

$$\Delta(1.5)=26.5, \quad \Delta(2.0)=-96.4$$

$$\therefore z^0=1.61 \quad \therefore z^0_e=z^0\left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon}\right)^2=14.59$$

(b) $\gamma=30\pi, \mu=0.3\pi$ の場合

$$\Delta(2.5)=69.7, \quad \Delta(3.0)=-17.7$$

$$\therefore z^0=2.82 \quad z^0_e=2.82 \times 3^2=25.38$$

従つて求める捩屈荷重は夫々 $\frac{14.49\pi^2 N_c}{b^2}, \frac{25.38\pi^2 N_c}{b^2}$ となる。

この場合にも(13), (15)式を使用すれば, 更に簡単に求められる。

上記 2, 3 及 4 に於ける計算値はいずれも, Barbré の計算と一致している。微分方程式系解法では捩屈条件式を求めるに際し 行列式を簡単な形に表すのに相當の苦勞をしていることがうかがわれるが, 本解法に従えばこの點煩の樂であり, 表さえ完備しておけば如何なる場合に對しても容易に解くことが出来る。

5. 結 言

以上示した如く, 撓角撓度法に依る解法は微分方程式系解法に比較して, 未知數を減少し得る點に於て甚だ有利である。このことは垂直補剛材を有する版の安定の問題に就ても言えたのであるが, 本文に示した如き水平補剛材を有する版に就ては, 更に一層強調し得るのである。この方法に従えば, 補剛材が等間隔であるか否とに拘らず, 又その補剛材の慣性モーメント及斷面積が等しいと否とに拘らず, その計算は初學者にも容易に出来る利點がある。なお本研究に當つては, 石原, 小西兩教授の御指導の賜つた。こゝに附記して謝意を表す次第である。

引 用 文 獻

- (1) S. Timoshenko: Eisenbau; 12 (1921), s. 147.
- (2) R. Barbré: Ing. Archiv; 8 (1937), s. 117.
- (3) 成岡昌夫: 撓角撓度法による矩形版の安定論; 土木研究に近く發表の豫定。
- (4) Chwalla: Stahlbau; 9 (1936), s. 161.

Vorbericht zum 2. Kongress der Intern.

Vereinigung für Brückenbau und Hochbau; 1936, S. 957,

- (5) Reissner: Z. A. M. M.; 5 (1935), S. 475.
- (6) G. Erlemann: Jb. Schiffbautechn. Ges; 34 (1933), S. 514.
- (7) Timoshenko: Theory of Elastic Stability p. 337.

Theory of Plates and Shells; p. 314.

(昭. 23. 7.15 受付)

Slade 型分布の非對稱性の吟味及その 2, 3 の新解法

正 員 岩 井 重 久*

Studies on Nonsymmetries of Slade-Type Distribution and Several New Solutions.

By Shigehisa Iwai, C. E. Member

要旨 水文統計において繼續曲線を推定する場合, その基本的分布の 1 つである Slade 型分布につき, 総合的かつ系統的に種々の場合の非對稱性を吟味し, 既往の諸理論を檢討の上, 2, 3 の新解法を提案したものである。

* 工學士 京都大學助教授

Summary.

The writer shows several new solutions on Slade-type distribution..... one of the fundamental distributions at the determination of the continuous curve in hydrological statisticsexamining systematically its various nonsymmetries and comparing with old theories.

目 次

- | | |
|---|--|
| <p>1. まえがき</p> <p>2. 基本理論</p> <p>3. 下限のみ有限な分布
(1) 非對稱性の吟味, (2) Slade 法の檢證,
(3) 新しい解</p> | <p>4. 上下限とも有限な分布
(1) 非對稱性の吟味, (2) V_S と V_I との比較,
(3) Slade 法の檢討及新方法</p> <p>5. 結 論</p> |
|---|--|

1. まえがき

ここで Slade 型分布と云うのは、獨及佛で夫々 Fechnersches Prinzip, Loi de L'effet Proportionnel と稱えられるもので、1932 年に Grassberger 及 Gibrat が全然連絡なく、しかも同時に着目して種々の理論及方法を展開し、又 1934 年に米の Slade が飛躍せしめて以來、水文統計にて最も有効なものとして採用されている非對稱型分布を意味せしめることとする¹⁾。著者の知る限りでは、この Slade 非對稱分布は水文統計における繼續函數の基本型として最新のものであり、又近來の動向として歐米諸國ではその有効性を認め、これに基いた幾多の新方法が展開しつつあるのである。しかしながらこの分布の各特性値、積率、特性係數、引いては曲線自體の非對稱性については、未だ完全に解折されたわけではない。この意味で著者はこの型の分布で片側が有限な場合及特に兩側が有限な場合について、夫々その非對稱性を徹底的に究明し、その結果として新しい 2, 3 の解を見出すことが出来た。これらの成果が世界的に進歩しつつある該方面の研究の一助ともなれば幸である。

2. 基本理論

Slade 型の非對稱分布はすべて Gauss の正規分布、

$$V_0(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-m(x))^2} = \frac{1}{2} \varphi_0(\xi) \frac{d\xi}{dx}, \quad \xi = h(x-m(x)) \dots\dots\dots (1)$$

の確率變量を對數變換して導かれるものであつて、まず變量 x をそのまま對數變換すれば式(2)の $V_E(x)$ となり、さらに x の原點を $(-b'_0)$ に移したものが式(3)の $V_I(x)$ となる。

$$\left. \begin{aligned} V_E(x) &= V_0(\log x) \frac{d(\log x)}{dx} = \frac{k \log e}{x\sqrt{\pi}} e^{-k^2(\log(x/x_0))^2} \\ &= \frac{1}{2} \varphi_0(\xi) \frac{d\xi}{dx}, \quad \xi = k \log(x/x_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} V_I(x) &= V_0(\log(x+b'_0)) \frac{d(\log(x+b'_0))}{dx} = \frac{c'_0 \log e}{(x+b'_0)\sqrt{\pi}} e^{-c'^2_0 \{\log((x+b'_0)/(x_0+b'_0))\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \varphi_0(\xi') \frac{d\xi'}{dx}, \quad \xi' = c'_0 \log \left\{ \frac{(x+b'_0)}{(x_0+b'_0)} \right\} \end{aligned} \right\} (3)$$

式(2)の V_E は x の原點 0 を下限とする非對稱分布を表し、Grassberger はこれを漸近展開せしめて利用したが、Gibrat 及 Slade はさらに一般化して x の下限値が $(-b'_0)$ となる様な式(3)の V_I を採用し、著者もこれに基いて既に 2, 3 の新方法を發表している¹⁾⁻⁵⁾。これらはともに x の上限は無限大となり下限のみが有限な分布であるが、Slade はさらに上、下限とも有限な分布を考え、下限値 $(-b)$ 以外に上限値 g を含んだ次の $V_S(x)$

1) 岩井重久; “水文學に於ける非對稱分布に就て”, 土木學會論文集, 昭 22, 第 1・2 合併號, p.101.
 2) 石原藤次郎, 岩井重久; “降雨曲線の決定に關する統計的方法”, 建設工學, 第 1 册, 昭 22.
 3) 石原藤次郎, 岩井重久, 山本正身; “流況曲線の統計的推定法”, 土木研究, 第 1 號, 昭 23.
 4) 岩井重久, 山本正身; “流況より見た本邦河川の特性について”, 建設工學, 第 4 册, 昭 23.
 5) 岩井重久; “確率洪水推定法及その本邦河川への適用”, 建設工學, 第 5 册, 昭 23.

を提案した。

$$\begin{aligned}
 V_S(x) &= V_0(\log \{(x+b)/(g-x)\}) \frac{d(\log \{(x+b)/(g-x)\})}{dx} \\
 &= \frac{(g+b)c_0 \log e}{(x+b)(g-x)\sqrt{\pi}} e^{-c_0^2 [\log \{(x+b)/(g-x)\} / \chi_0]^2} \\
 &= \frac{1}{2} \varphi_0(\xi'') \frac{d\xi''}{dx}, \quad \xi'' = c_0 [\log \{(x+b)/(g-x)\} - \log \chi_0]
 \end{aligned} \tag{4}$$

$X^0 = (x_0 + b) / (g - x_0)$, ただし $g > x > -b$, $g > b$ とする。

式(1)~(4)における $m(x)$, $1/(\sqrt{2} h)$; $\log x_0$, $1/(\sqrt{2} k)$; $\log(x_0 + b)$, $1/(\sqrt{2} c_0) \log X_0 = \log \{(x_0 + b)/(g - x_0)\}$, $1/(\sqrt{2} c_0)$ は、それぞれの対数座標についての平均値及標準偏差である。又式(1)の如き Gauss の正規分布では當然中央値は平均値と一致するから、式(2)中の $V_0(\log x)$ の中央値も $\log x_0$ となる。今 $V_0(\log x)$ を $V_E(x)$ に変換しても、変量の順序は不変であるから、 $V_E(x)$ の中央値は x_0 となり(圖-1 参照)、同様に式(3)及(4)の $V_I(x)$, $V_S(x)$ における中央値も x_0 となる。

水文統計では分布(密度)函数 V よりもその積分形である繼續函数 W が一般に問題となるのであるが、式(1)~(4)に基く W は明かに次の形をとる。

$$W_0(x) = \frac{1}{2} \{1 - \Phi_0(\xi)\} \tag{1}'$$

$$W_E(x) = \frac{1}{2} \{1 - \Phi(\xi)\} \tag{2}'$$

$$W_I(x) = \frac{1}{2} \{1 - \Phi(\xi')\} \tag{3}'$$

$$W_S(x) = \frac{1}{2} \{1 - \Phi(\xi'')\} \tag{4}'$$

以上の諸式中の φ_0 及 Φ_0 はそれぞれ Gauss の誤差函数及誤差積分を表す記號であつて、次に示す如きものである。

$$\varphi_0(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\theta^2} \tag{5}$$

$$\Phi_0(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-u^2} du = \int_0^\theta \varphi_0(u) du \tag{6}$$

3. 下限のみ有限な分布

(1) 非対称性の吟味

今 $x_0 = 1.5$, $\sqrt{2} k = 3.0$ として式(2)及(2)' から V_E - 及 W_E - 曲線を描くと 圖-1 の様になる。このうちで左端の曲線は式(2)中の $V_0(\log x) = \frac{k}{2} \varphi_0(\xi)$ を示し、その $\log x_0$ の位置に $V_E(x)$ の x_0 の位置を揃えて書いたものが中央の V_E - 曲線、これに基いた繼續曲線が右端の W_E - 曲線であつて、これらは適當な數表を用いて容易に矢印に示す経路に従つて書くことが出来る。

表-1

$x_0 = 1.5, \sqrt{2} k = 3.0$

	x	$\log(x/x_0)$	$\frac{\sqrt{2} \xi}{\sqrt{2} k \log(x/x_0)}$	$V_0(\log x)$	$\frac{V_E(x)}{V_0(\log x) \frac{\log x}{x}}$	$\frac{W_E(x)}{W_0(\log x)}$
$m(x)$	2.0138	0.12792	0.38376	1.11183	0.23979	0.35058
x_0	1.5000	0.00000	0.00000	1.19682	0.34651	0.50000
$wnd_2(x)$	1.4105	-0.02673	-0.08019	1.19298	0.36732	0.53196
$hst(x)$	0.8322	-0.25586	-0.76759	0.89610	0.46764	0.77863
$wnd_1(x)$	0.2725	-0.74079	-2.22237	0.10128	0.16143	0.98687

$$\mu_1 = 2.01375$$

$$\sigma = 1.80373$$

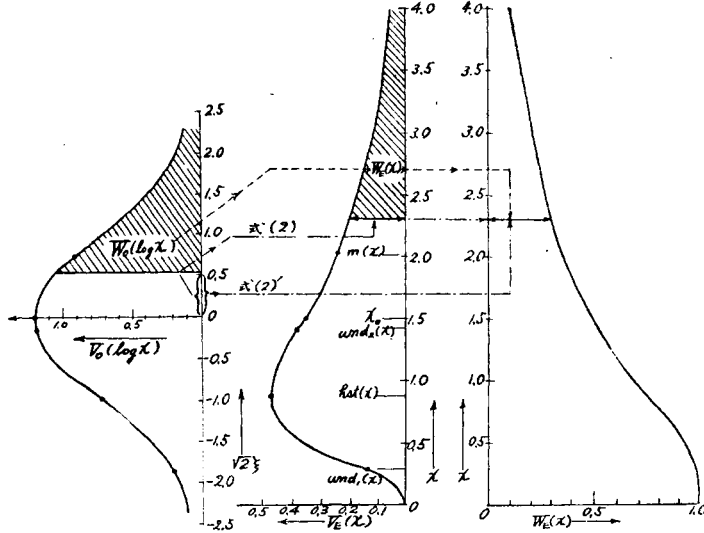
基準系 $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 3.40576 > 0 \\ \alpha_4 = 29.00530 > 3 \end{cases}$

これに基いた繼續曲線が右端の W_E - 曲線であつて、これらは適當な數表を用いて容易に矢印に示す経路に従つて書くことが出来る。

V_I - 及 W_I - 曲線はそれぞれ V_E - 及 W_E - 曲線と同様に解折することが出来るから、まず式(2)の V_E - 曲線についてその非対称性を吟味してみよう。一般に V - 曲線は W - 曲線の 1 次微分形であるから、 V_E - 曲線の 0 点で W_E - 曲線は x 軸に平行な

接線をもつことになり、又 V_E -曲線の最高點 (W_E -曲線の變曲點に相當する) 及變曲點の位置線次の様にして求められる。すなわち式(2)より $V_E(\chi)$ の s 次微分を求めると、

圖一 $W_E(\chi)$ -及 $W_E(\chi)$ -曲線



$$V_E^s(\chi) = \frac{\alpha^s V_E^s(\chi)}{\alpha \chi^s} = \frac{1}{2} \sum_{u=0}^s C_u \varphi^{(s-u)}(\xi) \frac{d^{(u+1)}}{d\chi^{(u+1)}} \chi^{(u+1)}$$

ただし、 $\varphi^{(s-u)}(\xi) = \frac{d^{(s-u)} \varphi_0(\xi)}{d\xi^{(s-u)}}$, $(s=1, 2, 3, \dots)$ }(7)

となるから、たゞちに $V_E^1(\chi)$, $V_E^2(\chi)$ が計算さるべく、 $V_E^1(\chi)=0$ 及 $V_E^2(\chi)=0$ を χ について解くと夫々最高點の位置 (χ の最頻値) $hst(\chi)$ 及變曲點の位置 $wnd_1(\chi)$, $wnd_2(\chi)$ が次の如く與えられる。勿論下限 $\chi=0$ と $\chi \rightarrow +\infty$ で V_E -曲線が χ 軸に接することは明かである。

$$hst(\chi) = \delta \chi_0, \quad \text{ただし } \log \delta = -K/(2k), \quad \delta^{-10^{-K/(2k)}} = e^{-K^2/2} \dots \dots \dots (8)$$

$$wnd_1(\chi) = \delta_1 \chi_0, \quad wnd_2(\chi) = \delta_2 \chi_0$$

ただし、 $\left. \begin{aligned} \log \delta_1 \Big\{ \log \delta_2 \Big\} &= \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{1+8/K^2}) \log \delta \quad (\text{複號同順}) \\ \therefore \delta_1 \Big\{ \delta_2 \Big\} &= e^{-\frac{K^2}{4} (3 \pm \sqrt{1+8/K^2})} = \delta^{(3 \pm \sqrt{1+8/K^2})/2} \quad (\quad) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$

こゝに、 $K=1/(k \log e) = 2.30259/k \dots \dots \dots (10)$

この場合原點に關する χ の t 次積率 μ_t は上の K を用いて、

$$\mu_t = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^t \varphi_0(\xi) d\xi = \chi_0^t e^{t^2 K^2/4} \left[\frac{1}{2} \vartheta^0(\eta_t) \right]_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} = \gamma_t \chi_0^t$$

ただし、 $\eta_t = \xi - (tK)/2$, $\log \gamma_t = -t^2(\log \delta)/2$, $\gamma_t = \gamma_1^{t^2}$,
 $t=1, 2, 3, \dots$ なる有限正整數 }(11)

の如く表されるから、こゝで $t=1$ とすれば χ の平均値 $m(\chi)$ は次の如く求められる。

$$m(\chi) = \mu_1 = \gamma_1 \chi_0, \quad \text{ただし } \log \gamma_1 = -(\log \delta)/2, \quad \gamma_1 = \delta^{-1/2} = 10^{K/(4k)} \dots \dots \dots (12)$$

又式(11)を書き直すと、

$$\mu_t = (\gamma_1 \chi_0)^t = (\gamma_1^{t-1} \mu_1)^t, \quad (t=1, 2, 3, \dots \text{ なる有限正整數}) \dots \dots \dots (13)$$

式(10)の k 従つて K を有限な正値とすると、式(8),(9),(12)より、

$$\delta < \delta < 1 < \gamma_1, \quad \delta < \delta_2$$

となり、さらに

$$\left. \begin{aligned} K \leq \sqrt{8.15} \quad & \text{に應じて } \gamma_1 \leq \delta_2 \\ K \leq 1 \quad & \text{に應じて } 1 \leq \delta_2 \end{aligned} \right\}$$

となるから、次の不等式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \text{wnd}_1(\chi) < \text{hst}(\chi) < \chi_0 < m(\chi), \quad \text{hst}(\chi) < \text{wnd}_2(\chi); \\ k \geq 3.15295, \quad K \leq 0.73030 \text{ の場合, } \quad m(\chi) \leq \text{wnd}_2(\chi) < m(\chi) \\ 2.30259 \leq k < 3.15295, \quad 0.73030 < K \leq 1 \text{ " , } \quad \chi_0 \leq \text{wnd}_2(\chi) < m(\chi) \\ k < 2.30259, \quad 1 < K \text{ " , } \quad \text{wnd}_3(\chi) < \chi_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

従つてこの型の分布では第 1 變曲點、最頻値、中央値の順序に大きく、第 2 變曲點は k の値如何によつて最頻値よりは大きい任意の位置をとることがわかる。なお式 (8) 及 (12) から導かれる次の關係は甚だ有効に利用されるものである。

$$\text{hst}(\chi)(m(\chi))^2 = \chi_0^3 \dots\dots\dots(15)$$

今 $\chi_0 = 1.5$, $\sqrt{2}k = 3.0$ として式(8),(9)及(12)の各特性値を計算すると、圖一に示した様な値となる。

他方 $k=0$, 従つて $K \rightarrow +\infty$ の場合は, $m(\chi) \rightarrow +\infty$, $\text{wnd}_1(\chi) = \text{hst}(\chi) = \text{wnd}_2(\chi) = 0$ となり, 又 $k \rightarrow \infty$, $K=0$ となると $\text{wnd}_1(\chi)$, $\text{hst}(\chi)$, $m(\chi)$, $\text{wnd}_2(\chi)$ はすべて χ_0 に等しい。なお $k < 0$, 従つて $K < 0$ の場合は χ 軸の進行方向を逆にすればよく, $k > 0$ の場合と反對の偏りを呈するだけであつて, このことは $V_1(\chi)$ の場合でも同様である。

次に Pearson 流の吟味を行うことにする。この場合分布(密度)曲線の非對稱性は一般に位置の係數, 撒布度, 歪度及尖度の 4 つの特性係數で表されるが, これらは普通次式の平均値 μ_1 (又は $\alpha_1=0$), 標準偏差 σ (又は $\alpha_2=1$), α_3 及 α_4 で求めることが出来る。

$$\left. \begin{aligned} (\text{位置の係數}), \quad \mu_1 = m(\chi); \quad (\text{撒布度}), \quad \sigma = \sqrt{m/\mu_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

$$\left. \begin{aligned} (\text{位置の係數}), \quad \alpha_1 = 0; \quad (\text{撒布度}), \quad \alpha_2 = 1 \\ (\text{歪度}), \quad \alpha_3 = m/\mu_3/\sigma^3; \quad (\text{尖度}), \quad \alpha_4 = m/\mu_4/\sigma^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

上式中 α_t , ($t=1, 2, 3, 4$) はもとの χ 座標を變換し $(\chi - m(\chi))/\sigma$ を確率變量とする基準系に直した場合の t 次積率であつて, 位置及擴がりの程度を示す係數は常に $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$ となり, 又 $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_4 \geq 3$ によつて正規分布形と比較してそれぞれ歪の方向とその程度及尖りの度合を判定しうるのである。

又 m/μ_t は χ 座標における平均値 $m(\chi) = \mu_1$ のまはりの t 次積率であつて, 一般に次式にて計算される。

$$\left. \begin{aligned} m/\mu_t &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\chi - \mu_1)^t \varphi_1(\xi) d\xi = \sum_{a=0}^t {}_t C_a \mu_1^{t-a} (-\mu_1)^a \\ &= \sum_{a=0}^{t-2} {}_t C_a \mu_1^{t-a} (-\mu_1)^a + (1-t)(-\mu_1)^t, \quad (t=2, 3, 4, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)^\circ$$

今 k が有限な正值をとる場合, V_E -曲線についてこれらの特性係數を求めてみよう。まず式(16)中の μ_1 は k 及 χ_0 の値さえ與えられれば, 式(12)から容易に算出されるし, 他方 μ_1^{t-a} を式(13)から求めて式(18)に入れると,

$$m/\mu_t = \left\{ \sum_{a=0}^{t-2} (-1)^a {}_t C_a \gamma_1^{(t-a)(t-a)} + (-1)^t (1-t) \right\} \mu_1^t \dots\dots\dots(19)$$

となる。従つて $t=2, 3, 4$ として,

$$\left. \begin{aligned} m/\mu_2 &= (\gamma_1^2 - 1) \mu_1^2 \\ m/\mu_3 &= (\gamma_1^6 - 3\gamma_1^2 + 2) \mu_1^3 \\ m/\mu_4 &= (\gamma_1^{12} - 4\gamma_1^6 + 6\gamma_1^2 - 3) \mu_1^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

これらを式(16)°, (17)°に入れると, この型の分布の非對稱性を示す特性係數が次式で與えられることになる。

$$\mu_1 = \gamma_1 \chi_0, \quad \sigma = \mu_1 (\gamma_1^2 - 1)^{1/2} \dots\dots\dots(21)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 0, \quad \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 &= (\gamma_1^6 - 3\gamma_1^2 + 2) / (\gamma_1^2 - 1)^{3/2} = (\gamma_1^2 + 2) (\gamma_1^2 - 1)^{1/2} \\ \alpha_4 &= (\gamma_1^{12} - 4\gamma_1^6 + 6\gamma_1^2 - 3) / (\gamma_1^2 - 1)^2 = \gamma_1^8 + 2\gamma_1^6 + 3\gamma_1^4 - 3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

従つて一定の k に対し式(10), (8)から K 及 $\log \delta$ を計算しさえすれば, 式(12)より $\log \gamma_1$, 従つて γ_1 がわかり, これと與えられた χ_0 とからすべての特性係数の値が求められる。圖-1 中には $\chi_0=1.5, \sqrt{2}k=3.0$ とした場合の計算結果を示しておいた。なお前述の如くこの場合は常に $\gamma_1 > 1$ であるから, 式(21)の σ が存在すると同時に, 式(22)より,

$$\alpha_3 > 0, \quad \alpha_4 > 3 \dots\dots\dots(23)$$

が成立して不等式(14)で示された特性値の順序が檢證されたことになる。

又 $\sigma, \alpha_3, (\alpha_1-3)$ は $k=0$ のときにすべて正の無限大となるに反し, $k \rightarrow +\infty$ のときにはすべて 0 となるが, ここで適當な条件のもとに $\chi_0 \rightarrow +\infty$ とならしめると σ が存在しえて, この型の分布は Gauss の正規分布に近づくのである。

さらに Pearson の Criterion, κ によつて判定してみよう。

この κ は一般に式(17)の $\alpha_t, (t=1, 2, 3, 4)$ を用いて,

$$\kappa = \{\alpha_3(\alpha_4+3)\}^2 / \{4(4\alpha_4-3\alpha_3^2)(2\alpha_4-3\alpha_3^2-6)\} \dots\dots\dots(24)$$

の如く求められるから, これに式(22)を入れて,

$$\kappa = \{\gamma_1^8(\gamma_1^2-1)(\gamma_1^2+2)(\gamma_1^4+2\gamma_1^2+3)\}^2 / \{4\gamma_1^8(\gamma_1^2-1)(2\gamma_1^2+3)(4\gamma_1^4+5\gamma_1^2+3)\} \dots\dots(25)$$

となる。このとき γ_1 が 1 より大きい有限値をとるから,

$$\left. \begin{aligned} \kappa - 1 &= \{\gamma_1^4(\gamma_1^8+8\gamma_1^6+30\gamma_1^4+36\gamma_1^2+9)\} / \{4(2\gamma_1^2+3)(4\gamma_1^4+5\gamma_1^2+3)\} > 0 \\ \therefore \kappa &> 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

ゆえに, k が有限な正值をとるときは, V_E -曲線は Pearson の VI 型曲線に属することがわかる。もし $k=0$, 従つて $\gamma_1 \rightarrow +\infty$ の場合には $\kappa \rightarrow +\infty$ となつて Pearson の III 型曲線となるが, $k \rightarrow +\infty$ すなわち $\gamma_1 \rightarrow 1$ となつても $\kappa > 27/20 > 1$ となつてやはり VI 型曲線に属することがわかり, しかもさらに $\chi_0 \rightarrow +\infty, \kappa \rightarrow 0$ となると Gauss の正規型, すなわち, Pearson の VII 型に近づくことが豫想されるのである。

以上で V_E -曲線に関する考察を終つたから, さらにより一般的な式(3)の V_I -曲線について考えよう。この V_I -曲線は V_E -曲線の原因を下限値 $(-b'_0)$ に移しただけであつて, V_I と ξ' 及 W_I との関係も $(\chi+b'_0)$ 座標について考えると, V_E の場合と同様であることが判る。すなわち V_I -曲線は下限 $\chi = -b'_0$ 及 $\chi \rightarrow +\infty$ で χ 軸に接し, 又 c'_0 が有限な正值である限り, 式(8)~(10) 及 (12)に相應して次の諸式がえられる。

$$\text{hst}(\chi) = \delta'(\chi_0+b'_0) - b'_0, \quad \text{たゞし } \log \delta' = -K'/(2c'_0), \quad \delta' = e^{-K'/2} \dots\dots\dots(8)'$$

$$\text{wnd}_1(\chi) = \delta'_1(\chi_0+b'_0) - b'_0, \quad \text{wnd}_2(\chi) = \delta'_2(\chi_0+b'_0) - b'_0$$

$$\left. \begin{aligned} \text{たゞし, } \left. \begin{aligned} \log \frac{\delta'_1}{\delta'_2} &= \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{1+8/K'}) \log \delta' && \text{(複合同順)} \\ \frac{\delta'_1}{\delta'_2} &= e^{-\frac{K'}{4} (3 \pm \sqrt{1+8/K'})} = \delta'^{(3 \pm \sqrt{1+8/K'})/2} && (\quad) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)'\end{aligned}$$

$$\text{こゝに, } K' = 1/c'_0 \log e = 2.30259/c'_0 \dots\dots\dots(10)'$$

$$\left. \begin{aligned} m(\chi) &= \mu'_1 = \gamma_1(\chi_0+b'_0) - b'_0 \\ \text{たゞし, } \log \gamma_1 &= -(\log \delta')/2, \quad \gamma_1 = \delta'^{-1/2} = 10^{K'/(4c_0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)'$$

従つて式(14)の不等式は k 及 K の代りにそれぞれ c'_0 及 K' を用いるとそのまゝの形で成立し, 又式(15)に應じて次式が成立する。

$$\{\text{hst}(\chi+b'_0)\} \{m(\chi)+b'_0\}^2 = (\chi_0+b'_0)^3 \dots\dots\dots(15)'$$

次に Pearson 流の解折を行つてみよう。このために V_I -分布の χ 座標についての平均値 $m(\chi) = \mu'_1$ のまはりの t 次積率 $m\mu'_t$ が, $(\chi+b'_0)$ 座標についての平均値 $(\mu'_1+b'_0)$ のまはりの t 次積率に當然等しくなることを考えると, 式(20)に相應して次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} m\mu'_2 &= (\gamma_1^2-1)(\mu'_1+b'_0)^2 \\ m\mu'_3 &= (\gamma_1^6-3\gamma_1^2+2)(\mu'_1+b'_0)^3 \\ m\mu'_4 &= (\gamma_1^{12}-4\gamma_1^6+6\gamma_1^2-3)(\mu'_1+b'_0)^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)'$$

従つて式(21), (22)及(23)を導いたのと全く同様に, 式(16)^o及(17)^oから次式が導かれる。

$$\mu'_1 = \gamma'_1(\chi_0 + b'_0) - b'_0, \quad \sigma' = (\mu'_1 + b'_0)(\gamma'^2_1 - 1)^{1/2} \dots\dots\dots(21)'$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_1 &= 0, & \alpha'_2 &= 1 \\ \alpha'_3 &= (\gamma'^2_1 + 2)(\gamma'^2_1 - 1)^{1/2}, & \alpha'_4 &= \gamma'^8_1 + 2\gamma'^6_1 + 3\gamma'^4_1 - 3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)'$$

$$\alpha'_3 > 0, \quad \alpha'_1 > 3 \dots\dots\dots(23)'$$

又 Pearson の Criterion, κ についても, 式(26)中の γ_1 の代りに γ'_1 と置いただけで全く同様な式が成立するから, やはり $\kappa > 1$ となつて c'_0 が有限な正値をとる場合は V_I -曲線も Pearson の VI 型曲線に属することがわかるのである。

なお $c'_0 = 0$, 従つて $K' \rightarrow +\infty$ となるときは, b'_0 が負の無限大とならない限り $m(\chi) \rightarrow +\infty, \text{wnd}_1(\chi) = \text{hst}(\chi) = \text{wnd}_2(\chi) = -b'_0$ となり, 他方 $b'_0 \rightarrow -\infty$ となると $(\chi_0 + b'_0) \cong 0$ の条件から $\text{wnd}_1(\chi), \text{hst}(\chi), \text{wnd}_2(\chi), \chi_0$ 及 $m(\chi)$ はすべて正の無限大となる。

又 $c'_0 \rightarrow +\infty$, 従つて $K' = 0$ のときにはこれらの 5 特性値はすべて等しく, ここで特にある条件のもとに $(\chi_0 + b'_0) \rightarrow +\infty$ とならしめると, この分布は Gauss の正規型に近づくわけである。

この様に $c'_0 = 0$ 又は $c'_0 \rightarrow +\infty$ となる場合, さらに $\sigma, \alpha'_3, (\alpha'_4 - 3)$ の 3 特性係数及 κ については, V_{II} の場合の k が 0 又は正の無限大となるとききの 3 特性係数及 κ と全く同様の結果となる。

(2) Slade 法の検証

V_E は V_I にて b'_0 を 0 としたものに過ぎないから, 下限のみ有限な場合の一般式として以下に V_I を取扱うこととする。実際に式(3)の V_I を用いるためには, その中に含まれる 3 つの常数 c'_0, b'_0 及 χ_0 を標本値から何等かの方法で推定する必要がある。そのためにはこの 3 常数を未知数とする 3 元の連立方程式を解かねばならないが, 今 3 次までの標本積率を用いることとし, 式(21)' 及 (22)' と式(16)^o, (17)^o の関係から次の形の連立方程式を選ぶことにする。

$$\left\{ \begin{aligned} \mu'_1 &= \gamma'_1(\chi_0 + b'_0) - b'_0 \dots\dots\dots(27) \\ \sigma' &= \sqrt{m\mu'_2} = (\mu'_1 + b'_0)(\gamma'^2_1 - 1)^{1/2} \dots\dots\dots(28) \\ \alpha'_3 &= m\mu'_3 / (m\mu'_2)^{3/2} = (\gamma'^2_1 + 2)(\gamma'^2_1 - 1)^{1/2} \dots\dots\dots(29) \end{aligned} \right.$$

上式中 μ'_1 と $m\mu'_2$ 及 $m\mu'_3$ は標本上の平均値, 平均値のまわりの 2 次及 3 次積率としてすべて豫め観測値から算出しておくことが出来, 従つて σ', α'_3 も既知となる。又 γ'_1 は式(12)' 及 (10)' の関係から c'_0 で表されるから, この連立方程式は c'_0, b'_0 及 χ_0 を未知数として解けるわけであるが, 直接このまゝでは困難であるから, これらを implicit な形で含んだ t, b' 及 X'_0 を新たな未知数として採用し, 次の如く書改めることにする。

$$\left\{ \begin{aligned} b' &= (t^2 + 1)^{1/2} X'_0 \dots\dots\dots(27)' \\ \sigma' &= b't \dots\dots\dots(28)' \\ t^3 + 3t - \alpha'_3 &= 0 \dots\dots\dots(29)' \end{aligned} \right.$$

ただし, $X'_0 = \chi_0 + b'_0, \quad b' = \mu'_1 + b'_0, \quad t = (\gamma'^2_1 - 1)^{1/2} \dots\dots\dots(30)$

まず式(29)の 3 次方程式を解いて t を求めると, 式(28)' 及 (27)' から b' と X'_0 とが容易に計算されて次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} t &= A^{1/3} + B^{1/3}, \quad \left. \begin{aligned} A \\ B \end{aligned} \right\} = (\alpha'_3/2) \pm \sqrt{(\alpha'_3/2)^2 + 1}, \\ b' &= \sigma' t, \quad X'_0 = b'(t^2 + 1)^{-1/2} = b' \{ (\sigma'^2 + b'^2) / b'^2 \}^{-1/2} = \sigma' \{ t(t^2 + 1)^{1/2} \}; \\ c'_0 &= [2 \log e \log(t^2 + 1)]^{-1/2} = 1.07298 [\log(t^2 + 1)]^{-1/2} = 1.07298 [\log(\sigma'^2 + b'^2) / b'^2]^{-1/2} \\ b'_0 &= b' - \mu'_1, \quad \chi_0 = X'_0 - b'_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

この結果は積率法による Slade の解と全く一致する¹⁾⁶⁾。

(3) 新しい解

6) J. J. Slade; "An Asymmetric Probability Function," Trans. A. S. C. E., vol. 62, 1936, p. 47.

V_1 中の 3 常數 c'_0, b'_0 及 χ_0 を未知數として求める方法としては、前項における如く 1~3 次の標本積率を用いた Slade 法以外のものも考えられ、著者もすでに新方法を提案したが、ここではさらに別の方法を考究しよう。

今一般に必要な 3 元の連立方程式を立てるために、標本値から豫め出しておくことの出来る様な特性値、すなわち最頻値、中央値、平均値と平均値のまばりの 2 次積率との 4 つから 3 個を選ぶことにする。換言すると $\text{hst}(\chi)$ 及 χ_0 を標本から直接拾い出せる値、 μ'_1 及 m/μ_2 を式(27)~(29)におけると同様にやはり標本から算出出来る値とし、これらの内から 3 つ宛を既知數として選ぶと 4 組の組合せを生じ、各々の場合の解は次の様になる。なお以下に述べる a), b) 及 d) の場合の様に χ_0 がすでに與えられていると、未知數は c'_0 及 b'_0 の 2 つとなつて、當然 2 元の連立方程式をたてさえすればよい。

a) $\text{hst}(\chi), \chi_0, m(\chi)=\mu'_1$ を選ぶ場合 連立方程式として式(8)' 及 (12)' を用いると、式(15)' の關係から b'_0 に関する 2 次方程式

$$\left. \begin{aligned} & \{ \text{hst}(\chi) + 2\mu'_1 - 3\chi_0 \} b'^2_0 + \{ 2 \text{hst}(\chi)\mu'_1 + \mu'^2_1 - 3\chi_0 \} b'_0 + \{ \text{hst}(\chi)\mu'^2_1 - \chi_0^3 \} \\ & = Ab'^2_0 + Bb'_0 + C = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(32)$$

をうるから、これを解いて、 b'_0 を求め、さらに式(8)' 又は (12)' にかえて c'_0 を導き出すと、

$$\left. \begin{aligned} & b'_0 = (-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}) / (2A), \text{ここに } A, B, C \text{ は式(32)の係數} \\ & \text{からそれぞれ計算し、又複號を吟味して } -b'_0 < \text{hst}(\chi) \\ & \text{なるもののみを採用する。} \\ & c'_0 = 1.07298 \{ \log(X'_0/H) \}^{-1/2} = 0.75871 \{ \log(b'_0/X'_0) \}^{-1/2} \\ & \text{ここに、} H = \text{hst}(\chi) + b'_0, X'_0 = \chi_0 + b'_0, b' = \mu'_1 + b'_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(33)$$

b) $\chi_0, \mu'_1, \sigma' = \sqrt{m\mu'_2}$ を選ぶ場合 連立方程式として式(12)', (28)を用いる。すなわち式(12)' から b'_0 を μ'_1, χ_0 及 γ'_1 で表して式(28)に入れると、

$$\gamma'^3_1 + \gamma'^2_1 - u\gamma'_1 + u = 0, \text{ただし } u = \{ \sigma' / (\mu'_1 - \chi_0) \}^2 \dots\dots(34)$$

となる。これは解いて γ'_1 を求めて次の如く c'_0 と b'_0 とを計算すればよい。

$$b'_0 = (\mu'_1 - \gamma'_1 \chi_0) / (\gamma'_1 - 1), \quad c'_0 = 0.75871 (\log \gamma'_1)^{-1/2} \dots\dots(35)$$

なおこの方法による場合には式(34)にて γ'_1 の正根が存在するを要し、そのためには式(34)の判別式が正又は 0、従つて $u \geq 11.090$ でなければならない。

c) $\text{hst}(\chi), \mu'_1, \sigma'$ を選ぶ場合 連立方程式として式(8)', (12)' 及 (28)を用いる。まず式(8)' 及 (12)' から χ_0 を消去して b'_0 を γ'_1 の函數として求め、これを式(28)に入れると、

$$\gamma'^3_1 - (1+T)\gamma'^2_1 + 2T\gamma'_1 - T = 0, \text{ただし、} T = \sigma'^2 / \{ \text{hst}(\chi) - \mu'^2_1 \} \dots\dots(36)$$

この 8 次方程式を何等かの方法で解いて γ'_1 を求めると、 b'_0, c'_0 及 χ_0 は次の如く求められる。

$$\left. \begin{aligned} & b'_0 = \{ \text{hst}(\chi)\gamma'^3_1 - \mu'^3_1 \} / (1 - \gamma'^3_1), \quad c'_0 = 0.75871 (\log \gamma'_1)^{-1/2} \\ & \chi_0 = \{ (\mu'_1 + b'_0) / \gamma'_1 \} - b'_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(37)$$

別法として式(8)' 及 (12)' から χ_0 を消去した上で γ'_1 を $b' = \mu'_1 + b'_0$ の函數として求め、これを式(28)に入れると b' の 7 次式(36)' がえられ、これをといて b'_0, χ_0 及 c'_0 を式(37)' から求めてもよい。

$$\left. \begin{aligned} & b' + (3K\sigma'^2 + J)b'^3 + 3\sigma'^2 b'^5 + 3\sigma'^2 (K+J)b'^4 + 3\sigma'^4 b'^3 \\ & \quad + \sigma'^4 (K+3J)b'^2 + \sigma'^6 b' + \sigma'^8 J = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(36)'$$

ただし、 $J = \{ \text{hst}(\chi) - \mu'^2_1 \} / 2, K = \sigma'^2 (4J)$

$$\left. \begin{aligned} & b'_0 = b' - \mu'_1, \quad c'_0 = 0.75871 (\log \gamma'_1)^{-1/2} \\ & \chi_0 = (b' / \gamma'_1) - b'_0, \text{ただし、} \gamma'_1 = (\sigma'^2 + b'^2)^{1/2} / b' \end{aligned} \right\} \dots\dots(37)'$$

d) $\text{hst}(\chi), \chi_0, \sigma'$ を選ぶ場合 連立方程式として式(28)を書改めた式 $\sigma' = \gamma'_1 (\chi_0 + b'_0) (\gamma'^2_1 - 1)^{1/2}$ と式(8)' とを用いて $(\chi_0 + b'_0) = X'_0$ を消去すると、

$$(\gamma'^2_1)^3 - E\gamma'^2_1 + E = 0 \text{ 及び } E = \{ \sigma' / (\text{hst}(\chi) - \chi_0) \}^2 \dots\dots(38)$$

この γ'^2_1 に関する 3 次方程式を解いて γ'^2_1 を求めると、次の如く b'_0, c'_0 が計算される。

$$b'_0 = \{\chi_0 - \text{hst}(\chi) r'^2\} / (r'^2 - 1), \quad c'_0 = 1.07298 \{\log(r'^2)\}^{-1/2} \dots\dots\dots (39)$$

なをこの場合も b) の場合と同様に式(38)で r'^2 の正根が存在することを要し、そのためには $E \geq 6.750$ でなければならない。

以上の4つの解のうちで、d) の場合は σ' を標本から求めるとき、すでに標本平均値 μ' を豫め求めておかねばならないから、既知数としてこの μ' を用いずに σ' をとることは適當でないかも知れない。又實際の適用上から云つても、標本の性質に應じてなるべく計算の容易な方法によるべきである。例えば $\text{hst}(\chi)$ を標本からたゞちに捨てることは、確率洪水の場合には困難であるが、年流況を取扱うときには可能である。これらの各方法については、著者は實例につき比較検討してみた結果を改めて発表したいと考えている。なおこれらの外に Grassberger の系統の諸方法があり、又後に V_s の所で述べる様な計算法も色々考えられるが、その一つである Gibrat の方法は、理論的性質をすべて無視し一般観測値への適合性のみに基づいた特殊のものであると云い得るのである。

4. 上下限ともに有限な分布

上下限ともに有限な分布は式(4)で表されるのが、簡単のために媒介變量 ξ' を ξ で表すこととして再記すれば次の様である。

$$V_s(\chi) = \frac{1}{2} \varphi_0(\xi) \frac{d\xi}{dx}, \quad \xi = c_0 \{ \log \{ (x+b)/(g-x) \} - \log X_0 \}, \left. \vphantom{V_s(\chi)} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

$$X_0 = (\chi_0 + b)/(g - \chi_0), \quad \text{ただし, } g > \chi > -b, \quad g > b \quad \text{とする}$$

(1) 非対称性の吟味

この V_s についても式(7)の關係が成立するから、それによつてまず $V_{1s}(\chi)$, $V_{2s}(\chi)$ を求め、それぞれを 0 とした式を χ について解き $\text{hst}(\chi)$ 及 $\text{wnd}(\chi)$ を見出してみよう。そのために必要な關係として、

$$\frac{d\xi}{dx} = (g+b) \{ K(\chi+b)(g-\chi) \}, \quad \frac{d^2\xi}{dx^2} = \{ [2\chi - (g-b)] / (g+b) \} K \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \dots\dots\dots (40)$$

ただし、 $K = 1 / (c_0 \log e) = 2.30259 / c_0 \dots\dots\dots (10)'$

$\text{hst}(\chi); \quad V_{1s}(\chi) = \frac{dV_s(\chi)}{d\chi} = \frac{1}{2} \varphi_0(\xi) [-2\xi + K\{2\chi - (g-b)\} / (g+b)] \left(\frac{d\xi}{d\chi} \right)^2 = 0 \dots\dots\dots (41)^\circ$

を満足する ξ の値は、

$$\xi = K \{ 2\chi - (g-b) \} / \{ 2(g+b) \}$$

となる。従つて次の式(41)又は後述の式(41)'をみたす χ が $\text{hst}(\chi)$ となる。

$$\log \{ (\chi+b)/(g-\chi) \} = 0.43429 \{ K^2 / (g+b) \} \chi - 0.21715 \{ (g-b) K^2 / (g+b) \} + \log X_0 \quad (41)$$

所が任意の χ に対して一般に式(42)の關係が成立するから、 $\text{hst}(\chi)$ に対する Y の値を Y_h とすれば、式(41)からたゞちに式(41)'がえられることになる。

$$Y = Z - A = (X-1)/(X+1)$$

ここに、 $Z = 2\chi / (g+b), \quad A = (g-b) / (g+b), \quad \text{ただし}$

$$g > \chi > -b \quad \text{で} \quad |Y| < 1, \quad \therefore \tanh^{-1} Y = \frac{1}{2} \ln X \quad \dots\dots\dots (42)^\circ$$

$$X = (\chi+b)/(g-\chi) = (1+Y)/(1-Y) > 0, \quad \xi = \frac{1}{K} \ln(X/X_0),$$

$$\chi = (gX - b) / (1+X) = (g+b)Z / 2(g+b)(Y+A) / 2 = \{ (g-b) + (g+b)Y \} / 2$$

$$\left. \begin{aligned} \tanh^{-1} Y_h &= K^2 Y_h / 4 + 1.15129 \log X_0 \\ \text{hst}(\chi) &= \{ (g-b) + (g+b)Y_h \} / 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)'$$

この式(41)又は(41)'をみたす $\text{hst}(\chi)$ に対しては、後に式(54)で述べる如く X_0 及 K の値如何によつて 1~3 個の値が存在するのであつて、これらは何れも常用對數表又は双曲函數表を用いて正確に求めることが出来、そのうちの 1 個が眞の最頻値になるのである。

$$\text{wnd}(\chi); \quad V_{s^2}(\chi) = \frac{d^2 V_s(\chi)}{d\chi^2} = \varphi_0(\xi) \left\{ K'(g+b) \right\} + \frac{d\xi}{d\chi} \left\{ Y'^2 - 3\xi Y' + 2\xi^2 - 1 \right\} \left(\frac{d\xi}{d\chi} \right)^2 = 0 \quad (43)^\circ$$

$$\text{ただし,} \quad Y' = \left(\frac{d^2 \xi}{d\chi^2} \right) / \left(\frac{d\xi}{d\chi} \right)^2 = K \{ 2\chi - (g-b) \} / (g+b) = KY$$

従つて厳密には式(43)のみたす Y_1 及 Y_2 を求め、さらに式(41)'におけると同様にその各々に對して $Z=Y+A$ を出し、最後に $(g+b)Z/2$ としてそれぞれ $\text{wnd}_1(\chi)$ 及 $\text{wnd}_2(\chi)$ についての數値の正しい値を求めねばならない。

$$\left. \begin{aligned} \tanh^{-1} Y_1 &= K^2 [3Y_1 - \{3Y_1^2 + 2(4 - K^2)/K^2\}^{1/2}] / [8 + 1.15129 \log X_0] \\ \tanh^{-1} Y_2 &= K^2 [3Y_2 - \{3Y_2^2 + 2(4 - K^2)/K^2\}^{1/2}] / [8 + 1.15129 \log X_0] \\ \text{wnd}_1(\chi) &= \{ (g-b) + (g+b)Y_1 \} / 2 \\ \text{wnd}_2(\chi) &= \{ (g-b) + (g+b)Y_2 \} / 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

μ ; この分布における t 次積率は、式(4)'の X_0 及 式(10)''の K を用い、式(4)'から直接 χ を ξ の函數で表した上で次の如く導くことが出来る、

$$\begin{aligned} \mu_t &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^t \varphi_0(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ gX_0 e^{K\xi} - b \}^t (1 + X_0 e^{K\xi})^{-1} \varphi_0(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{s=0}^t {}^t C_s (gX_0 e^{K\xi})^s (-b)^{t-s} / (1 + X_0 e^{K\xi})^t \right] \varphi_0(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{s=0}^t {}^t C_s (gX_0)^s (-b)^{t-s} e^{sK\xi/4} \varphi_0(\xi - sK/2) \right] / (1 + X_0 e^{K\xi})^t d\xi \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=0}^t {}^t C_s (gX_0)^s (-b)^{t-s} e^{sK\xi/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(\xi - sK/2) / (1 + X_0 e^{K\xi})^t d\xi \quad \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

ここで式(11)に従つて、

$$\eta_s = \xi - sK/2 = \eta_0 - sK/2, \quad (s=0, \pm 1, \pm 2, \dots\dots \text{なる整数}) \quad \dots\dots\dots (45)$$

と定義し、不定積分、

$$\rho_t(\eta_s) = \int \varphi_0(\eta_s) / (1 + X_0 e^{K\xi})^t d\xi = \int \varphi_0(\eta_s) / \{ X_0 e^{K\xi} (1 + X_0^{-1} e^{-K\xi}) \}^t d\xi \quad \dots\dots\dots (46)$$

を考えると、これは $X_0 e^{K\xi}$ の値に應じて次の如く展開される。

$$X_0 e^{K\xi} < 1, \quad \rho_t(\eta_s) = \sum_{u=0}^{+\infty} {}^{t+u-1} C_{t-1} (-X_0)^u e^{u(2s+u)K^2/4} \int \varphi_0(\eta_{s+u}) d\xi \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$X_0 e^{K\xi} > 1, \quad \rho_t(\eta_s) = (-1)^t \sum_{u=0}^{+\infty} {}^{t+u-1} C_{t-1} (-X_0)^{-(u+t)} e^{(u+t)(-2s)K^2/4} \int \varphi_0(\eta_{s-u-t}) d\xi \quad \dots\dots\dots (46)_2$$

定積分 $\rho_t(\eta_s)$ $\xi \rightarrow +\infty$ を求める場合に式(46)₁、(46)₂ を有効に用いるために、積分範圍を分割して、

$$\left. \begin{aligned} \text{式(46)}_1 \text{に對し } \xi &= -\infty \sim \lambda, \quad \text{式(46)}_2 \text{に對し } \xi = \lambda \sim +\infty \\ \text{ただし,} \quad \lambda &= c_0 \log(X_0^{-1}), \quad X_0 = e^{-\lambda K} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

とすると、

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi_0(\eta_{s+u}) d\xi &= \int_{-\infty}^{\lambda - (s+u)K/2} \varphi_0(\eta_{s+u}) d\eta_{s+u} = \Phi_0(\lambda - (s+u)K/2) + 1 \\ \int_{\lambda}^{+\infty} \varphi_0(\eta_{s-u-t}) d\xi &= \int_{\lambda + (u+t-s)K/2}^{+\infty} \varphi_0(\eta_{s-u-t}) d\eta_{s-u-t} = 1 - \Phi_0(\lambda + (u+t-s)K/2) \end{aligned} \right.$$

となり、これらを用いて、

$$\left. \begin{aligned} \rho_t(\eta_s) \quad \xi \rightarrow +\infty \\ \xi \rightarrow -\infty &= \sum_{u=0}^{+\infty} {}^{t+u-1} C_{t-1} \left[(-X_0)^u e^{u(2s+u)K^2/4} \left\{ \Phi_0(\lambda - (u+s)K/2) + 1 \right\} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^t (-X_0)^{-(u+t)} e^{(u+t)(-2s)K^2/4} \left\{ 1 - \Phi_0(\lambda + (u+t-s)K/2) \right\} \right] \\ &= \sum_{u=0}^{+\infty} {}^{t+u-1} C_{t-1} \left[(-X_0)^u e^{u(2s+u)K^2/4} \left\{ \Phi_0(\lambda - (u+s)K/2) + 1 \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

$$\left. \begin{aligned} &+(-1)^t \sum_{u=t}^{+\infty} u_{-1} C_{t-1} \left[(-X_0)^u e^{u(u-2s)K^2/4} \{1 - \Phi_0(\lambda + (u-s)K/2)\} \right] \\ &= \sum_{u=t}^{+\infty} u_{-1} C_{t-1} \left[(-X_0)^{u-t} e^{(u-t)(u-t+2s)K^2/4} \{ \Phi_0(\lambda - (s+u-t)K/2) + 1 \} \right] \\ &+(-1)^t (-X_0)^u e^{u(u-2s)K^2/4} \{1 - \Phi_0(\lambda + (u-s)K/2)\} \end{aligned} \right\}$$

この関係は別な方法で次の如く導いてもよい。すなわち式(46)から式(46)'₁又は(46)'₂を見出しうるから、この各々が式(46)''₁又は(46)''₂の漸化式となるための収斂条件を求めるとそれぞれ式(46)₁又は(46)₂に対する条件と同じになる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_t(\eta_s) &= \left\{ \begin{aligned} &\rho_{t-1}(\eta_s) - X_0 e^{(2s+1)K^2/4} \rho_t(\eta_{s+1}) \dots\dots\dots (46)'_1 \\ &X_0^{-1} e^{-(2s-1)K^2/4} \{ \rho_{t-1}(\mu_{s-1}) - \rho_t(\mu_{s-1}) \} \dots\dots\dots (46)'_2 \end{aligned} \right. \\ X_0 e^{K\xi} < 1, \quad \rho_t(\eta_s) &= \sum_{q_1=0}^{+\infty} (-X_0)^{q_1} e^{q_1(2s+q_1)K^2/4} \rho_{t-1}(\eta_{s+q_1}) \\ &= \sum_{q_1=0}^{+\infty} \sum_{q_2=0}^{+\infty} \dots \sum_{q_t=0}^{+\infty} (-X_0)^u e^{u(2s+u)K^2/4} \rho_0(\mu_{s+u}), \quad \text{たゞし } u = \sum_{i=1}^t q_i \quad \left. \vphantom{\sum_{q_1=0}^{+\infty}} \right\} (46)''_1 \\ X_0 e^{K\xi} > 1, \quad \rho_t(\eta_s) &= \sum_{q_1=0}^{+\infty} (-1)^{q_1-1} (X_0)^{-q_1} e^{q_1(q_1-2s)K^2/4} \eta_{s-q_1} \\ &= (-1)^t \sum_{q_1=0}^{+\infty} \sum_{q_2=0}^{+\infty} \dots \sum_{q_t=0}^{+\infty} (-X_0)^{-u} e^{u(u-2s)K^2/4} \rho_0(\eta_{s-u}), \quad \text{たゞし } u = \sum_{i=1}^t q_i \quad \left. \vphantom{\sum_{q_1=0}^{+\infty}} \right\} (46)''_2 \end{aligned}$$

ここで、0又は1から始まる正整数列から、定和が u となる様な t 個の重複順列の数はそれぞれ $t+u-1 C_{t-1}$ 又は $u-1 C_{t-1}$ となり、又 $\rho_0(\eta_{s\pm u}) = \Phi_0(\eta_{s\pm u})$ であるから、上の場合と同様に 2つの範囲に分けて定積分を行うと式(48)の第2式がえられる。

η_t について始めに導いた式(44)の右邊中に含まれた定積分は、以上の如くして求めた式(43)で表されるから、例えばその第2式を用い式(5)°の φ_0 記號によると、

$$\left. \begin{aligned} \mu_t &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^t \left[{}_t C_s (g)^s (b)^{t-s} \left[(-1)^t \sum_{u=0}^{+\infty} {}_{t+u-1} C_u \left\{ \frac{(-X_0)^{u+s}}{\varphi_0((u+s)K/2)} \left(\Phi_0 \left(\lambda - \frac{u+s}{2} K + 1 \right) \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \sum_{u=t}^{+\infty} u_{-1} C_{t-1} \left\{ \frac{(-X_0)^{-(u-s)}}{\varphi_0((u-s)K/2)} \left(1 - \Phi_0 \left(\lambda + \frac{u-s}{2} K \right) \right) \right\} \right] \right] \right. \\ &= \frac{\varphi_0(\lambda)}{2} \sum_{s=0}^t \left[{}_t C_s (g)^s (b)^{t-s} \left[(-1)^t \sum_{u=0}^{+\infty} {}_{t+u-1} C_u \left\{ (-1)^{u+s} \left(\varphi_0 \left(\lambda - \frac{u+s}{2} K \right) \right)^{-1} \left(\Phi_0 \left(\lambda - \frac{u+s}{2} K \right) + 1 \right) \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{u=t}^{+\infty} u_{-1} C_{t-1} \left\{ (-1)^{-(u-s)} \left(\varphi_0 \left(\lambda + \frac{u-s}{2} K \right) \right)^{-1} \left(1 - \Phi_0 \left(\lambda + \frac{u-s}{2} K \right) \right) \right\} \right] \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

となる。従つてここに λ として式(47)の値を用いると、 φ_0 及 Φ_0 に関する適当な数表から μ_t の数値はいくらでもくわしく計算することゝ出来る。

$m(\chi) = \mu$; 式(49)にて $t=1$ とすれば、

$$\left. \begin{aligned} m(\chi) &= \mu_1 = \{ (g-b) + (g+b) Y_m \} / 2, \quad \text{ここに } Y_m = Y_{m,1} - \Phi_0(\lambda) \\ \text{たゞし, } &Y_{m,1} = \varphi_0(\lambda) \sum_{\gamma=1}^{+\infty} (-1)^{\gamma-1} (A_\gamma - B_\gamma) \\ &A_\gamma = \{ \varphi_0(\lambda - \gamma K/2) \}^{-1} \{ \Phi_0(\lambda - \gamma K/2) + 1 \} \\ &B_\gamma = \{ \varphi_0(\lambda + \gamma K/2) \}^{-1} \{ 1 - \Phi_0(\lambda + \gamma K/2) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

この Y_m を實算する場合、まず式(47)から λ を求めて φ_0 及 Φ_0 の数表を利用するのであるが、 λ と K 従つて X_0 の値如何により A_γ 及 B_γ についての 2つの無限交項級数は必ずしも同様に収斂するわけではなく、 $m(\chi)$ として一定の近似値を求めするために採用計算すべき項数はそれぞれ異なつてくるから、この點に注意することが

必要である。

各特性値の大きさの順序; χ の値の大小関係は、一般式(42)°にそれぞれの χ の値を入れて求められる Y , $\tanh^{-1} Y$ あるいは $\log X$ の値の大小関係からたゞちにおかる。この関係を利用するために、 χ を $\text{hst}(\chi)$, χ_0 , $m(\chi)$, $\text{wnd}_1(\chi)$, $\text{wnd}_2(\chi)$ としたときの X , Y 及ぎに、式(41)', (43)と同様に、それぞれ添字 h , 0 , m , 1 , 2 をつけることにする。

a) $\text{hst}(\chi)$ 及 χ_0 ; 式(4)'の X_0 はもともと式(42)°の規約をみたすから、

$$\frac{1}{2} \ln X_0 = 1.15129 \log X_0 = \tanh^{-1} Y_0 = -(\lambda K)/2$$

となり、式(41)'は

$$\tanh^{-1} Y_h - \tanh^{-1} Y_0 = K^2 Y_h / 4$$

と書改めることが出来、 $K \neq 0$ なる限りこの式の右邊で $Y_h \geq 0$ となるに應じて、左邊より $Y_h \geq Y_0$ となるから、次の関係を生ずる。

$$\text{hst}(\chi) \geq (g-b)/2 \text{ に應じて、 } \text{hst}(\chi) \geq \chi_0 \dots\dots\dots(51)^\circ$$

又式(41)'にて $\text{hst}(\chi) \geq (g-b)/2$, すなわち $Y_h \neq 0$ なる限り、

$$(\tanh^{-1} Y_h)/Y_h = K^2/4 + (\tanh^{-1} Y_0)/Y_0$$

となる。この左邊は Y_h の符號にかかわらず常に $+1$ より大であるから $0 < K \leq 2$ の場合は必ず Y_0 と Y_h とは同符號でなければならないが $K > 2$ のときは必ずしもこの様に同符號とはならない。従つて今 $K > 0$ とし $-b < \chi_0 < (g-b)/2$, すなわち $0 < X_0 < 1$, $-1 < Y_0 < 0$ の場合のみを考えると、式(51)°より最頻値と中央値との順序は次の様になる。

$$0 < K \leq 2; \quad \text{hst}(\chi) < \chi_0 < (g-b)/2 \dots\dots\dots(54)$$

$$K > 2; \quad \text{hst}(\chi) < \chi_0 < (g-b)/2, \text{ 又は } \chi_0 < (g-b)/2 < \text{hst}(\chi) \dots\dots\dots(54)'$$

次に最頻値と變曲點との順序を調べるに當り、上と同様に $-b < \chi_0 < (g-b)/2$ の場合のみについて $0 < K \leq 2$ と $K > 2$ とに分けて考えよう。

$0 < K \leq 2$; 式(48)によつて、

$$\tanh^{-1} Y_1 - K^2 Y_1 / 4 = K^2 [Y_1 - \{3Y_1^2 + 2(4 - K^2)/K^2\}^{1/2}] / 8 + \tanh^{-1} Y_0 < 0$$

従つて $Y_1 < 0$ でなければならないが、 Y_2 の方は正、負何れの符號をもとることが出来る。次に式(43)と式(41)'とから、

$$\tanh^{-1} Y_1 - \tanh^{-1} Y_h - (Y_1 - Y_h)K^2/4 = K^2 [Y_1 - \{3Y_1^2 + 2(4 - K^2)/K^2\}^{1/2}] / 8 < 0$$

$$\tanh^{-1} Y_2 - \tanh^{-1} Y_h - (Y_2 - Y_h)K^2/4 = K^2 [Y_2 + \{3Y_2^2 + 2(4 - K^2)/K^2\}^{1/2}] / 8 > 0$$

$$\therefore Y_1 < Y_h, \quad Y_2 > Y_h$$

これと式(54)とから、結局次の様になる。

$$\text{wnd}_1(\chi) < \text{hst}(\chi) < \chi_0 < (g-b)/2, \quad \text{hst}(\chi) < \text{wnd}_2(\chi) \dots\dots\dots(54)''$$

$K > 2$: 一式(43)の右邊が實數となるために、 Y_1 , Y_2 の何れも次の不等式を満足するものでなければならない。

$$Y^2 > 2(K^2 - 4)/(3K^2) > 0$$

この制限内においても、 Y_1 , Y_2 の大小関係はさらに吟味を要するものである。

この様に最頻値や變曲點の順序は非常に複雑であるから、これを究明するために、遡つて V_S - 曲線を徹底的に追跡してみよう。今式(4)を書改めると、

$$V_S(\chi) = \frac{1}{2K} \left\{ \frac{(g+b)(\chi+b)^2}{(\chi+b)^2} X_0 e^{K^2/4} \varphi_0(\eta_{+1}) - \frac{1}{2K} \frac{(g+b)(g-\chi)^2}{(g-\chi)^2} X_0^{-1} e^{K^2/4} \varphi_0(\eta_{-1}) \right\}$$

従つて K が有限で $X_0 = e^{\lambda K}$ が 0 ならざる有限値 (すなわち λ が有限値) をとる場合には、 $g > \chi > -b$ で常に $V_S(\chi) > 0$, 又 $\chi = g$ 及 $\chi = -b$ で $V_S(\chi) = 0$ となる。次に式(41)°から、

$$V_S'(\chi) = \frac{1}{2K^2} \left\{ \frac{(g+b)(\chi+b)^2}{(\chi+b)^2} \right\}^2 X_0^2 e^{K^2} \varphi'(\eta_{+2}) [-2\xi + KY]$$

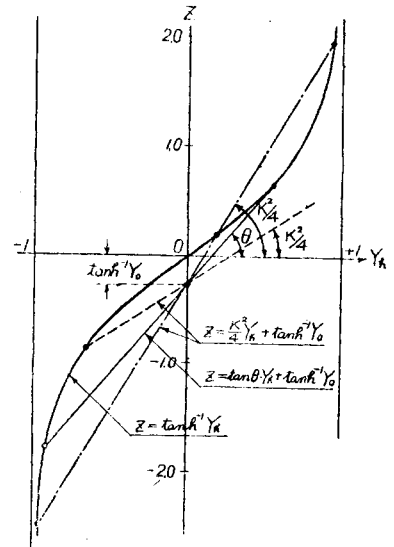
$$= \frac{1}{2K^2} \{(g+s)(g-\chi)^2\}^2 X_0^{-2} e^{K^2} \varphi_0(\eta_{-2}) [-2\xi + KY]$$

であるから、上と同じ条件のもとでは、 $\chi=g$ 及 $\chi=-b$ で $V_s^{-1}(\chi)=0$ となる。すなわち「 V_s -曲線は常に χ -軸より上にあり、両限値 g 及 $-b$ にて χ -軸に接し、この 2 点以外で接線が χ -軸と平行になる様な点は當然式(41)又は(41)'の根として求めうる」わけである。

以下においては、始めに $K>0$ 、 $-b<\chi_0<(g-b)/2$ 従つて $0<X_0<1$ 、 $-1<Y_0<0$ 、 λ が正の有限値の場合、のみについて、まず $\text{hst}(\chi)$ の吟味から進めてみよう。

b) $\text{hst}(\chi)$: 一般に式(41)'の根は圖-2 の如く横軸に Y_h 、縦軸に $Z=\text{Fund}(Y_h)$ をとつて示した場合、曲線 $\tanh^{-1} Y_h=z$ と z 軸上 $\tanh^{-1} Y_0$ の点を通る直線 $K^2/4 Y_h + \tanh^{-1} Y_0 = z$ との交点の数だけ存在する。しかるに $-1<Y_0<0$ 、 $\tanh^{-1} Y_0 < 0$ であるから、この直線は原点より下方で z -軸を切るべく、この点 ($\tanh^{-1} Y_0 = z$) から曲線へ引いた接線が Y_h -軸となす傾斜 $\tan \theta$ とこの直線の傾斜 $K^2/4$ とを比べて、次の事實を知ることが出来る。すなわち $\tan \theta > K^2/4$ ならば $-1<Y_h<0$ の区間で 1 交点のみを生じ、 $\tan \theta = K^2/4$ ならば $-1<Y_h<0$ 及 $0<Y_h<1$ で夫々 1 つ、合計 2 交点を生じ、 $\tan \theta < K^2/4$ ならば $-1<Y_h<0$ で 1 つと $0<Y_h<1$ で 2 つ合計 3 交点を生ずることになる。従つて $\text{hst}(\chi)$ を算算するときは、圖-2 を書いて見て大體の見當をつけうるわけである。

圖-2



他方圖-2 にて z -軸上の点 ($\tanh^{-1} Y_0 = z$) を通る接線を逆に曲線から引いたとき、その接線の方程式は、

$$\tanh^{-1} Y_0 - \tanh^{-1} Y_h = - \frac{d(\tanh^{-1} Y_h)}{dY_h} Y_h = -Y_h/(1-Y_h^2)$$

であるから、曲線上の接点の Y_h -座標を Y_t とすれば、これは必ず正の値であつて、

$$\tanh^{-1} Y_t = Y_t/(1-Y_t^2) + 1.15129 \log X_0, \quad (0 < Y_t < 1) \quad (52)^\circ$$

より求められ、従つて又 $\tan \theta$ を次式から見出すことが出来るのである。

$$\tan \theta = 1/(1-Y_t^2) > 1 \dots\dots\dots (53)^\circ$$

式(52)°を満足する Y_t は曲線 $\tanh^{-1} Y_t = z$ と ($\tanh^{-1} Y_0 = z$) 点を通る高次曲線 $Y_t/(1-Y_t^2) + \tanh^{-1} Y_0 = z$ との $0 < Y_t < 1$ の範囲内における交点として求められ、これは $z \rightarrow +\infty$ を含めて必ず 1 つ存在するから、双曲函數表を用いると容易に求められる。

次に $\text{hst}(\chi)$ 点における V_s -曲線の凹凸を吟味しよう。一般に式(43)°に式(41)'、従つて式(41)°をみたす様な $\xi_h = Y'_h$ を入れると、

$$V_s^{-2}(\chi) = \varphi_0(\xi) \left(\frac{d\xi}{d\chi} \right)^2 \left[\{K(g+b)\} - \frac{d\xi}{d\chi} \right]$$

となり、他方式(42)°から

$$\frac{d\xi}{d\chi} = 4 \cdot \{K(g+b)(1-Y^2)\}$$

となるから、 $K^2/4 \leq 1/(1-Y^2)$ によつて所要の凹凸を判定することが出来る。しかるに上に述べた曲線と直線との交点のうち少くも 1 つは $-1 < Y_h < 0$ の範囲内にあり、そこでは必ず $K^2/4 < 1/(1-Y_h^2)$ を満足するから、この点に應ずる $\text{hst}(\chi)$ 点で V_s -曲線は上方に凸となる。

かくしてすでに述べた「 V_s -曲線の性質」をも参照しながら、 $\tan \theta$ と $K^2/4$ との大小に應じ順次検討を進めると次の様である。

1. $\tan \theta > K^2/4$; 最頻値 $\text{hst}(\chi)$ は當然 1 個のみを生じ、しかも $\text{hst}(\chi) < (g-b)/2$ である。
2. $1 < \tan \theta = K^2/4$; 曲線と直線とは区間 $0 < Y_h < 1$ の内の 1 点で接し、この接点に對する Y_t はもちろん

$V_s^1(\chi)=0$ ならしめるが、同時に式(53)°から

$$\left[\frac{d\xi}{d\chi} \right]_{Y=Y_t} = K_j(g+b), \quad \therefore V_s^2(\chi)=0$$

となつて、 V_s -曲線上にこれに應ずる點は接線が χ -軸に平行となる様な變曲點であることがわかる。残つた區間 $-1 < Y_h < 0$ の内の交點に對しては、當然最頻値 $\text{hst}(\chi) < (g-b)/2$ を生ぜしめる。

3. $1 < \tan \theta < K^2/4$; 曲線と直線との 3 交點に對して、 $-1 < Y_{h1} < 0 < Y_{h2} < Y_{h1} < Y_{h3} < 1$ となる様に記號 Y_{h1} , Y_{h2} , Y_{h3} を用い、それぞれに應ずる最頻値を $\text{hst}_1(\chi)$, $\text{hst}_2(\chi)$, $\text{hst}_3(\chi)$ としよう。しからば $V_s^2(\chi)$ の符號から V_s -曲線は $\text{hst}_1(\chi)$ ではもちろん上方に凹、さらに $\text{hst}_2(\chi)$ にて凹、 $\text{hst}_3(\chi)$ にて凹なることがわかる。又式(4)°及(41)°から一般に、

$$\begin{aligned} V_s(\text{hst}(\chi)) &= \frac{1}{2} \varphi_0(Y_h/2) [4\{K(g+b)(1-Y_h^2)\}] \\ &= [2\{K(g+b)\}] \{\varphi_0(Y_h/2)/(1-Y_h^2)\}, \quad \text{ただし } Y_h = KY_h \end{aligned}$$

であつて、

$$d\{\varphi_0(Y_h/2)/(1-Y_h^2)\}/d(Y_h^2) = \{1 - (1-Y_h^2)K^2/4\} \varphi_0(Y_h/2)(1-Y_h^2)^{-2}$$

となる。所が Y_{h1} , Y_{h3} ともに $K^2/4 < 1 - (1-Y_h^2)$ を満足するから、 $dV_s(\text{hst}(\chi))/d(Y_h^2) > 0$, すなわち Y_h の符號にかかわらず Y_h^2 が大きくなるに従つて $V_s(\text{hst}(\chi))$ も大きくなる。一方當然 $|Y_{h1}| > |Y_{h3}|$ であるから、 $V_s(\text{hst}_1(\chi)) > V_s(\text{hst}_3(\chi))$, 従つて眞の最頻値は $\text{hst}_1(\chi) < (g-b)/2$ となる。

c) $\text{wnd}(\chi)$; 嚴密には $\text{hst}(\chi)$ の場合と同様に、式(43)°で左邊の表す曲線と右邊の表す 2 次曲線との交點の數だけ存在し、それぞれの位置を確めうるが、今までに究明した所により各々 Y_h 及 Y_t をすべて順に並べたとき、各々の中間に $\text{wnd}(\chi)$ が 1 つずつ存在することは明かである。又變曲線における V_s -曲線の曲り具合を判定するために、式(43)°及(40)より $V_s^3(\chi)$ を導くと、

$$V_s^3(\text{wnd}(\chi)) = \varphi_0(\xi) \left\{ \frac{d\xi}{d\chi} \right\}^3 \left\{ 4 \frac{d\xi}{d\chi} \left(\xi - \frac{3}{4} Y' \right) - \left(\xi - \frac{Y'}{2} \right) 6K/(g+b) \right\}$$

所が常に $\frac{d\xi}{d\chi} > 0$ であるから、

$$V_s^3(\text{wnd}(\chi)) > 0, \quad \text{すなわち } \frac{d\xi}{d\chi} 2(g+b) \left(\xi - \frac{3}{4} Y' \right) / (3K) > \left(\xi - \frac{Y'}{2} \right)$$

ならば、 V_s -曲線は變曲點より左で凹、右で凹となる。この様な變曲點は V_s -曲線の下降する部分に生ずるから、式(41)°の $V_s^1(\chi) < 0$ より $\xi > Y'/2$ となり、常に $\xi > \frac{3}{4} Y'$ とならねばならない。同様にもし $V_s^3(\text{wnd}(\chi)) < 0$, すなわち V_s が變曲點の左で凹、右で凹であつて、しかも上昇部分であると、逆に $\xi < \frac{3}{4} Y'$ となる。ところが式(43)を導いた原式は、

$$\xi - \frac{3}{4} Y' = \mp \frac{K}{4} \{3Y^2 + 2(4-K^2)K^2\}^{1/2}$$

であつて、 $\xi \geq \frac{3}{4} Y'$ に應じて右邊は \mp の符號をとり、これは式(43)の Y_1 又は Y_2 (複號同順) に對應することを知る。

d) $\text{wnd}(\chi)$, $\text{hst}(\chi)$, χ^0 ; 以上 a)~c) で述べたところを綜合すると次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta > K^2/4; \quad \text{wnd}_1(\chi) < \text{hst}(\chi) < \chi_0 < (g-b)/2, \quad \text{hst}(\chi) < \text{wnd}_2(\chi) \\ 1 < \tan \theta = K^2/4; \quad \text{wnd}_1(\chi) < \text{hst}(\chi) < \chi_0 < (g-b)/2 < \text{hst}_t(\chi) = \text{wnd}_t(\chi) < \text{wnd}'_2(\chi), \\ &\quad \text{hst}(\chi) < \text{wnd}_2(\chi) < \text{hst}(\chi) \\ 1 < \tan \theta < K^2/4; \quad \text{wnd}_1(\chi) < \text{hst}(\chi) < \chi_0 < (g-b)/2 < \text{hst}_t(\chi) < \text{wnd}'_1(\chi) < \text{hst}_t(\chi) < \text{wnd}'_2(\chi), \\ &\quad \text{hst}(\chi) < \text{wnd}_2(\chi) < \text{hst}_t(\chi) \end{aligned} \right\} (54)^\circ$$

ここに、 $\text{hst}(\chi)$ は眞の最頻値、 $\text{hst}_t(\chi) = \text{wnd}_t(\chi)$ にその點における接線が χ -軸に平行となる様な變曲點、 $\text{hst}_2(\chi)$ 及 $\text{hst}_3(\chi)$ はそれぞれ上方に凹及凹となる様な極値で、これらはすべて式(41)°から求めることが出来る。又 $\text{wnd}_1(\chi)$, $\text{wnd}'_1(\chi)$; $\text{wnd}_2(\chi)$, $\text{wnd}'_2(\chi)$ は各々式(43)の Y_1 又は Y_2 の解として求められる様な上昇又は

下降曲線中に含まれる變曲點である。さらに式(14)の如く變曲點の詳しい位置を吟味することも必要であるが、ここでは略しておく。

點 $\tanh^{-1} Y_0 = z$ から曲線へ引いた接線の傾斜 $\tan \theta$ は、常に原點における曲線の接線傾斜 1 より大きく、 $\tan \theta > 1$ となるから、式(54)'の如く $K \leq 2$ ならば必ず $K^2/4 < \tan \theta < 1$ となつて、式(54)°の最上式の關係を生ずる。他方 $K > 2$ ならばこの區間を $4 < K^2 < 4 \tan \theta$ と $K^2 > 4 \tan \theta$ とに分けて考えねばならないことがわかる。もちろん $4 < K^2 = 4 \tan \theta$ の場合は、 $\text{hst}_2(\chi)$ 、 $\text{wnd}'_1(\chi)$ 及 $\text{hst}_3(\chi)$ が $\text{hst}_1(\chi) = \text{wnd}_1(\chi)$ に收斂した特別のときである。

e) χ_0 及 $m(\chi)$; 中央値と平均値を Y_0 と Y_m を以て比べて見よう。今 $K > 0$ 、 $-b < \chi_0 < (g-b)/2$ の場合のみを考えているから、もちろん λ は正の有限値をとらねばならない。この場合式(50)の Y_m は當然一般式(42)°の關係をみたすものであつて、これから次の諸式を導くことが出来る。

$$\frac{dY_m}{d\lambda} = \varphi_0(\lambda) \left[2 \sum_{\gamma=1}^{+\infty} \{(-1)^{\gamma-1} [1 - \frac{\gamma K}{2} (A_\gamma + B_\gamma)]\} \right]$$

さて K が正の有限値である限り、 $[Y_m]_{\lambda=0} = 0$ 、 $[Y_m]_{\lambda \rightarrow \pm\infty} = \mp 1$ (複號同順) であつて、又 $\lambda \neq 0$ とすれば式(47)より $X_0 \neq 1$ 従つて式(42)°より $\tanh^{-1} Y_0 \neq 0$ となるから、圖-2 の關係より原分布は必ず非對稱となり、 $\mu_1 = m(\chi) \neq (g-b)/2$ 、 $Y_m \neq 0$ とならねばならない。それでこの様に $\lambda > 0$ の場合には

$$Y_m < 0, \quad \therefore m(\chi) < (g-b)/2$$

となる。さらに

$$\frac{d^2 Y_m}{d\lambda^2} = \varphi_0(\lambda) \left[\sum_{\gamma=1}^{+\infty} \{(-1)^{\gamma-1} (\gamma K)^2 (A_\gamma - B_\gamma)\} \right] = \sum_{\gamma=1}^{+\infty} (-1)^{\gamma-1} (\gamma K)^2 R_\gamma, \quad \text{ただし } R_\gamma = \varphi_0(\lambda) (A_\gamma - B_\gamma)$$

となり、他方 $0 < X_0 < 1$ であるから、式(42)°より

$$Y_0 = 1 - 2 \sum_{\gamma=0}^{+\infty} (-X)^\gamma = -1 + 2 \sum_{\gamma=1}^{+\infty} (-1)^{\gamma-1} e^{-\gamma \lambda K}$$

$$\therefore \frac{dY_0}{d\lambda} = 2 \sum_{\gamma=1}^{+\infty} (-1)^{\gamma-1} (-\gamma K) e^{-\gamma \lambda K} < 0$$

$$\frac{d^2 Y_0}{d\lambda^2} = 2 \sum_{\gamma=1}^{+\infty} (-1)^{\gamma-1} (\gamma K)^2 e^{-\gamma \lambda K} = \sum_{\gamma=1}^{+\infty} (-1)^{\gamma-1} (\gamma K)^2 R'_\gamma > 0, \quad \text{ただし } R'_\gamma = 2e^{-\gamma \lambda K},$$

次に Y_m と Y_0 との差を λ の函数 $F(\lambda) = Y_m - Y_0$ で表すと、

$$[F(\lambda)]_{\lambda=0} = 0; \quad Y_m = Y_0 = 0, \quad m(\chi) = \chi_0 = (g-b)/2$$

$$\text{及 } [F(\lambda)]_{\lambda \rightarrow +\infty} = 0; \quad Y_m = Y_0 = -1, \quad m(\chi) = \chi_0 = -b$$

である。又

$$\frac{d^2 F(\lambda)}{d\lambda^2} = \frac{d^2 Y_m}{d\lambda^2} - \frac{d^2 Y_0}{d\lambda^2}$$

であるから、 $\frac{d^2 Y_m}{d\lambda^2} < 0$ ならば當然 $\frac{d^2 F(\lambda)}{d\lambda^2} < 0$ となるが、 $\frac{d^2 Y_m}{d\lambda^2} > 0$ ならば總和が正值をとる交項級數

$\frac{d^2 Y_m}{d\lambda^2}$ 、 $\frac{d^2 Y_0}{d\lambda^2}$ を比べねばならない。この場合もし $\frac{d^2 Y_m}{d\lambda^2} \geq \frac{d^2 Y_0}{d\lambda^2} > 0$ 、すなわち $\frac{d^2 F(\lambda)}{d\lambda^2} \geq 0$ ならば、2つの交項級數の第 γ 項の比は $(\gamma K)^2 R_\gamma / (\gamma K)^2 R'_\gamma \geq 1$ 、従つて $R_\gamma \geq R'_\gamma$ でなければならぬ。所が逆に R'_γ を第 γ 項とする2つの交項級數を考えるともちろん、 $\sum_{\gamma=1}^{+\infty} (-1)^{\gamma-1} R_\gamma \geq \sum_{\gamma=1}^{+\infty} (-1)^{\gamma-1} R'_\gamma$ となる。しかるに

$$\sum_{\gamma=1}^{+\infty} (-1)^{\gamma-1} R_\gamma = Y_m + \Phi_0(\lambda), \quad \sum_{\gamma=1}^{+\infty} (-1)^{\gamma-1} R'_\gamma = Y_0 + 1$$

であるから、次の如くなることを要する。

$$F(\lambda) = Y_m - Y_0 \geq 1 - \Phi_0(\lambda) > 0$$

以上の結果より少くも $F(\lambda)$ -曲線の内で、 $\frac{d^2 F(\lambda)}{d\lambda^2} > 0$ すなわち上方に凸なる部分はすべて $F(\lambda) > 0$ 、従つて λ 軸より上方になければならない。他方上方に凸なる部分には $F(\lambda)$ の符號の制限はないのであるが、もし

$F(\lambda) < 0$ となる部分があるとすれば、上の条件よりこれは必ず上方に凸となつて、 $\lambda=0$ 及 $\lambda \rightarrow +\infty$ の間で曲線を閉じることが出来ない。従つて常に $F(\lambda) > 0$, $\therefore Y_m > Y_0$, $m(\chi) \geq \chi_0$ となり、結局次式が成立する。

$$\chi_0 < m(\chi) < (g-b)/2 \dots \dots \dots (55)^\circ$$

f) 總括; 式(42)^o又は(47)より $-b, g, \chi_0$ 又は λ 及 K から X_0 が定まると、式(52)^o及(53)^oから $\tan \theta$ を求めることが出来、これと $K^2/4$ とを比べて式(54)^oの 3つの場合を生ずるが、更に $m(\chi)$ をも考慮し、 $g < \chi_0 > (g-b)/2$ の場合をも吟味すると次の様になる。ここで特に断らない限り一般に K 従つて式(10)''より c_0 は有限な正値とするが、 X_0 の値が不定とならない範囲で、 $K \rightarrow 0$ 又は $K \rightarrow +\infty$ となる場合 (下記の * 印の場合) をも考慮することにする。

1. $-b < \chi_0 < (g-b)/2, 0 < X_0 = e^{-\lambda K} < 1$, すなわち λ が有限正値の場合。

$$\left. \begin{aligned} c_0 &> 1.15129(\tan \theta)^{-1/2}, \quad \tan \theta > K^2/4; \\ \left\{ \begin{aligned} \text{wnd}_1(\chi) &< \text{hst}(\chi) < \chi_0 < m(\chi) < (g-b)/2, \\ \text{hst}_1(\chi) &< \text{wnd}_2(\chi) \end{aligned} \right. \\ c_0 &= 1.15129(\tan \theta)^{-1/2}, \quad 1 < \tan \theta = K^2/4; \\ \left\{ \begin{aligned} \text{wnd}_1(\chi) &< \text{hst}(\chi) < \chi_0 < m(\chi) < (g-b)/2 < \text{hst}_2(\chi) = \text{wnd}_2(\chi) < \text{wnd}'_2(\chi), \\ \text{hst}(\chi) &< \text{wnd}_2(\chi) < \text{hst}_2(\chi) \end{aligned} \right. \\ c_0 &< 1.15129(\tan \theta)^{-1/2}, \quad 1 < \tan \theta < K^2/4; \\ \left\{ \begin{aligned} \text{wnd}_1(\chi) &< \text{hst}(\chi) < \chi_0 < m(\chi) < (g-b)/2 < \text{hst}_2(\chi) < \text{wnd}'_1(\chi) < \text{hst}_2(\chi) < \text{wnd}'_2(\chi), \\ \text{hst}(\chi) &= \text{hst}_1(\chi) < \text{wnd}_2(\chi) < \text{hst}_2(\chi) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} (56)^\circ$$

特に $\lambda \rightarrow +\infty, X_0 \rightarrow 0$ となるときは、 K 従つて c_0 の値如何にかかわらず、式(41)', (43), (50)よりすべての最頻値、變曲點、平均値は皆中央値たる下限 $-b$ に收斂する。又 $\lambda > 0$ で $K \rightarrow +\infty$, 従つて $c_0 \rightarrow 0$ ときは * χ_0 以下は $-b$ に收斂し、さらに $\lambda \rightarrow +\infty$ とすればすべて $-b$ に集まる。

2. $\chi_0 = (g-b)/2, X_0 = e^{-\lambda K} = 1, \lambda = 0$ の場合。

式(41)'の $\text{hst}(\chi)$ は曲線 $z = \tan^{-1} Y_h$ とこの原點を通る直線 $z = K^2 Y_h/4$ との交點より求められ、もちろん $\tan \theta = 1$ であるから 式(41)', (50), (42)^o, (40), (4)' からも、式(56)₁^oに相當して次の對稱關係を生ずることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} c_0 &\geq 1.15129, \quad 2 \geq K; \text{ (又は } \lambda \text{ が } 0 \text{ を含めた正負の有限値で } c_0 \rightarrow +\infty, \text{ 従つて } K \rightarrow 0 \text{ のとき*)}; \\ \left\{ \begin{aligned} \text{wnd}_1(\chi) &< \text{hst}(\chi) = \chi_0 = m(\chi) = (g-b)/2 < \text{wnd}_2(\chi), \\ \text{wnd}_2(x + \text{wnd}_1(x)) &= (g-b), \quad V_x(\text{wnd}_1(x)) = V_x(\text{wnd}_2(x)) \end{aligned} \right. \\ c_0 &< 1.15129, \quad 2 < K; \\ \left\{ \begin{aligned} \text{wnd}_1(x) &< \text{hst}_1(x) < \text{wnd}_2(x) < \chi_0 = m(x) = (g-b)/2 = \text{hst}'_2(x) < \text{wnd}'_1(x) < \text{hst}_2(x) < \text{wnd}'_2(x), \\ \text{wnd}'_2(x) + \text{wnd}_1(x) &= \text{hst}_2(x) + \text{hst}_1(x) = \text{wnd}'_1(x) + \text{wnd}_2(x) = (g-b), \\ V_x(\text{wnd}'_2(x)) &= V_x(\text{wnd}_1(x)), \quad V_x(\text{hst}_2(x)) = V_x(\text{hst}_1(x)), \quad V_x(\text{wnd}'_1(x)) = V_x(\text{wnd}_2(x)) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} (57)^\circ$$

すなわち $2 \geq K$ の場合は中央に山が一つある對稱分布で、特に $b \rightarrow g \rightarrow +\infty$ となれば Gauss の正規分布に似た形を呈し、 $2 < K$ の場合は中央に谷、その兩側に山が一つづつある對稱分布で、 K が 2 より大きくなるほど中央の山は左右の 2つの山に分れて段々遠ざかり、中間の谷が大きくなつて遂に U 型分布となる。

3. $g > \chi_0 > (g-b)/2, X_0 = e^{-\lambda K} > 1$, すなわち λ が有限負値の場合。

以上はすべて中央値 χ_0 が x の存在區域の中點たる $(g-b)/2$ 以下下限 $(-b)$ までの間にある場合のみについて述べたが、もし χ_0 が $(g-b)/2$ より上限 g までの間にくる場合は、式(56)₁と全く對稱的な關係を生ずるのであつて、1. の場合と同様に逐次吟味して後述の式(56)₂を導くことが出来るが、今その理由を簡単に説明すると次の様である。

式(4)にて $\varphi_0(\xi) = \varphi_0(-\xi)$ なる關係を用いると、

$$V_s(x) = \frac{1}{2} \varphi_0(-\xi) \frac{d(-\xi)}{d(-x)}$$

すなわち ξ の代りに $-\xi$ とした上で x の符號を逆にしておけば、原分布は不変である。しかるに式(42)°で X の値を一定として x の符號を逆にするれば、同時に b 及 g の符號も反對としておけばよいから、

$$X = (x+b)(g-x) = \{-(x+b)\} \{-(g-x)\}$$

すなわち x -軸の方向如何にかかわらず X の値そのものは不変であり、 X_0 の値についても同様である。従つてまず ξ の符號を變えて式(4)'の $\xi = c_0 \log(X/X_0)$ より $-\xi = c_0 \log\{(1/X)/(1/X_0)\}$ として X 及 X_0 の値をそのまま用いると、

$$-\xi = c_0 [\log\{(-x+g)/(b+x)\} - \log\{(-x_0+g)/(b+x_0)\}]$$

となる。この式の形は、一般に原分布は“(− x)-軸について上限、中央値及下限が夫々 $+b, -x_0, -g$ となる様な分布である”とも解し得ることを示している。もちろんこの場合は x -軸で考えた X, Y, X_0, λ に相當して當然それぞれ $(X)^{-1}, (-Y), (X_0)^{-1}, -\lambda$ を用いなければならないから、式(41)'₁, (43), (50) より最頻値、變曲點、平均値は各々 $-hst(x), -wnd(x), -m(x)$ で表されることがわかる。しかるにこの場合は $(X_0)^{-1} < 1$ であるから、(− x)-軸において 1 の場合と同様の順序を生じ、これを再びもとの x -軸に戻して考えると、式(56)₁°の不等號を逆にした上で、 $hst(x)$ の添字の 1 と 3並に $wnd(x)$ の添字の 1 と 2', 2 と 1' につき、夫々の位置を互に交換しさえすればよいことになり、次の式(56)₂°が得られる。このことは式(57)°より考えても當然成立せねばならない。

$$\left. \begin{aligned} c_0 &> 1.15129(\tan \theta)^{-1/2}, \quad \tan \theta > K^2/4; \\ &\left\{ \begin{aligned} wnd'_2(x) &> hst(x) > x_0 > m(x) > (g-b)/2, \\ hst(x) &> wnd'_1(x) \end{aligned} \right. \\ c_0 &= 1.15129(\tan \theta)^{-1/2}, \quad 1 < \tan \theta = K^2/4; \\ &\left\{ \begin{aligned} wnd'_2(x) &> hst(x) > x_0 > m(x) > (g-b)/2 > hst_1(x) = wnd_1(x) > w.d_1(x), \\ hst(x) &> wnd'_1(x) > hst_1(x) \end{aligned} \right. \\ c_0 &< 1.15129(\tan \theta)^{-1/2}, \quad 1 < \tan \theta < K^2/4; \\ &\left\{ \begin{aligned} wnd'_2(x) &> hst(x) > x_0 > m(x) > (g-b)/2 > hst_2(x) > wnd_2(x) > hst_1(x) > wnd_1(x), \\ hst(x) &= hst_2(x) > wnd'_1(x) > hst_2(x) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} (56)_2^\circ$$

特に $\lambda \rightarrow -\infty, X_0 \rightarrow +\infty$ となるときは、 K 従つて c_0 の値にかかわらず、1. の場合と同様に最頻値、變曲點、平均値のすべては中央値たる上限 g に收斂する。又 $\lambda < 0$ で $K \rightarrow +\infty$ 、従つて $c_0 \rightarrow 0$ のときは* x_0 以上は g に收斂し、さらに $\lambda \rightarrow -\infty$ とすればすべて g に集まる。

以上で K 従つて c_0 が $0 \sim +\infty$ の場合を述べた。しかも一般に統計學では $c_0 > 0$ とするから、 $K < 0$ の場合は考えなくてもよいが、もし $K < 0$ とすれば 1. と 3. で λ の符號の規定のみを交換すればよいわけである。

特性係數：まず式(49)の μ_t を用い、基本式(18)°に基いて式(50)で表された平均値 $m(x) = \mu_1$ のまはりの t 次積率 $m\mu_t$ を 4 次まで順次求めてみよう。このために式(50)中の $Y_{m,1}$ を擴張して、

$$Y_{m,s} = \varphi_0(\lambda) \sum_{\gamma=1}^{+\infty} (-1)^{\gamma-1} (\gamma)^{s-1} \{A_\gamma + (-1)^s B_\gamma\}, \quad (s=1, 2, 3, \dots) \dots \dots (58)$$

と規約すれば、次の結果がえられる。

$$\begin{aligned} t=2; \quad \mu_2 &= (g-b)\mu_1 + gb + \frac{(g+b)^2}{2} \varphi_0(\lambda) \sum_{\gamma=1}^{+\infty} (-1)^\gamma (A_\gamma + B_\gamma) \\ &= \{(g^2 + b^2) + (g^2 - b^2)Y_m - (g+b)^2 Y_{m,2}\} / 2 \\ m\mu_2 &= \sigma^2 - \mu_2 - \mu_1^2 = (g+b)^2 (1 - Y_m^2 - 2Y_{m,2}) / 4 \dots \dots \dots (59) \\ t=3; \quad \mu_3 &= \{2(g^3 - b^3) + 2(g^3 + b^3)Y_m - 3(g-b)(g+b)^2 Y_{m,2} + (g+b)^3 Y_{m,3}\} / 4 \\ &= -(g-b)^2 \mu_1 / 2 + 3(g-b)gb\mu_2 / 2 + (g+b)gb Y_{m,2} + (g+b)^3 Y_{m,3} / 4 \\ m\mu_3 &= \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 - \mu_1^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -(g+b)^3\{-Y_m+Y_m^3+3Y_mY_{m,2}+Y_{m,3}\}/4 \dots\dots\dots(60) \\
 t=4; \mu_1 & =\{6(g^4+b^4)+6(g^4-b^4)Y_m-(11g^2-14gb+11b^2)(g+b)^2Y_{m,2} \\
 & +6(g-b)(g+b)^3Y_{m,3}-(g+b)^4Y_{m,4}\}/12 \\
 & =gb\{(g-b)^2-2gb\}/6+\{(g-b)^3-8gb(g-b)\}\mu_1/6 \\
 & -\{7(g-b)^2-8gb\}\mu_2/6+2(g-b)\mu_3-(g+b)^4Y_{m,4}/12 \\
 m\mu_1 & =\mu_1-4\mu_3/\mu_1+6\mu_2\mu_1^2-3\mu_1^3=\mu_1-4\mu_1m/\mu_3-6\mu_1m/\mu_2-\mu_1^4 \\
 & =(g+b)^4\{3+6Y_m^2-9Y_m^4-8Y_{m,2}-36Y_m^2Y_{m,2}-24Y_mY_{m,3}-4Y_{m,4}\}/48 \quad (61)
 \end{aligned}$$

式(21)'及(22)におけると同様に、式(16)°及(17)°を用いて、式(50)と上で求めた $m\mu(t=2\sim 4)$ から、この型の分布の非対称性を示す特性係数を導くと次の様になる。

$$\begin{aligned}
 \mu_1 & =\{(g-b)+(g+b)Y_m\}/2, \quad \sigma=(g+b)(1-Y_m^2-2Y_{m,2})^{1/2}/2 \dots\dots\dots(62) \\
 \alpha_1 & =0, \quad \alpha_2=1 \\
 \alpha_3 & =2(-Y_m+Y_m^3+3Y_mY_{m,2}+Y_{m,3})(1-Y_m^2-2Y_{m,2})^{3/2} \\
 \alpha_4 & =\{3+6Y_m^2-9Y_m^4-8Y_{m,2}-36Y_m^2Y_{m,2}-24Y_mY_{m,3}-4Y_{m,4}\} \\
 & \quad \div\{3(1-Y_m^2-2Y_{m,2})^2\} \quad \left. \vphantom{\alpha_4} \right\} \dots\dots\dots(63)
 \end{aligned}$$

一般に Bienaymé-Tschebycheff の定理から $\sigma^2=m\mu_2\geq 0$, $m\mu_1\geq 0$ が當然成立するから、これらを用いて更に吟味をしてみる。まず始めの假定より $(g+b>0)$ であつて、今一般に K 従つて c_0 有限正值, σ , α_3 , α_4 は λ のみの函數であるとするれば, $\lambda\rightarrow\pm\infty$ のとき, $\lim_{\lambda\rightarrow\pm\infty} Y_m=\mp 1$ (複號同順), $\lim_{\lambda\rightarrow\pm\infty} Y_{m,s}=0$ ($s=1,2,3,\dots$) であるから, $\sigma=0$ 又 α_3 及 α_4 は分母子共に 0 となつて不定となる。この場合はさらに $K\rightarrow\pm\infty$ であつても同様である。次に $\lambda\rightarrow 0$ のとき, $\lim_{\lambda\rightarrow 0} Y_m=0$, $\lim_{\lambda\rightarrow 0} Y_{m(2t-1)}=0$ 及 $\lim_{\lambda\rightarrow 0} Y_{m,2t}>0$, ($t=1,2,3,\dots$) となり, $\sigma>0$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4>0$ となるから、この型は對稱分布であることがわかる。このことは λ が 0 を含めた正負の有限値であつて $K\rightarrow 0$ となるときにも成立する。又 $\lambda\geq 0$, 即ち $Y_m\geq 0$ に應じて, $\sigma>0$, $\alpha_3\geq 0$ となることは前節 f) で述べたことから想像され、又數學的にも證明出来ると思う。又この分布は山が 2 つある場合も含んでいるから、 $(\alpha_1-3)\leq 0$ の何れの結果をとるかは一概には云えない様である。

Peson の Criterion, κ ; 式(63)の結果を式(24)°に入れると、容易に κ を計算することが出来る。しかしこの型の分布は必ず兩限があるから、非對稱の場合は Pearson の I 型となるはずである。従つて $\kappa<0$ となり、式(24)°の分母は當然常に負となることが豫想されるのである。又對稱の場合は $\alpha_3=0$ であるから、 $\alpha_1\neq 3$ である限り $\kappa\neq 0$ となつて Pearson の II 型となり、ここで特に $K\geq 2$ と選び、 $b\rightarrow g\rightarrow +\infty$, $\alpha_1\rightarrow 3$ とすれば、Gauss の正規分布 (Pearson の VII 型) に近付くこととなる。

(2) V_s と W_t との比較

今 $x_0=0.5$, $\sqrt{2}c_0=3.0$, $b_0'=1.0$, として式(3)及(3)'から式(8)~(12)'を利用して V_1 及 W_1 曲線を書くと、圖-3 の鎖線の様になる。これは圖-1 の X 座標の原點を下限値 -1.0 にずらしたものに過ぎず、容易に書きうるものである。従つて V_t の曲線形そのものは V_n と同じであるから、 σ 及 α_3 , α_4 も圖-1 におけると同じ値をとり、このことは式(21)'~(23)'からも明かである。

次にこれと比べるために、 $x_0=0.5$, $\sqrt{2}c_0=3.0$, $b=1.0$ 及 $g=5.0$ として式(4)'及(4)''の V_s -及 W_s -曲線を式(41)', (43)'及(50)を用いて書いてみると、圖-3 中の破線の様になる。ここで $g\rightarrow +\infty$ とすれば、これらの曲線は當然 V_1 -及 W_1 -曲線に段々と近づくわけである。この V_s -曲線に對し式(52)°より Y_t を求めると、 $X_0=1/3$ であるから $Y_t=0.71139$, 従つて式(53)°より $\tan\theta=2.0426$, 他方式(10)''より $K=1.08545$ であるから、 $\tan\theta>K^2/4=0.29455$, すなわちこれは山が 1 つとなる式(56)°の第 1 の場合で、各特性値の順序にも誤りがなかつたことがわかる。

なお V_s が 2 つの山を有する分布をも表し得ることはすでに述べた通りであるが、その例として x_0 , b , g 従つて X_0 , Y_t , $\tan\theta$ は上と同じ値とし、 c_0 のみを變えて $\sqrt{2}c_0=1$, 従つて $K=3.25635$ とすれば、 $\tan\theta<K^2/4=2.65096$, 即ち式(56)°の第 3 の場合となることがわかる。圖-3 の實線はこの場合の V_s -及 W_s -曲線であつ

て、式(4)及(4)''の關係を式(41)', (43)'及(50)を用いて書いたものである。

後の 2 つの場合、式(43)から $m(x) = \mu_1(x)$ を求めるのに、次の方法を用いた。すなわち式(50)を書き改めて

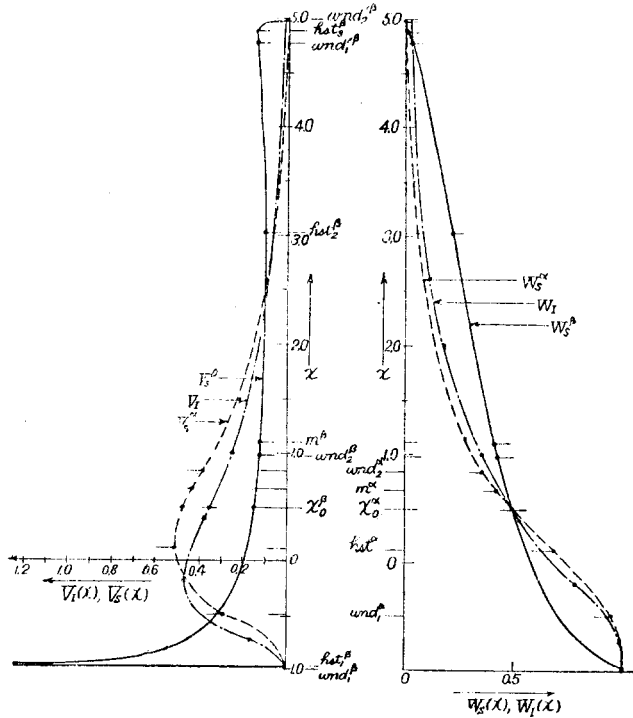
$$m(x) = g\{1 - \Phi_0(\lambda)\} + 2 - b\{1 + \Phi_0(\lambda)\} + (g + b)Y_{m,1}/2$$

とし、 $Y_{m,1}$ 中の A_Y 及 B_Y についての変項級数は別々に計算を進めることとして、この際に統計數値表、I (河出書房、昭18) の第 14, 12, 15 及 10 數表を用いた。さらに完全な數表があれば、式(58), (63)より σ , α_0 , α_1 を、又式(24)より x を容易に求め得るはずであるが、ここでは省略することにした。

(3) Slade 法の検討及新方法

Slade は式(31)の解を擴張し、 V_I に對し類推によつて次の結果を導いている*。すなわち(4)'式に含まれた 4 常數 c_0 , g , b , $m(x)$, 及 X_0 (x_0 の代りに用いる) と σ との間に式(64)が成立するとし、ここで $m(x)$ 及 σ は前と同様に標本から豫め求めておくことが出来るから、後は g 及 b の値を試算で色々變えてみて、最も當てはまりのよいものを採るのである**。

圖-3. $V_I(x)$, $W_I(x)$ —曲線及 $V_S(x)$ —及 $W_S(x)$ —曲線



$$\left. \begin{aligned} b' &= m(x) + b, & g' &= g - m(x) \\ C &= \{g'^2(\sigma^2 + b'^2) - 4\sigma^2 g' s'\} / \{b'^2 \sigma^2 + g'^2\} - 4\sigma^2 g' b' \\ X_0 &= (x_0 + b) / (g - x_0) = (b' / g') C^{-1/2} \\ p &= \{(g' - b') / (g' + b')\}^{1/2}, & c &= (2 \ln C)^{-1/2} \\ c_0 &= p c \cdot \ln 10 = 1.07293 \{ (g' - b') / (g' + b') \} \cdot (\log C)^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (64)$$

この方法は 3 次以上の標本積率を使わずにすむのであるが、この基本式(64)そのものを一應検討してみる必要があると思う。今この第 2 式から σ を g' , b' 及 C で表すと、

$$\sigma^2 = m'^2 = \{g'^2 b'^2 (1 - C)\} / \{4g' b' (1 - C) - (g' - b')(g' + b')\}$$

この C は g' , b' 以外に最下式から c_0 (或は式(10)''より K) で表され、又第 3 式から X_0 (従つて式(47)より λ 及 K) で表される。しかしこのいづれにしても嚴密解(59)とは甚だしく異なつてゐるから、式(64)によれば見掛けの適合性がよくても理論上不合理な結果を生ずることがわかる。

又 Kimball は式(64)を用いずに、基本式(4)'の變量の對數項につき、その繼續曲線兩端部約 10% の範囲内での標本及推定 2 次積率が等しくなる様にして試算を行い、 g' 及 b' を推定する方針をとつたが、これもやはり種々の難點がある。

* 前掲 1) p.102, 6) p.92.

** 實算には豫め x 軸の原點を $m(x)$ に移しておい方がよく、さらにこれを $1/m(x)$ の縮尺で行えば非常に簡單となる。前掲 5) 参照。

図-(2.3)附表

V_1 及 W_1 (鎖線): $\chi_0 = 0.5, \sqrt{2}c_0 = 3.0, b_0 = 1.0$

	χ	$\log\left(\frac{\chi+b_0}{\chi_0+b_0}\right)$	$\frac{\sqrt{2}c_0}{\sqrt{2}c_0} \log\left(\frac{\chi+b_0}{\chi_0+b_0}\right)$	$\sqrt{2} \log(\chi+b_0)$	$V_1(\chi) = \sqrt{\log\left(\frac{\chi+b_0}{\chi_0+b_0}\right) \times \frac{c_0}{\chi+b_0}}$	$W_1(\chi) = W_0\left\{\log\left(\frac{\chi+b_0}{\chi_0+b_0}\right)\right\}$
$m(\chi)$	1.01	0.13	0.38	1.11	0.24	0.35
χ	0.50	0.00	0.00	1.20	0.35	0.50
$wnd_2(\chi)$	0.41	-0.03	-0.08	1.19	0.37	0.53
$hst(\chi)$	-0.17	-0.26	-0.77	0.90	0.47	0.78
$wnd_1(\chi)$	-0.73	-0.74	-2.22	0.10	0.16	0.99

V_3^x 及 W_3^x [$\tan\theta > \frac{K}{g}$] (破線): $\chi_0 = 0.5, \sqrt{2}c_0 = 3.0, b_0 = 1.0, g = 5.0, \sqrt{2}\lambda = 1.43136$

	χ	$\log\left\{\frac{(\chi+b_0)/\chi_0}{(g-\chi)/g}\right\}$	$\frac{\sqrt{2}c_0}{\sqrt{2}c_0} \log\left\{\frac{(\chi+b_0)/\chi_0}{(g-\chi)/g}\right\}$	$\sqrt{2} \log\left\{\frac{(\chi+b_0)}{(g-\chi)}\right\}$	$V_3^x(\chi) = \sqrt{\log\left\{\frac{(\chi+b_0)/\chi_0}{(g-\chi)/g}\right\} \times \frac{(g-\chi)/g}{(\chi+b_0)/\chi_0}}$	$W_3^x(\chi) = W_0\left\{\log\left\{\frac{(\chi+b_0)}{(g-\chi)}\right\}\right\}$
$wnd_2(\chi)$	0.84	0.12	0.37	1.12	0.38	0.36
$m(\chi)$	0.63	0.05	0.15	1.18	0.44	0.44
χ_0	0.50	0.00	0.00	1.20	0.46	0.50
$hst(\chi)$	0.12	-0.16	-0.48	1.07	0.51	0.68
$wnd_1(\chi)$	-0.49	-0.55	-1.66	0.30	0.28	0.95

V_3^b 及 W_3^b [$\tan\theta < \frac{K}{g}$] (実線): $\chi_0 = 0.5, \sqrt{2}c_0 = 1.0, b_0 = 1.0, g = 5.0, \sqrt{2}\lambda = 0.47712$

	χ	$\log\left\{\frac{(\chi+b_0)/\chi_0}{(g-\chi)/g}\right\}$	$\frac{\sqrt{2}c_0}{\sqrt{2}c_0} \log\left\{\frac{(\chi+b_0)/\chi_0}{(g-\chi)/g}\right\}$	$\sqrt{2} \log\left\{\frac{(\chi+b_0)}{(g-\chi)}\right\}$	$V_3^b(\chi) = \sqrt{\log\left\{\frac{(\chi+b_0)/\chi_0}{(g-\chi)/g}\right\} \times \frac{(g-\chi)/g}{(\chi+b_0)/\chi_0}}$	$W_3^b(\chi) = W_0\left\{\log\left\{\frac{(\chi+b_0)}{(g-\chi)}\right\}\right\}$
$wnd_2(\chi)$	$5-2 \times 10^{-4}$	5.00	5.00	15×10^{-7}	36×10^{-4}	29×10^{-8}
$hst_2(\chi)$	4.89	2.21	2.21	34×10^{-3}	0.14	0.01
$wnd_1(\chi)$	4.77	1.87	1.87	69×10^{-3}	0.13	0.03
$hst_1(\chi)$	3.03	0.79	0.79	29×10^{-2}	0.10	0.22
$m(\chi)$	1.11	0.21	0.21	39×10^{-2}	0.12	0.42
$wnd_2(\chi)$	0.98	0.16	0.16	39×10^{-2}	0.13	0.43
χ_0	0.50	0.00	0.00	40×10^{-2}	0.15	0.50
$hst(\chi) = hst_1(\chi)$	-0.99	-2.30	-2.30	29×10^{-3}	1.23	0.99
$wnd_1(\chi)$	$-1+3 \times 10^{-5}$	-4.82	-4.82	35×10^{-7}	51×10^{-3}	$1-1 \times 10^{-6}$

新しい解としては V_1 で考えたと同様に、色々の組合せが考えられる。すなわち式(4)'の中には g, b 及 c_0 (又は式(10)'より K), χ_0 (又は式(4)'の X_0 或は式(47)の λ) の 4 常数が含まれているから、これらを標本値から何等かの方法で推定しなければならない。これをあくまで理論的に処理しようとするれば、1~4 次の標本積率より式(50)及(59)~(61)の左邊を求め、この 4 元の連立方程式を g, b, K, λ について解くことにより、式(31)と同様の積率法による解が出るはずであるが、実際上は非常に計算困難である。次に特性値のうち、 χ_0 は標本順位で中央のものを選び、 $hst(\chi)$ として標本上の最頻値をとつて式(41)'の左邊とすれば、さらに 2 つの式を生ずるから、これらと式(50)及(59)~(61)の合計 6 式から 4 個を連立方程式として選べば、完全に g, b, K, λ が求まるわけであるが、どの組合せをとつて見てもこれを解くことはむづかしい。そこでやはり試算によることとし、しかも 3 次に上の標本積率は一般に信頼がおけず計算も面倒であるから、式(60)及(61)は考慮しないこととする。こうした方針の下に先ず理論式に基づく計算法を考えて見よう。なおここでは x で表すものは、すべて標本から豫め求めておいた値とする。

a) $\chi_0, hst(\chi)$: 標本順位での中央の値 χ_0 を χ_0 とし、式(41)'でまず g, b を假定すれば K が定まり、同時に式(47)より λ が求まる。

- i. $m(x)$; この g, b, K, λ が式(50)のみたすまで始めから試算を繰返す。
 - ii. $\{\sigma(x)\}^2$; 同様に式(59)について試算を行う。
 - iii. $m(x)$ 及 $\{\sigma(x)\}^2$; 式(50)及(59)を同時にある程度まで満足せしめる様に g, b, K, λ を定める。
- この様態に χ_0 を最初に用いる場合、その他の 3 つの組合せによつて、さらに次の様な方法を生ずる。

- b) $\chi_0, m(x)$: i. $\{\sigma(x)\}^2$, [ii. $hst(x)$], iii. $\{\sigma(x)\}^2$ 及 $hst(x)$
- c) $\chi_0, \{\sigma(x)\}^2$: [i. $hst(x)$], [ii. $m(x)$], iii. $hst(x)$ 及 $m(x)$

この各方法の内 b) ii = a)i, c) i = a)ii となつて計算順序から云えばともに a) に従う方が簡単であり、又 b) i = c)ii であるからこのときは b) による方が便利である。

以上の外に最初 x_0 以外のものを持つて来る場合も考えられ、順列上 36 組の方法を生ずるが、上の如く同じ結果となるものは、計算上なるべく便利な方法に従うべきであるから、結局 a) i, ii, iii; b) i, iii; c) iii の 6 つ以外に次の 4 つ、合計 10 通りの方法がある。

- d) $hst(x), m(x)$: i. $\{\sigma(x)\}^2$, iii. $\{\sigma(x)\}^2$ 及 x_0
- e) $hst(x), \{\sigma(x)\}^2$: iii. x_0 及 $m(x)$
- f) $m(x), \{\sigma(x)\}^2$: iii. x_0 及 $hst(x)$

なるべく x_0 , 又これに次いで $hst(x)$ を利用すれば計算が容易であるから、この点からは以上の諸方法のうちで a) の如くこれらを利用する方法がよいが、特に標本が少い場合は x_0 及 $hst(x)$ の値は甚だ曖昧となるから、この意味からは f) の方法に最も健全である。しかし a) の方法でもあくまで標本から求めた値に拘泥すると云うことなく、iii を更に擴げて、3 つ又は 4 つの關係がそれぞれ同時に或程度充分満足されるまで試算を繰返せば、よい結果がえられると思う。なおこの場合、さらに一般標本値との適合性の吟味を加味しながら試算を行うことも考えられ、その極端な場合は、 $hst(x), m(x), \{\sigma(x)\}^2$ のうち何れか 1 つを利用するのみで、 g, b 及 x, c_0 (或は X_0, K, λ) を色々變えて見た上、一般標本値と最もよく當てはまつた時の 4 常數を採用する方法もある。その 1 例として先ず $\{\sigma(x)\}^2$ を標本から求め (たゞし、この時は式(38)と同様に計算の途中で標本平均値 $m(x)$ を用いる)、これを式(59)の左邊として 4 常數 g, b, K, λ を適合性のみから計算で定めると、Slade 法、式(64)の嚴密解となるわけである。

しかしこの様に $\{\sigma(x)\}^2$ を試算する場合には、嚴密式(59)の級數の收斂が一般に遅く計算が甚だ厄介であるから、これによるよりも岩井法²⁾の基本原理に基く次の關係を利用する方が便利と考えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 1/(\sqrt{2} \cdot c_0), & c_0 &= 2\xi_s \log \left\{ \frac{x+s \cdot b}{g-x_s} \right\} / \left(\frac{x_t+b}{g-x_t} \right) \\ \text{たゞし、} s, t &\text{は } n \text{ 個の標本値 } x \text{ を大きさの順序に並べた時、} t=n-(s-1) \text{ となる様な順序、} \xi_s \text{ は } x_s \text{ に相當する標本上の超過確率から遂に求めた媒介變量。} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(65)$$

5. 結 論

Slade 型非對稱分布の基本式 V_E 、下限 $(-b'_0)$ のみで限られた分布 V_I 及下限 $(-b)$ と上限 g とで限られた分布 V_S の 3 つについて、最頻値、變曲點及平均値を中央値と諸常數とで表すと同時に、これらの特性値の大きさの順序や曲線そのものの形狀を明かにした。又各種の積率を求めるとともに、Pearson 流の特性係數 $(\alpha_3, -\alpha_1)$ 及 Criterion (K) を吟味した。かくして V_E 及 V_I は常に Pearson VI 型曲線に属していることを知り、 V_S については與えられた諸常數の値如何では特に 2 つの山がある分布となることもあるが、最頻値、平均値、中央値の順序は V_E 及 V_I と同様に不變であつて、しかもこの 3 特性値はすべて兩限間の中點 $(g-b)/2$ の左右何れかの例に存在することを證明し、さらにこれが Pearson I 型又は II 型に属することを認めただのである。

又 V_I については、Slade の解を簡明に檢證するとともに、著者が導いた各種特性値及積率の埋論式を巧みに組合せて 4 つの新しい解を見出し、 V_S については Slade 法を吟味してその理論的缺點を指摘し、より健全な著者の理論に基く種々の試算法を新たに提唱したのである。

本研究は水文統計學の主目的の 1 つである繼續曲線の推定に關する基礎的事項を明かにし得たものであつて、實際問題への應用に關しては、特に重要な適合度檢定法とともに、近く詳細な研究成果を發表するつもりである。

附記 本論文は京大教授石原博士の特別の御指導の下に學術振興會及文部省科學研究費の援助を受けて行つてゐる研究“河水統制の理論”及“水文統計”の基礎的研究成果の 1 部であり、ここに石原博士及關係方面に深謝の意を表したいと思う。
(昭 23. 9. 10 受付)