x 軸方向に速度 $v(\tau)$ で移動する場合も同様にして公式を誘算することができる。

第4編 彈性支床上の矩形版の撓み振動

1. 單一集中荷重を受ける場合の一般公式

この場合弾性支床上の梁の場合と同様に，弾性支持の状態を如何に仮定するかゞ問題である。円形版に軸対称の荷重が働く場合，弾性支持の状態を種々に考察して撓みを求めたものもあるが[14]，荷重の移動する矩形版の場合にこれを応用することは困難である。従つて玆では梁の場合と同様に，従来の仮定に従つて撓みに比例する基礎反力によつて支持されるものとする。

(1) エネルギー式による誘導

(a) 荷重の質量を考慮する場合

前編と同様の状態にある矩形版を考えると，任意点の撓み $w(x,y;t)$ は一般座標 $q_{rs,t}$ を用い前編 (1) 式の如く展開出来るから，これを用いて運動及び位置のエネルギー並に散逸函数を計算すると，V のみ前と異り

$$V=\frac{N}{2}\int_0^a\int_0^b\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}+2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dxdy+\frac{\kappa}{2}\int_0^a\int_0^b w^2dx\,dy$$

$$=\frac{N}{2}\frac{ab\pi^4}{4}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}q_{rs,t}^2\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}\right)^2+\frac{\kappa ab}{8}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}q_{rs,t}^2 \quad\cdots\cdots(1)$$

Lagrange の運動方程式に T.V.F を代入して整理すると，

$$\frac{M}{4}\ddot{p}_{rs,t}+\frac{kM}{2}\dot{q}_{rs,t}+\left\{\frac{Nab\pi^4}{4}\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}\right)^2+\frac{\kappa ab}{4}\right\}q_{rs,t}=\left\{mg+\mathfrak{p}(x,y;t)\right.$$
$$\left.-m\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{\infty}q_{j\nu,t}\sin\frac{j\pi}{a}\int_0^t v_x(\tau)d\tau\cdot\sin\frac{\nu\pi}{b}\int_0^t v_y(\tau)d\tau\right)\right\}$$
$$\sin\frac{r\pi}{a}\int_0^t v_x(\tau)d\tau\cdot\sin\frac{s\pi}{b}\int_0^t v_y(\tau)d\tau \quad\cdots\cdots(2)$$

この式は荷重の質量がかなり小さい場合のみ右辺の対角行列をとつて Iteration method で解き得ることは，前編に於けると同様である。

(b) 荷重の質量を考慮しない場合

(4) 式にて m=0 として，

$$\ddot{q}_{rs,t}+2k\dot{q}_{rs,t}+\frac{1}{M}\left\{\pi^4Nab\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}\right)^2+\kappa ab\right\}q_{rs,t}$$
$$=\frac{4}{M}\mathfrak{p}(x,y;t)\sin\frac{r\pi}{a}\int_0^t v_x(\tau)d\tau\cdot\sin\frac{s\pi}{b}\int_0^t v_y(\tau)d\tau \quad\cdots\cdots(3)$$

$t=0$ の時の $q_{rs,t}$ 及び $\dot{q}_{rs,t}$ を夫々 $q_{rs,0}$ 及び $\dot{q}_{rs,0}$ として上式に Laplace の順変換を施し，更に逆変換を施すと，

---

14) D.L.Holl; "Thin plates on elastic foundation." Psoc.5 Intern. Congr. Appl.Mech., Cambridge, 1938.

$$q_{rs,t}=\frac{4}{M}\mathfrak{L}_2^{-1}\Big[\mathfrak{L}_2\Big\{\mathfrak{p}(x,y;t)\cdot\sin\frac{r\pi}{a}\int_0^t v_x(\tau)\,d\tau\cdot\sin\frac{s\tau}{b}\int_0^t v_y(\tau)d\tau\Big\}\Big/(p^2+2kp+G_{rs}^2)$$

$$+\{p^2q_{rs,0}+p(\dot{q}_{rs,0}+2kq_{rs,0})\}/(p^2+2kp+G_{rs}^2)\Big] \quad\cdots\cdots(4)$$

但し，　$G_{rs}=\sqrt{\{\pi^4N(r^2/a^2+s^2/b^2)+\varkappa\}g/(\rho h)}$，　$\sqrt{G^2{}_{rs}-k^2}\equiv g_{rs}$　$\cdots\cdots(5)$

$\therefore\ u(x,y;t)=[1]+[2]$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{但し}\ [1]=\frac{4}{M}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\,\mathfrak{L}_2^{-1}\Big[\mathfrak{L}_2\Big\{\mathfrak{p}(x,y;t)\cdot\sin\frac{r\pi}{a}\int_0^t v_x(\tau)d\tau\cdot\sin\frac{s\pi}{b}\\
&\qquad\int_0^t v_y(\tau)d\tau\Big\}\Big/(p^2+2kp+G_{rs}^2)\Big]\\
&[2]=\frac{4}{ab}e^{-kt}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\Big\{\frac{\sin(g_{rs}t)}{g_{rs}}\Big(\int_0^a\int_0^b B_{xy}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy\\
&\qquad+2k\int_0^a\int_0^b A_{xy}\times\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy\Big)-\frac{G_{rs}}{g_{rs}}\sin\{g_{rs}t-\tan^{-1}(g_{rs}/k)\}\\
&\qquad\int_0^a\int_0^b A_{xy}\sin\frac{s\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy\Big]
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4\text{-}1)$$

従つて，4辺自由支持の矩形版の公式 (3-1) にて D_{rs} を G_{rs} に，d_{rs} を g_{rs} に置換すれば，弾性支床上の矩形版の公式 (4-1) が得られるのであつて，このことは前編 (3-2)～(3-9) 式に対応する場合に就ても同様であるから，玆では説明を省略する。

(2)　積分方程式による誘導

走行荷重の質量及び版の減衰係数を無視し，時刻 t に於ける荷重の位置を $\Big\{\xi_1a+f_x\Big(\int_0^t v_x(\tau)d\tau\Big),\ \xi_2b+f_y\Big(\int_0^t v_y(\tau)d\tau\Big)\Big\}$ とすると，題意によつて次式が成立する。

$$w(x,x;t)=\frac{\mathfrak{p}(x,y;t)}{N}K_2\Big\{x,y;\xi_1a+f_x\Big(\int_0^t v_x(\tau)d\tau\Big),\ \xi_2b+f_y\Big(\int_0^t v_y(\tau)d\tau\Big)\Big\}$$

$$-\int_0^a\int_0^b K_2(x,y;\xi,\eta)\Big(\frac{\varkappa}{N}w+\frac{\rho h}{g}\frac{1}{N}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big)d\xi d\eta \quad\cdots\cdots(6)$$

この式に初期条件を考慮して Laplace 変換を施すと，

$$\mathfrak{w}(x,y;p)=\frac{1}{N}\mathfrak{L}_2\Big[\mathfrak{p}(x,y;t)K_2\Big\{x,y;\xi_1a+f_x\Big(\int_0^t v_x(\tau)d\tau\Big),\ \xi_2b+f_y\Big(\int_0^t v_y(\tau)d\tau\Big)\Big\}\Big]$$

$$-\int_0^a\int_0^b K_2(x,y;\xi,\eta)\Big(\frac{\kappa}{N}+\frac{\rho h}{gN}p^2\Big)\mathfrak{w}(x,y;p)d\xi d\eta+\frac{\rho h}{g}\frac{1}{N}\Big((pA_{xy}+pB^{xy})$$

$$\int_0^a\int_0^b K_2(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta \quad\cdots\cdots(7)$$

これより前編 (13) 式にて $\lambda=-(\varkappa+\rho hp^2/g)/N$ と置いた式が得られ，これを更に逆変換すると，

$$w(x,y;t)=\frac{4}{M}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{b}\sin\frac{s\pi y}{b}\,\mathfrak{L}_2^{-1}\Big[\mathfrak{L}^2\Big\{\mathfrak{p}(x,y;t)\sin\frac{r\pi}{a}\Big\{\xi_1a+f_x\Big(\int_0^t v_x(\tau)d\tau\Big\}\cdot$$

$$\sin\frac{s\pi}{b}\Big\{\xi_2b+f_y\Big(\int_0^t v_y(\tau)d\tau\Big)\Big\}\Big]\Big/(p^2+G_{rs}^2)\Big]+\frac{4}{ab}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}\Big(\frac{\sin(G_{rs},t)}{G_{rs}}$$

$$\int_0^a\int_0^b B_{xy}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy+\cos(G_{rs}t)\int_0^a\int_0^b A_{xy}\sin\frac{r\pi x}{a}\sin\frac{s\pi y}{b}dxdy\Big] \quad\cdots\cdots(4\text{-}2)$$

を得る。これは (3-1) 式にて D_{rs} を G_{rs} で置換したものに相当し，前項の最後に説明した通りの結果が得られたわけである。

昭和25年11月15日 印刷		土木学会論文集	
昭和25年11月20日 発行		第　5　号	
発行者	東京都千代田区大手町2丁目4番地		中　川　一　美
印刷者	東京都港区溜池町5番地		大　沼　正　吉
印刷所	東京都港区溜池町5番地		株式会社 技報堂

東京都中央局区内千代田区大手町2丁目4番地　　電話丸の内(23)3945番

社団法人　土　木　学　会　　振替東京16828番

TRANSACTIONS

OF

THE JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS

NO. 5

CONTENTS

November 1950

DOBOKU-GAKKAI

JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS

NO. 4 2CHO-ME OTE-MACHI CHIYODAKU TOKYO, JAPAN