返應力による構造物の時間強度を，素材の時間強度と繰返應力集中係數 β_k(圖—2) とを用いて求める。(ii) 變動繰返應力を分析して，繰返強度に出來るだけ影響を與えないように一定の σ_m と σ_a とを有する繰返應力の重複したものに變換する (圖—3)。この整理法によつて，變動應力の有限個の測定結果を統計的に整理して相對頻度 h_i の分析即ち相對頻度曲線及加算頻度曲線を求める ((1)～(5)式)(iii)構造物の時間強度 (i)と相對頻度曲線 (ii)とより，構造物が變動繰返應力を受けた場合の疲勞強度を(11)式により求める。

又 ν を用いると(12)式より壽命を推算することが出來る。なお(11)式による計算値は表—1 に示す如く，6 節で求めた實驗値の (0.85～0.4) 倍となつた。本實驗では圖—7 に示す如く負荷の途中で正負繰返應力の作用する部分があり，ボルトとボルト孔との間隙の存在のため衝擊的繰返應力が 500 回/分 の速度で負荷されているが，これらの衝擊作用は(11)式には考慮されていない。一般に衝擊作用が多い程計算値と實驗値の差違は著しくなる筈であるが，このことは表—1 に示された 2 種の試驗中衝擊作用の多い負荷頻度 B による實驗値がこれよりも衝擊作用の少い負荷頻度 A によるものよりも計算値との差違の大きいことによつても明である。從つて衝擊作用を伴わない變動應力に對しては (11) 式による計算値は概ね實驗値と一致するものと認めても差支えはないものと思う。なお本文で荷重頻度の取扱方について述べたものは變動應力中の最も一般的な場合を對象としているから，繰返應力の波形が單純な場合は，上述したものゝ特別な場合として取扱い得ることは言を俟たない。又本文では 3 節構造結合部の時間強度の實驗的研究は極めて簡單に説明したがその詳細は土木研究に發表の豫定である。〔以上〕

引 用 文 獻

(1) T. Nishihara and M. Kawamoto: Memoirs of College of Eng., Kyoto Imp. Univ., Vol. XI, NO. 4, 1944 and No. 5, 1945.

(2) O. Graf: V. D. I. Bd. 80, 1936, s. 920.

(3) F. Bollenrath und H. Cornelius: Stahl und Eisen, 58 Jahrg., Nr. 9, 1938, s. 241.

(4) B. P. Haigh and T. S. Robertson: Engineering, Vol. CXLVII, 1939, p. 451, 513.

(5) E. Hottenrott: Luftfahrtforschung. Bd. 17, 1940, s. 247.

(6) H. Bürnheim: Luftfahrtforsahung. Bd. 18, 1941, s. 192.

(7) W. Kloth: V. D. I. Bd. 78, Nr. 21, 1934, s. 629.

(8) W. Kloth und Th. Stroppel: V. D. I. Bd. 80, Nr. 4, 1936, s. 85.

(9) W. Kaul: Jahrbuch d. Deutschen Luftfahrtforschung, Teil I, 1938 s. 274.

(10) H. Krumbholz: Luftfahrtforschung, Bd. 18, 1941, s., 82.

(11) 西原利夫：日本學術振興會編金屬材料 I，應力論 p. 68 及機械學會論文集 Vol. 6, No. 24, I, 1940, p. 36.

(12) 佐藤忠雄：日本金屬學會誌 Vol. 6, No. 12, 1942, p. 617.
小西一郎：日本航空學會誌 Vol. 10, No. 94, 1943, p. 126.
西原利夫外：日本機械學會誌 Vol. 47, No. 323, 1944, p. 73.

(昭 23. 6. 1 受付)

拱及拱重力堰堤の理論的解法 (I)

正員　村　幸雄*

Theoretical Solutions of Arch and Arch Gravity Dam (I)

By Yukio Mura, C. E. Member

1. 緒　論

我國に於ける堰堤工學の現狀を見るに重力堰堤に於ては，諸先輩の研究特に物部博士の基本三角形の理論に於て

* 建設省河川局勤務

其の設計基準は略確立を見内部應力の算定法も略満足すべき程度に達して居り,又實施面に於ても堰堤技術者の努力と經驗とに因り小牧,三浦,水豊等の高堰堤の築造の經驗を有し我が國の地勢上米國の規模には及ばざるも,高堰堤の築造も充分自信を持ち得る段階に迄達してゐる如く思はれる。然し乍ら,現下の國情に依る堰堤築造の急務は國民衆知の問題であり乍ら,資材特に石炭の不足によるセメントの窮乏は其の實施を阻み,僅かのセメントの節約をも要求してゐる。是に於て我々技術者の採るべき途は,土堰堤,石塊堰堤の方向,即ち堰堤發達の歴史を逆行するか,或は拱堰堤の方向に向ふかと云ふ事になると考へられる。一方我國の土木技術の出發が歐米に比し,遅れたる爲土堰堤,石塊堰堤特に後者に對する經驗を殆ど有しない怨がある,從つてこの方面の研究を歐米先進國に學ぶと共に世界的に拱堰堤の缺潰の例の少き事より見てもこの方面の研究を怠る事は出來ない。この意味に於て,最近日本發送電に於て柿谷正道君の R. S. Lieurance の試し荷重法を改良した朝日堰堤の設計を拜見した事は誠に喜ばしい事である。

私の知る限りに於て拱堰堤の設計理論は佛人ドウロクル氏が最初に發表した堰堤を圓弧をなす多くの水平拱より成立つものと假定した所謂 cylinder 公式を最も初歩的な理論とし其後の發達方向は大別して二定流に分けられる様に思はれる。其の一つは H. Ritter が 1931 年 "Dio—Berechnüng ron bogenförnugen Starmaücrn" に發表した堰堤を水平拱梁及鉛直片持梁に分解して考へる試し荷重法にして米國の Bveean of Reclamation でこの方拱堰堤及び拱型重力堰堤の設計に應用して現場並に研究室での實驗を行法を實用化し多數のひ非常に精度の高い事が立證されて居り, Boulder, Roosevelt, Arrowrock, Ouyhee, Deadwood, Seminoe, Gilson, Parher, Cotgreek 等の完成を見てゐる。但しこの方法は R. S. Lieur nce に依つて數表化され手數が省けるようになつたとは雖も試算法である爲に,應力調整を反復行はねばならぬ,計算の煩雑さと全ての堰堤に適用される一般式の誘導出來ない事は矢張り缺點であると云へる。且應力狀態を變ずる度に計算をやり直す必要がある。

其の二つは殼の理論を應用するものであり,殼の基礎微分方程式を立て各應力を彎曲應力度,捻りモーメントにて表はし,この應力度の條件式を Hookの法則によつて結局彎曲面に垂直な方向の歪度の四次偏微分方程式に變形し此の偏微分方程式を微分子 (Differeuzen) の方法によつて解く方法にして Tölhe の Talsperrenに詳細說明されて居る。但しこの方法に於ては堰堤が薄肉にして,殼と見做され得る場合に限られ自重及垂直外力による影響を無視してゐるから拱重力式の如き場合には適用され得ない様に思ふ。

2. 概 説

次に述べんとする方法は緒論で述べた,在來の方法とは考へ方を變へ拱堰堤全體を一體の彈性體と見做し,拱堰堤及拱重力式の場合共に適用出來る彈性理論に立脚した三次元的の解を求めんとした試みであり,最後に最小自乘法的の考察を織込まねばならなくなつた點は遺憾であるが,非對象の場合にも彈性學的にも數學的にも或程度納得の出來るのでは無いかと考へる試案である。

其の方針の概略を述べると,彈性基本方程式に於て用ひられる平衡方程式と Hook の法則より導いた變位によつて表はした平衡方程式と,三函數定理とに因つて三次元の應力函數による基礎微分方程式を作り,是れに H. Neuber の發表せる方法を利用して應力函數を調和函數に變換して,是れを積分する事なく境界條件によつて決定しようとしたものであり,拱堰堤の形狀から圓塲座標を作用し Lapl ce の方程式の一般解の內,次の順定により係數を順次求めたのである。

(1) 上流面にて堤體に垂直な應力を水壓及土壓に一致せしめる如く Bessel 函數の係數を定めると共に第一の調和函數の係數を決定する。

(2) 外力の何等作用しない下流面の應力の間の關係式を求める。

(3) (2)の下流面の條件と下流面の形狀を適當に定める事により三調和函數の內の殘りの二調和函數の係數間の關係をつける。

(4) 岩盤との接觸部に於ける固定條件により殘つた調和函數の係數を最小自乘法によつて決定する。

(5) Laplace 變換を應用する事により動水壓は容易に應力函數に折込む事が出來る。

以上によつて考慮しなければならない條件としては,重力,地震力,水壓,土壓,動水壓及び固定條件の全てが

應力函數の內に織込まれるが，揚壓力及溫度應力については目下研究中であるので後日に讓る事にして本文に於ては省略してある。

Summary.

Considering the whole arch dam as an elastic body, the fundamental differential equ tions of 3-dimensional stress functions are set up from the equilibrium equations used in the elastic fundamental equations, the equilibrium equations in terms of displacements led by the Hooke's Law and the three function theorem. Hence the solutions are determined by the boundary conditions without integration, after transforming these stress functions into harmonic functions applying the method which was proposed by H. Neuber.

目　次

1. 彈性力學基礎式

彈性體の微小部分に作用する垂直應力度 σ, 剪斷應力度 τ, とし Potential p を有する力のみが作用する時の釣合條件式は

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(\sigma_x-P)}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=9\\ \frac{\partial(a_y-p)}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}=0\\ \frac{\partial(\sigma_z-p)}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

となり，外力の作用しない場合の結果に於て垂直應力 σ_x, σ_y, σ_z を (σ_x-P), (σ_y-P), (σ_z-P) に置き換へればよい故以下外力作用せざる場合につき記述する事とする。

次に彈性體表面上の任意の點に於ける單位面積に就て表面力の成分を X, Y, Z とすると

$$\left.\begin{aligned}X&=\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n\\ Y&=\sigma_y m+\tau_{yz}n+\tau_{xy}l\\ Z&=\sigma_z n+\tau_{xz}l+\tau_{yz}m\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

茲に l, m, n は此點に於て物體表面に外方に立てた法線の方向餘弦である。

與へられた外力の作用を受ける物體の應力狀態を決定する事は(1)を解かねばならぬが，しかも其の解は(2)の境界條件を滿足すべきものでなければならぬ。是等の方程式は 1 個の應力成分を含んで居り，又應力と歪との關係を利用すれば歪の 6 成分に關する式である。然し何れにしても未知重 6 個に對し方程式は 3 個しか決定されない。其處で解を得る爲には更に物體の彈性變形を考慮しなければならない。

次に物體內各點に於ける歪の 6 成分は變位を表はす 3 つの函數 ξ, η, ζ で完全に決定する事が出來る。其の歪の成分は x, y, z の函數として任意に採る事を得ないのであつて

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x=\frac{\partial\xi}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial\zeta}{\partial z}\\ &\gamma_{xy}=\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x},\quad \gamma_{xz}=\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial x},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3)$$

を滿足するものでなければない。(3)式より ξ, η, ζ を消去する事により適合條件の式として

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y};\quad \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z};\quad \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xz}}{\partial x\partial z}$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

を得る。但し是等6個の式も獨立ではなく3個のみが獨立である。

2. 彈性基本方程式

Hook の法則を用ひて應力度の成分を歪度の成分にて表はすと，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=2G\left(\varepsilon_x+\frac{e}{m-2}\right) & \tau_{yz}&=G\gamma_{yz}\\ \sigma_y&=2G\left(\varepsilon_y+\frac{e}{m-2}\right) & \tau_{zx}&=G\gamma_{zx}\\ \sigma_z&=2G\left(\varepsilon_z+\frac{e}{m-2}\right) & \tau_{xy}&=G\gamma_{xy}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

(4)に(3)の適合條件に入れて平衡方程式に代入すると歪で平衡方程式を表はす事が出來る。

即ち

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\xi+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x}+\frac{X}{G}&=0\\ \nabla^2\eta+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y}+\frac{Y}{G}&=0\\ \nabla^2\zeta+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z}+\frac{Z}{G}&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

但し $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

3. 應 力 函 數

前述の如く彈性體の問題は平衡方程式(1)を解いて境界條件(2)及び適合條件(3)式を滿足する應力成分を求めるにあるが外力が無いか Potential を有する外力の場合には6個の應力成分を求める代りにもつと數の少い適當な函數を求めれば應力成分を表はし得る。斯る函數を應力函數と云ひ，二次元問題に對しては有名な Airy Function によつて任意の同時多項式によつて解決することが出來，其の性質も充分研究し盡されて實際の應用例も各方面に見られ其の偉力を發揮してゐるが三次元に於ける應力函數としては Maxwell 及び Morera の函數があるが(最上武雄博士，三次元彈性理論參照）未だ充分實用せらるゝ迄に發達して居らず，其の範圍も變調和函數の範疇に屬すると考へられるを以つて，題意の境界條件に適する應力函數を選擇する事は極めて困難である。從つて本論文に於て拱堰堤の實際面の應用法として三函數定理 (Drei-Funktion-Ansatze) を用ひ是れによつて應力函數の選擇範圍を調和函數に迄擴張し是れによつて問題を解決する途を探つた。

4. 三函數定理 (Drei-Funktion-Ansatze)

(4)の彈性基本方程式を一般形に解く爲に旣に M xwel 及 Morera は應力と歪とを三函數に關係づけて其等を彈性基本於程式に挿入する事によつて，各函數の間に生ずる微分方程式を作つては居るが然も是れを一つの法則によつて一般の形に解くことはしてゐない。然るに最近に至り，是の微分方程式を積分の形式で與へ其れに依つて解決出來る方法に成巧したのである。其れは Cartesian 座標の形で入つて居る。故に問題は Potenti l 論の境界値問題に還元される事になつた。この法則は一つ，一つ數字的には異論のない解決を表はしては居るが，然も其の應用となると非常に計算が煩雜となるので，三次元の應力分布の問題に對して何等の應用も見出せなかつた。是れに反して H. Neuber が "Kesbspanungslelhre" に於て述べて居る法則は歪と應力の誘導に何等積分する事なしに解決出來るといふ利點を有つてゐる。

三函數定理と云ふのは次の形である。

$$\left.\begin{aligned}2G\xi&=-\frac{\partial F}{\partial x}+2\alpha\phi_1\\2G\eta&=-\frac{\partial F}{\partial y}+2\alpha\phi_2\\2G\zeta&=-\frac{\partial F}{\partial z}+2\alpha\phi_3\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

玆に　F=尚不明な三次元的應力函數であり其自身の形を見出す必要は無い。

α=常數

ϕ_1; ϕ_2; ϕ_3=調和函數，從つて $\Delta\phi_1=\Delta\phi_2=\Delta\phi_3=0$

(5)を(4)に代入し(6)を應用すれば

$$\left.\begin{aligned}-\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)+2G\frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial x}=0\\-\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)+2G\frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial y}=0\\-\Delta\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)+2G\frac{m}{m-2}\cdot\frac{\partial e}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}$$

$i, e,$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(2G\frac{m}{m-2}e-\Delta F\right)=0\\\frac{\partial}{\partial y}\left(2G\frac{m}{m-2}e-\Delta F\right)=0\\\frac{\partial}{\partial z}\left(2G\frac{m}{m-2}e-\Delta F\right)=0\end{aligned}\right\}$$

依つて　$2G\dfrac{m}{m-2}e-\Delta F=\mathrm{const}=0$ とする $\cdots\cdots(7)$

(7)式は平衡方程式，Hook の法則及び三函數の法則より誘導せるものである。一方 $e=\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}$ に(5)式を代入する事により

$$2Ge=-\Delta F+2\alpha\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2}{\partial y}+\frac{\partial\phi_3}{\partial z}\right)\cdots\cdots(8)$$

(7), (8)より　$2\left(1-\dfrac{1}{m}\right)\Delta F=2\alpha\left(\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}+\dfrac{\partial\phi}{\partial y}+\dfrac{\partial\phi_3}{\partial z}\right)\cdots\cdots(9)$

是れによつて應力函數 F と三つの調和函數との間の關係式を見出せた事になる。

玆で H. Neuber は $F=\phi_0+x\phi_1+y\phi_2+z\phi_3$ F=應力函數，ϕ_1=調和函數，從つて $\Delta\phi_0=0$ と置いて(5)式の α を求めて

$$\alpha=2\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\cdots(10)$$

斯くて F は三函數の方程式，平衡方程式及 Hook の法則の全てを滿足する事となる。(3), (4), (5), 及び(7)より應力の算式を求めれば，

$$\sigma_x=\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}+\alpha\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}-\frac{\partial\phi_1}{\partial y}-\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)$$

同様に

$$\sigma_y=\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\alpha\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\phi_2}{\partial z}-\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_z=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+\alpha\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z}-\frac{\partial\phi_1}{\partial x}-\frac{\partial\phi_0}{\partial y}\right)$$

剪斷力に對しては(4)と(5)より

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}+\alpha\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}+\frac{\partial\phi^2}{\partial x}\right)$$

$\cdots\cdots(11)$

$$\tau_{yz}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}+\alpha\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial z}+\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)$$
$$\tau_{zx}=-\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}+\alpha\left(\frac{\partial\phi_3}{\partial x}+\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)$$

更に注意すべき事は三函數定理の四つの調和函數の内,一つは應力函數の完全性を何等損ふ事無しに一般の應力狀態に對して零とする事が出來る。依つて單に三つの調和函數が必要であり,其れ故一般の彈性狀態の多樣性は調和函數の多樣性の三倍の多樣性を有するものであると云ふ事である。

5. 曲線座標に於ける計算式

直交座標に於て求めた以上の結果を曲線座標 $f_1(x,y,z)=u$ $f_2(x,y,z)=v$ $f_3(x,y,z)=w$ に變換し其の必要な結果のみを記せば次の如し,

$$\left.\begin{aligned}
2GU&=\frac{1}{h_u}\left[-\frac{\partial F}{\partial u}+2\alpha\left(\phi_1\frac{\partial x}{\partial u}+\phi_2\frac{\partial y}{\partial u}+\phi_3\frac{\partial z}{\partial u}\right)\right]\\
2GV&=\frac{1}{h_v}\left[-\frac{\partial F}{\partial v}+2\alpha\left(\phi_1\frac{\partial x}{\partial v}+\phi_2\frac{\partial y}{\partial v}+\phi_3\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right]\\
2GW&=\frac{1}{h_w}\left[-\frac{\partial F}{\partial w}+2\partial\left(\phi_1\frac{\partial x}{\partial w}+\phi_2\frac{\partial y}{\partial w}+\phi_3\frac{\partial z}{\partial w}\right)\right]
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(12)$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_u&=-\frac{\partial^2 F}{\partial n_u^2}+\frac{2\alpha}{h_u^2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\phi^2}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial\phi_3}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Delta F\\
\sigma_v&=-\frac{\partial^2 F}{\partial n_v^2}+\frac{2\alpha}{h_v^2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial\phi_2}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial\phi_3}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Delta F\\
\sigma_w&=-\frac{\partial^2 F}{\partial n_w^2}+\frac{2\alpha}{h_w^2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial w}+\frac{\partial\phi_2}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial\phi_3}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial w}\right)+\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Delta F\\
\tau_{uv}&=-\frac{\partial^2 F}{\partial n_u\partial n_v}+\frac{\alpha}{h_uh_v}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial\phi_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\phi_2}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{\partial\phi_3}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\\
\tau_{vw}&==\frac{\partial^2 F}{\partial n_v\partial n_w}+\frac{\alpha}{h_vh_w}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial\phi_2}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial\phi_2}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial\phi_2}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial\phi_3}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}+\frac{\partial\phi_3}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v}\right.\\
\tau_{wu}&=-\frac{\partial^2 F}{\partial n_w\partial n_u}+\frac{n}{h_wh_u}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial\phi_2}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial\phi_2}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial\phi_3}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\phi_3}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}\right.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(13)$$

茲に
$$\Delta F=\frac{2}{h_u^2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial\phi_2}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial\phi_3}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{2}{h_u^2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial\phi_2}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial\phi_3}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$
$$+\frac{2}{h_w^2}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial\phi_2}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial\phi_3}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial w}\right)$$

6. 圓壔座標に於ける應力度及歪度計算式

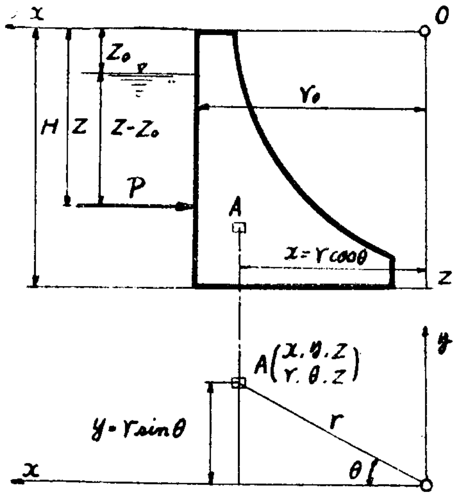
拱堰堤の上流面を圓壔面に採り,回轉軸を z 軸として鉛直下方を正の方向,原線としては堤堆面を x, y 面河身の上流方向を x の正の方向として原線に採用すれば,

$$\left.\begin{aligned}
&u=\gamma,\quad v=\theta,\quad w=Z\\
&x=\gamma\cos\theta,\quad y=\gamma\sin\theta,\quad Z=Z\\
\therefore\ &\gamma=\sqrt{x^2+y^2},\quad \tan^{-1}\frac{y}{x}=6
\end{aligned}\right\}$$
$$h_u=1,\qquad hv=\gamma,\qquad h_w=1$$

圓壔座標の座標變更による歪度の計算式は

$$2GU=-\frac{\partial\phi_0}{\partial\gamma}-\gamma\cos\theta\frac{\partial\phi_1}{\partial\gamma}-\gamma\sin\theta\frac{\partial\phi^2}{\partial\gamma}-Z\frac{\partial\phi_3}{\partial\gamma}+(2\alpha-1)(\phi_1\cos\theta+\phi_2\sin\theta)$$

$$
\left.\begin{aligned}
2GV &= \frac{1}{\gamma}\left[-\frac{\partial\phi_0}{\partial\theta}-\gamma\cos\theta\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}-\gamma\sin\theta\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}-Z\frac{\partial\phi_3}{\partial\theta}\right]+(2\alpha-1)(\phi_2\cos\theta-\phi_1\sin\theta)\\
2GW &= -\frac{\partial\phi_0}{\partial z}-\gamma\cos\theta\frac{\partial\phi_1}{\partial z}-\gamma\sin\theta\frac{\partial\phi_2}{\partial z}+(2\alpha-1)\phi_3-Z\frac{\partial\phi_3}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(14)
$$



次に應力度の計算式は(13)式より

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_u=\sigma_\gamma &= -\frac{\partial^2\phi_0}{\partial\gamma^2}+\left\{\alpha\frac{\partial\phi_1}{\partial\gamma}-\gamma\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\gamma^2}+\frac{2-\alpha}{\gamma}\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}\right\}\cos\theta\\
&\quad+\left\{\alpha\frac{\partial\phi_2}{\partial\gamma}-\gamma\frac{\partial^2\phi_2}{\partial\gamma^2}-\frac{2-\alpha}{\gamma}\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\right\}\sin\theta+(2-\alpha)\frac{\partial\phi_3}{\partial z}-z\frac{\partial^2\phi_3}{\partial\gamma^2}\\
\sigma_v=\sigma_\theta &= -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial\theta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial\phi_0}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi_0}{\partial\gamma}\right)-\frac{Z}{\gamma^3}\frac{\partial^2\phi_3}{\partial\theta^2}+\frac{Z}{\gamma^3}\frac{\partial\phi_3}{\partial\theta}\\
&\quad-\frac{Z}{\gamma}\frac{\partial\phi_3}{\partial\gamma}+2\frac{\partial\phi_3}{\partial z}+\left\{\frac{1}{\gamma^2}\phi_2+\frac{1}{\gamma}(\alpha+1)\frac{\partial\phi_3}{\partial\theta}+(1-\alpha)\frac{\partial\phi_1}{\partial\gamma}\right\}\\
&\quad\times\cos\theta+\left\{\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2\phi_2}{\partial\theta^2}-\frac{1}{\gamma^2}\phi_1-(\alpha+1)\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\right.\\
&\quad\left.+(1-\alpha)\frac{\partial\phi_2}{\partial\gamma}\right\}\sin\theta\\
\sigma_w=\sigma_z &= -\frac{\partial^2\phi_0}{\partial Z^2}+\left\{(2-\alpha)\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\gamma}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\phi_0}{\partial\theta}\right)-\gamma\frac{\partial^2\phi_1}{\partial Z^2}\right\}\cos\theta\\
&\quad+\left\{(2-\alpha)\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\gamma}-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\right)-\gamma\frac{\partial^2\phi_2}{\partial z^2}\right\}\sin\theta\\
&\quad-2\alpha\frac{\partial\phi_3}{\partial z}-Z\frac{\partial^2\phi_3}{\partial Z^2}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(15)
$$

7. 圓壔座標に於ける Laplace の方程式

三函數定理に於ける ϕ_0, φ_1, φ_2, ϕ_3, は孰れも調和函數なる故次の一般解に含まれ，且題意に適する特解を採ればよい。

圓壔座標に於ける Laplace の方程式

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2}+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\phi}{\partial\gamma}+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial\phi^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial\phi}{\partial Z^2}=0\\
&\text{一般解}\quad \phi=\sum_{mh=0}^{\infty}c\,{\cos\atop\sin}m\theta e^{\pm k2Jm}-J-m(k\gamma)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(16)
$$

8. ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 及 ϕ_3 の選擇

前節の一般解の中にて本問題の境界條件を滿足する形に調和函數 ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 を選ぶ爲に次の如き方法を探る。記述の順序を計算の便宜上 ϕ_3, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_0 の順序に述べる事にし，本問題の滿足すべき條件を整理すれば次の6つとなる。

（1） 上流面に於ける σ_u は θ に無關係にして水壓に因るものは $(Z-Z_0)$ 土壓に因るものは $(Z-Z_E)$ に比例しなければならない。

（2） 上流に作用する動水壓は $\sum\limits_{i=1}^{n}(m=0)\gamma_0(o,k_i)J_0(k_i\cdot\gamma)e^{-k_iZ}$ にて表はす事。

（3） 兩岸並に底面の岩盤との接觸點に於ける若干の點に於て全ての歪 U, V, W は全く零なる事。

（4） 堰堤下流面には外力は作用せざる事。

（5） 温度應力の考慮。

（6） 重力並に地震力の影響。

9. ϕ_3 の決定法

ϕ_3 に依つて水壓及土壓を表示せしめる方針を探り (15) 式にて表はされたる σ_u の式中最後の θ を含まざる項 $\gamma=\gamma_0$ なる上流面に於ける水壓 $\gamma(Z-Z_0)$，土壓 $\gamma_\varepsilon(Z-Z_\varepsilon)$ に等しくなる如く ϕ_3 の係數を定める爲

$$\phi_3=A_3(0.0)\log\frac{1}{\gamma}+B_3(0.0)+FZ \quad\cdots(17)$$

玆に
$$A_3(0.0)=-(\gamma+\gamma_\varepsilon)\gamma_0^2$$
$$F=-\frac{1}{2-\alpha}(\gamma Z_0+\gamma_\varepsilon Z_\varepsilon)$$

$B_3(0.0)$＝任意の常數

γ_0＝上流面の γ 座標

γ＝水の比重＝$1^t/m^3$

γ_E＝堆積土砂の比重＝t/m^3

Z_0＝滿水面迄の Z 座標

Z_E＝堆砂面迄の Z 座標

10. ϕ_1 及 ϕ_2 の決定法

ϕ_1 及 ϕ_2 は次で判る如く獨立ではないのであり，この事は**第4節**に於ても述べてゐる。ϕ_1, ϕ_2 の決定方針は σ_u の第二，第三項を上流面に於て消失せしめる樣に定めるものとする。

$$\sigma_u\ 第二項の=\left\{\alpha\frac{\partial\phi_1}{\partial\gamma}-\gamma\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\gamma_2}+\frac{2-\alpha}{\gamma}\frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}\right\}\cos\theta$$
$$\sigma_u\ の第一項=\left\{\alpha\frac{\partial\phi_2}{\partial\gamma}-\gamma\frac{\partial^2\phi_2}{\partial\gamma^2}-\frac{2-\alpha}{\gamma}\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\right\}\sin\theta$$

今一般解の中
$$\phi_1=\sum_m\sum_k\{A_1(m.k)\cos m\theta+B_1(m.k)\sin m\theta\}e^{-kZ}Jm(k\gamma)$$
$$\phi_2=\sum_m\sum_k\{A_2(m.k)\cos m\theta+B_2(m.k)\sin m\theta\}e^{-kZ}Jm(k\gamma)$$

を採れば $\gamma-\gamma_0$ に對して $\theta.Z$ に無關係に第二項，第三項を消失せしめる爲には

$$\left.\begin{aligned}
&kA_1(m,k)\{\alpha J'_m(k\gamma_0)-\gamma_0kJ''_m(k\gamma_0)\}+\frac{m(2-\alpha)}{\gamma_0}B_2(m,k)J_m(k\gamma_0)=0\\
&kB_1(m,k)\{\alpha J'_m(k\gamma_0)-\gamma_0kJ''_m(k\gamma_0)\}-\frac{m(2-\alpha)}{\gamma_0}A_2(m,k)J_m(k_0\gamma)=0\\
&kA_2(m,k)\{\alpha J'_m(k\gamma_0)-\gamma_0kJ''_m(k\gamma_0)\}-\frac{m(2-\alpha)}{\gamma_0}B_1(m,k)J_m(k\gamma_0)=0\\
&k_2B_2(m,k)\{\alpha J'_m(k\gamma_0)-\gamma_0kJ''_m(k\gamma_0)\}+\frac{m(2-\alpha)}{\gamma_0}A_1(m,k)J_m(k\gamma_0)=0
\end{aligned}\right\}\quad\cdots(18)$$

を同時に滿足する如くする事が必要且充分條件である。此四元聯立方程式が，平凡解以外の解を有する條件として

$$(1)\quad k\{\alpha J'_m(k\gamma_0)-k\gamma_0 J''_m(k\gamma_0)\}=\frac{m(2-\alpha)}{\gamma_0}J_m(k\gamma_0)\qquad A_1=-B_2,\ A_2=B_1$$

$$(2)\quad k\{\alpha J'_m(k\gamma_0)-k\gamma_0 J''_m(k\gamma_0)\}=-\frac{m(2-\alpha)}{\gamma}J_m(k\gamma_0)\qquad A_1=B_2,\ A_2=-B_1$$

(1), (2)の孰れをとつても ϕ_1 と ϕ_2 の交換に過ぎざる故(1)の場合を採れば

$k\{\alpha J'_m(k\gamma_0)-k\gamma_0 J''_m(k\gamma_0)\}=\dfrac{m(2-\alpha)}{\gamma_0}J_m(k\gamma_0)$ の k を k' として

$$\left.\begin{aligned}\phi_1&=\sum_m\sum_{k'}\{A_1(m,k)\cos m\theta+A_2\sin m\theta\}e^{-k'Z}J_m(k'\gamma)\\ \phi_2&=\sum_m\sum_{k'}\{A_2(m,k)\cos m\theta-A_1\sin m\theta\}e^{-k'Z}J_m(k'\gamma)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(19)$$

11. ϕ_0 の決定法

ϕ_0 の決定方針は先づ $\phi_0=\phi_0'+\phi_0''$ に分ち ϕ_0' の係數を下流面の境界條件により ϕ_1, ϕ_2 の係數 A_1, A_2 にて表はし，是等の係數を境界條件の第三の岩盤面との若干の點に於て全ての歪 U, V, W が全く零なる事より定め，ϕ_0'' の係數は次章に述べる境界條件式の第二の動水壓に依つて定める事とする。

尙ϕ_0' の係數の決定に當つて特に留意せる事はσ_u の第一項即ち $-\dfrac{\partial^2\phi_0}{\partial\gamma^2}$ を $\gamma=\gamma_0$ に對して零ならしめねばならぬ故 k の採用の仕方に特別の考慮を必要とす，即ち一般に

$$\phi_0=\sum_m\sum_k\{c_0(m,k)\cos m\theta+D(m,k)\sin m\theta\}e^{-kZ}J_m(k\gamma)$$

とすれば
$$\frac{\partial^2\phi_0}{\partial\gamma^2}=\sum_m\sum_k\frac{k^2}{Z^2}\{J_{m-2}(k\gamma)-2J_m(k\gamma)+J_{m+2}(k\gamma)\{c(m,k)\cos m\theta+D(m,k)\sin m\theta\}e^{-kZ}$$

$\gamma=\gamma_0$ に對して，$\{J_{m-2}(k\gamma)-2J_m(k\gamma)+J_{m+2}(k\gamma)\}=0$ ならしめる方法として後の計算に便利なる如く上式は，m の一定値に對して無數の正根が存在する。其の正根を順次に $k_{m,1}$, $k_{m,2}$, $k_{m,3}$ として第三番目迄の三つを採用するものとし $m=0,1,2,\cdots\cdots$ と變化させれば

$$\phi_0'=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{3}\{c(m,i)\cos m\theta+D(m,i)\sin m\theta\}e^{-k_{mi}Z}J_m(k_{mi}\gamma)\quad\cdots\cdots(20)$$

を得る。然して此の ϕ_0 を用いれば $\left(\dfrac{\partial^2\phi_0'}{\partial\gamma^2}\right)_{\gamma=\gamma_0}=0$ となり，從つて σ_u の第一項は消失し前節の如く ϕ_1,ϕ_2 の項も消失する故結局 σ_u は上流面の水壓，土壓及び後に述べる動水壓の全力を示す事となるであらう。

12. 下流面の條件より ϕ_0' の係數と ϕ_1 及 ϕ_2 の係數の關係を求める方法

今(19)式の ϕ_1, ϕ_2 の k' の値を $k'\{\alpha J'_m(k'\gamma_0)-k\gamma_0 J''_m(k'\gamma_0)\}=\dfrac{m(2-\alpha)}{\gamma}J_m(k'\gamma_0)$ の正根の第一番目の k' を採用するものとすれば

$$\left.\begin{aligned}\phi_1&=\sum_{m=1}^{m}\{A_1(m)\cos m\theta+A_2(m)\sin m\theta\}e^{-k'_mZ}J_m(k'_m\gamma)\\ \phi_2&=\sum_{m=1}^{m}\{A_2(m)\cos m\theta-A_1(m)\sin m\theta\}e^{-k'_mZ}J_m(k'_m\gamma)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(21)$$

下流面の方程式を誘導す。下圖の體積素片について力の平衡を考へ

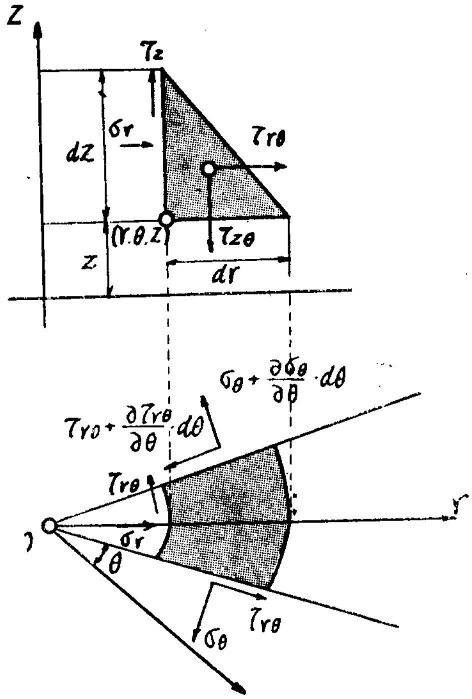
(1) γ 方向の平衡より $\quad \sigma_\gamma\gamma d\theta\cdot dZ-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\tau_{\gamma\theta}}{\partial\theta}d\theta d\gamma dZ+\tau_{\gamma Z}\gamma\cdot d\gamma d\theta=0$

(2) θ 方向の平衡より $\quad \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\sigma_\theta}{d\theta}d\theta\cdot d\gamma dZ+\tau_{\theta\gamma}\gamma d\gamma dZ+\tau_{\gamma Z}\gamma d\gamma\cdot d\theta=0$

(3) Z 方向の平衡より $\quad \sigma_Z\gamma d\gamma d\theta+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\tau_{Z\theta}}{\partial\theta}\cdot d\theta d\gamma dZ+\tau_{\gamma Z}\gamma d\theta\cdot dZ=0$

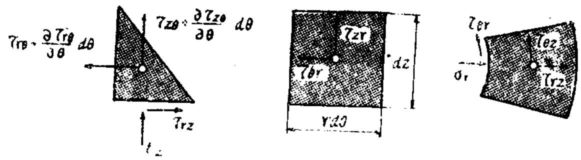
以上の三式に於て高次の微分小を無視して下流面の式として座標 γ, θ, z の間に次の關係を必要且充分なる條件として求める事が出來る

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\gamma dz+\tau_{\gamma Z}d\gamma&=0\\ \tau_{\theta\gamma}dz+\tau_{\theta Z}d\gamma&=0\\ \tau_{Z\gamma}dz+\sigma_Z d\gamma&=0\end{aligned}\right\}$$



故に $-\dfrac{\partial\gamma}{\partial Z}=\dfrac{\partial\gamma}{\tau_{\gamma Z}}=\dfrac{\tau_{\theta\gamma}}{\tau_{\theta Z}}=\dfrac{\tau_{Z\gamma}}{\sigma_Z}$ ……………(22)′

注意 $\tau_{\alpha\beta}=\alpha$ 方向（α の増す方向を正とす）に向ひ $\beta=\text{const}$ の面に作用する剪断力を意味す。



面積素片 $\dfrac{1}{2}d\gamma dz$　面積素片 $\gamma d\theta dz$　面積素片 $=\gamma d\gamma d\theta$

13. 應力計算式

第5節の(13)式第6節の(15)式より

$$\sigma_\gamma=\sum_{m=0}^{m+1}[\{\sum_{j=1}^{3j}p_\gamma(m,i)+S_\gamma(m-1)\}\cos m\theta$$
$$+\{(\sum_{j=1}^{3j}Q_\gamma(m,i)+J_\gamma(m-1)\}\sin m\theta]$$
$$+\gamma(z-z_0)+\gamma_E(z-z_E)$$

但し

$$p_\gamma(m,i)\equiv-\frac{k_{mi}{}^4}{2^2}\{J_{m-2}(k_{mi}\gamma)-2J_m(k_{mi}\gamma)+J_{m\gamma Z}(k_{mi}\gamma)\}e^{-k_{mi}Z}c(m.i)$$

$$Q_\gamma(m,i)\equiv-\frac{k_{mi}{}^4}{2^2}\{J_{m-2}(k_{mi}\gamma)-2J_m(k_{mi}\gamma)+J_{m+2}(k_{mi}\gamma)\}e^{-k_{mi}Z}D(m,i)$$

$$S_\gamma(m-1)\equiv\Big[\frac{h'_{m-1}\{\alpha-k'^2_{m-1}(m-2)\}}{2}J_{m-2}(k'_{m-1}\gamma)+\frac{k'^4_{m-1}\gamma^2-(2-\alpha)(m-1)}{\gamma}J_{m-1}(k'_{m-1}\gamma)$$
$$-\frac{k'_{m-1}\{\alpha+k'^2_{m-1}m\}}{2}J_m(k'_{m-1}\gamma)\Big]e^{-k'_{m-1}z}A_1(m-1)$$

$$J_\gamma(m-1)\equiv\Big[\frac{k'_{m-1}\{\alpha+k'^2_{m-1}(m-2)\}}{2}J_{m-2}(k'_{m-1}\gamma)+\frac{k'^4_{m-1}\gamma^2-(2-\alpha)(m-1)}{\gamma}J_{m-1}(k'_{m-1}\gamma)$$
$$-\frac{k'_{m-1}\{\alpha+k'^2_{m-1}\cdot m\}}{2}J_m(k'_{m-1}\gamma)\Big]e^{-k'_{m-1}Z}A_2(m-1)$$

同様に

$$\tau_{\gamma Z}=\sum_{m=0}^{m+1}[\{\sum_{i=1}^{3j}p_{z\gamma}(mi)+S_{z\gamma}(m-1)\}\cos m\theta+\{\sum_{i=1}^{3j}\theta_{Z\gamma}(m,i)+J_{Z\gamma}(m-1)\}\sin m\theta]$$
$$-\gamma_0{}^2(\gamma+\gamma_E)(\alpha-1)\gamma$$

但し

$$P_{Z\gamma}(m,i)\equiv-\frac{k^2{}_{mi}}{2}\{J_{m-1}(k_{mi}\gamma)-J_{\ +1}(k_{mi}\gamma)\}e^{-k_{mi}Z}c(m,i)$$

$$Q_{Z\gamma}(m,i)\equiv-\frac{k^2{}_{mi}}{2}\{J_{m-1}(k_{mi}\gamma)-J_{m+1}(k_{mi}\gamma)\{e^{-k_{mi}Z}D(m,i)$$

$$S_{Z\gamma}(m-1)\equiv k'_{m-1}\Big[(1-\alpha)J_{m-1}(k'_{m-1}\gamma)+\frac{k'_{m-1}\gamma}{2}\{J_{m-2}(k'_{m-1}\gamma)-J_m(k'_{m-1}\gamma)\}\Big]$$
$$\times e^{-k'_{m-1}Z}\cdot A_1(m-1)$$

$$T_{Z\gamma}(m-1)\equiv k'_{m-1}\Big[(1-\alpha)J_{m-1}(k'_{m-1}\gamma)+\frac{k'_{m-1}\gamma}{2}\{J_{m-2}(k'_{m-1}\gamma)-J_m(k'_{m-1}\gamma)\}\Big]$$
$$\times e^{-k'_{m-1}Z}$$

5. (13)式より

$$\tau_{\theta\gamma}=\sum_{m=0}^{m+1}\Big[\{\sum_{i=1}^{3}P_{\theta\gamma}(m,i)+S_{\theta\gamma}(m-1)\}\cos m\theta+\{\sum_{i=1}^{3}Q_{\theta\gamma}(m,i)+T_{\theta\gamma}(m-1)\}\sin m\theta$$

但し茲に

$$P_{\theta\gamma}(m,i)\equiv-\frac{m}{\gamma^2}\Big[\frac{k_{mi}\gamma}{2}\{J_{m-1}(k_{mi}\gamma)-J_{m+1}(k_{mi}\gamma)\}-J_m(k_{mi}\gamma)\Big]e^{-k_{mi}Z}D(m,i)$$

$$Q_{\theta\gamma}(m,i)\equiv+\frac{m}{\gamma^2}\Big[\frac{k_{mi}\gamma}{2}\{J_{m-1}(k_{mi}\gamma)-J_{m+1}(k_{mi}\gamma)\}-J_m(k_{mi}\gamma)\Big]e^{-k_{mi}Z}c(m,i)$$

$$S_{\theta\gamma}(m-1)\equiv+\Big[(\alpha-m-2)\frac{k_{m-1}}{2}\{J_{m-2}(k'_{m-1}\gamma)-J_m(k'_{m-1}\gamma)\}+\frac{\alpha(m-1)}{\gamma}J_{m-1}(k'_{m-1}\gamma)\Big]$$
$$\times e^{-k'_{m-1}Z}A_2(m-1)$$

$$T_{\theta\gamma}(m-1)\equiv-\Big[(\alpha-m-2)\frac{k'_{m-1}}{2}\{J_{m-2}(k'_{m-1}\gamma)-J_m(k'_{m-}\gamma)\}+\frac{\alpha(m-1)}{\gamma}J_{m-1}(k'_{m-1}\gamma)\Big]$$
$$\times e^{-k'_{m-1}Z}A_1(m-1)$$

同様に

$$\tau_{\theta Z}=\sum_{m=0}^{m+1}[\{\sum_{i=1}^{3}P_{\theta Z}(m,i)+S_{\theta Z}(m-1)\}\cos m\theta+\{\sum_{i-1}^{3}Q_{\theta Z}(mi)+T_{\theta Z}(m-1)\}\sin m\theta$$

但し茲に

$$P_{\theta Z}(m,i)\equiv\frac{mk_{mi}}{\gamma}J_m(k_{mi}\gamma)e^{-k_{mi}Z}D(m,i)$$

$$Q_{\theta Z}(mi)\equiv-\frac{mk_{mi}}{\gamma}J_m(k_{mi}\gamma)e^{-k_{mi}Z}c(m,i)$$

$$S_{\theta Z}(m-1)\equiv-(\alpha-m-2)k'_{m-1}J_{m-1}(k'_{m-1}\gamma)e^{-k'_{m-1}Z}A_2(m-1)$$

$$T_{\theta Z}(m-1)\equiv+(\alpha-m-2)\gamma'_{m-1}J_{m-1}(k'_{m-1}\gamma)e^{-k'_{m-1}Z}A_1(m-1)$$

$$\sigma_Z=\sum_{m=0}^{m+1}[\{\sum_{i=1}^{3}P_z(m,i)+S_z(m-1)\}\cos m\theta+\{\sum_{i=1}^{3}Q_z(m,i)+T_z(m-1)\}\sin m\theta]-2\alpha F$$

但し茲に

$$P_Z(m,i)\equiv-k^2_{mi}J_m(k_{mi}\gamma)e^{-k_{mi}Z}c(m,i)$$

$$Q_Z(m.i)\equiv-k^2_{mi}J_m(k_m\gamma_i)e^{-k_{mi}Z}D(m,i)$$

$$S_Z(m-1)\equiv\Big[\frac{k'_{m-1}(2-\alpha)}{2}\{J_{m-2}(k'_{m-1}\gamma)-J_m(\gamma'_{m-1}\gamma)\}+\frac{(\alpha-2)(m-1)-\{k'_{m-1}\gamma\}^2}{2}$$
$$\times J_{m-1}(k'_{m-1}\gamma)\Big]\times e^{-k'_{m-1}Z}A_1(m-1)$$

$$T_Z(m-1)\equiv\Big[\frac{k'_{m-1}(2-\alpha)}{2}\{J_{m-2}(k'_{m-1}\gamma)-J_m(k'_{m-1}\gamma)\}+\frac{(\alpha-2)(m-1)-\{k'_{m-1}\gamma\}^2}{2}$$
$$\times J_{m-1}(k'_{m-1}\gamma)\Big]\times e^{-k'_{m-1}Z}A_2(m-1)$$

22)式を再録すれば

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_\gamma\gamma d\gamma dz+\tau_{\gamma z}\gamma d\gamma d\theta=0\\&\tau_{\theta\gamma}\gamma d\theta dz+\tau_{\theta z}\gamma d\gamma d\theta=0\\&\tau_{Z\gamma}\gamma d\theta dz+\sigma_Z\gamma d\gamma d\theta=0\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}&\sigma_\gamma dz+\tau_{\gamma Z}d\gamma=0\\&\tau_{\theta\gamma}dz+\tau_{\theta Z}d\gamma=0\\&\tau_{Z\gamma}dz+\sigma_Z d\gamma=0\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\ -\frac{d\gamma}{dz}=\frac{\sigma\gamma}{\tau\gamma z}=\frac{\tau\theta\gamma}{\tau\theta z}=\frac{\tau z\gamma}{\sigma z}\ m\geqq1 \qquad\cdots\cdots(22)'$$

今 $c(m,i)=D(m\ i)\equiv h'_{mi}A(m-1)\quad A_1(m-1)=A_2(m-1)$ とすれば

$$\sigma_\gamma=\sum_{m=0}^{m+1}[\{\sum_{i=1}^{3}hmiP_{\gamma Z}(m,i)e^{-k_{mi}Z}+S_{\gamma Z}(m-1)e^{-k_{m-1}Z}\}(\cos m\theta$$
$$+\sin m\theta)A(m-1)]+\gamma(Z-Z_0)+\gamma_E(Z-Z_E)$$

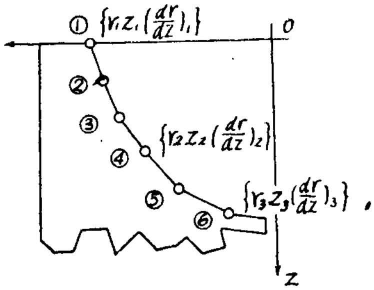
$$\tau_{\gamma Z}=\sum_{m=0}^{m+1}[\{\sum_{i=1}^{3}hmiP_\gamma Z(m,i)^{-k_{mi}Z}+S_{\gamma Z}(m-1)e^{-k_{m-1}Z}\}(\cos m\theta$$
$$+\sin m\theta)A(m-1)]-\gamma d\gamma(\gamma+\gamma_E)(\alpha-1)$$

$$\tau_{\theta\gamma}=\sum_{m=0}^{m+1}[\{\sum_{i=1}^{3} hmip\theta\gamma(m,i)e^{-k_{mi}Z}+S_{\theta\gamma}(m-1)e^{-k_{mi}Z}\}(\cos m\theta-\sin m\theta)A(m-1)]$$

$$\tau_{\theta Z}=\sum_{m=0}^{m+1}[\{\sum_{i=1}^{3} hmip\theta z(m.i)e^{-kmiZ}+S_{\theta Z}(m-1)e^{-k_{m-1}Z}\}(\cos m\theta-\sin m\theta)A(m-1)]$$

$$\sigma_Z=\sum_{m=0}^{m+1}[\{\sum_{i=1}^{3} hmipz(m,i)e^{-kmiZ}+S_Z(m-1)e^{-k_{m-1}Z}\}(\cos m\theta+\sin m\theta)A(m-1)]-2\alpha F$$

$$\tau_{Z\gamma}=\tau_{\gamma Z}$$



扨(22)式より hmi を定める爲次の如くする。即ち 22)′式より

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sum_{i=1}^{3} hmip\gamma(m,i)e^{-kmiZ}+S_\gamma(m-1)e^{-km-iZ}}{\sum_{i=1}^{3} hmip\gamma z(m,i)e^{-kmiZ}+S_{\gamma Z}(m-1)e^{-km-iZ}}=\frac{d\gamma}{dz}\\
&\frac{\sum_{i=1}^{3} hmip\theta\gamma(m.i)e^{-kmiZ}+S_{\theta Z}(m-1)e^{-km-iZ}}{\sum_{i=1}^{3} hmp\theta z(m,i)e^{-kmiZ}+S_{\theta Z}(m-1)e^{-km-iZ}}=\frac{d\gamma}{dz}\\
&\frac{\sum_{i=1}^{3} hmipz(m,i)e^{-kmiZ}+S_{\gamma Z}(m-1)e^{-km-iZ}}{\sum_{i=1}^{3} hmipz(m,i)e^{-kmiZ}+S_Z(m-1)e^{-kmiZ}}=\frac{d\gamma}{dz}
\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

但し $\gamma(Z-Z_E)+\gamma_E(Z-Z_E)$; $\gamma_0{}^2\gamma(\gamma+\gamma_E)(\alpha-1)$; $-2\alpha F$ 等の絕對項は $m=0$ 項に含める事とする。

即ち $hmi(i=1,2,3\cdots\cdots 3j)$ を未知數とする聯立方程式を得る。其處で下流面が與へられるものとし，例へば $\gamma=f(z)$ の如き回轉面であるとすれば，其上の $3j$ 點①，② ③……$(3j)$ 點の $\gamma, z, \frac{d\gamma}{dz}$ の値を代入する事によつて$(m+2)$ 箇の $3j$ 元聯立方程式を得る。例へば $j=2$ として 6 個の點を採れば $(m+2)$ 群の 6 個の聯立方程式を得る事となり。從つて是等を解く事により hmi の値を決定出來る。

但し $m=0$ の場合が問題となるがこの場合には

$$p_\gamma(0,i)\equiv-\frac{h\vartheta_1}{z^2}\{J-z(k_{0i\gamma})-zJ_0(k_{0i\gamma})+J+z(k_{0i\gamma})\}S_\gamma=(0,i)=S_{\gamma Z}(0,i)=S_Z(0,i)=0$$

$$p_{\gamma Z}(0,i)\equiv-k^2{}_{0i}\{J_0(k_{0i\gamma})-J_1(k_{0i\gamma})\}$$

$$p_{\theta\gamma}(0,i)\equiv p\theta z(0,i)\equiv 0$$

$$p_Z(0,i)\equiv-k_0{}^2iJ_0(k_{0i\gamma})$$

$$p_{Z\gamma}(0,i)\equiv-k0^2i\{J_0(k_{0i\gamma})-J_1(k_{0i\gamma})\}$$

從つて　　σ_γ 中の $m=0$ の項$=\sum_{i=1}^{2} p_\gamma(0,i)e^{-kmiZ}c(0.i)+\gamma(z-z_0)+\gamma_E(z-z_E)$

$\tau_{\gamma Z}$ 中の $m=0$ の項$=\sum_{i=1}^{2} p_{\gamma Z}(0\cdot i)e^{-kmiZ}c(0.i)-\gamma_0{}^2(\gamma+\gamma_E)(\alpha-1)\gamma$

$\tau_{\theta\gamma}$, $\tau_{\theta Z}$ 項の中には含まれず。

σ_Z 中の $m=0$ の項$=\sum_{i=1}^{2} p_Z(0.i)e^{-kmiZ}c(0.i)-z\alpha F$

$\tau_{Z\gamma}$ の中の $m=0$ の項$=\sum_{i=1}^{2} p\gamma z(0.i)e^{-kmiZ}c(0.i)-\gamma_0{}^2(\gamma+\gamma_E)(\alpha-1)\gamma$

即ち

$$\left.\frac{\sum_{i=1}^{2} p\gamma(0.i)e^{-kmiZ}c(0.i)+\gamma(z-z_0)+\gamma_E(z-z_E)}{\sum_{i=1}^{2} p\gamma z(0.i)e^{-kmiZ}c(0.i)-\gamma_0{}^2(\gamma+\gamma_E)(\alpha-1)\gamma}=-\frac{d\gamma}{dz}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{2} Zp\gamma z(0.i)e^{kmiZ}c(0.i)-\gamma^2(\gamma+\gamma_B)(\alpha-1)\gamma}{\sum_{i=1}^{2} Zpz(0.i)e^{-kmiZ}c(0.1)-2\alpha F}=-\frac{d\gamma}{dz}$$

の二元聯立方程式を解いて $c(0.i)(i=1.2)$ を求める事が出來る。

14. 岩盤との接觸線の固定條件より A(m) の決定

前6節より圓壔座標に於ける歪度の計算式を係數 $c(m.i)D(m.i)$ 及 $A_\gamma(m)$, $A_2(m)$ に就て整理して上に得た $c(m.i)=D(m.i)=hmi\ A(m-1)$ の値を代入すれば hmi は前節により求められる故結局 $A(m)$ のみの次式を得る。

$$\begin{cases} 2GU=\sum_{m=1}^{m}\{{}_mR_1(\gamma)e^{-kimZ}+\sum_{i=1}^{3} mt_2(\gamma)e^{-km+iZ}\}\{\cos(m+1)\theta+\sin(m+1)\theta\}A(m) \\ \quad +\sum_{i=1}^{2} c(0.i)h_{0i}e^{-k_{0i}Z}J_1(k_{0i}\gamma)-\alpha ZA_3(0.0) \\ 2GV=\sum_{m=1}^{m}\{{}_mR_4(\gamma)e^{-k'mZ}+\sum_{i=1}^{3}{}_mR_5(\gamma)e^{-km+1.iZ}\}\{\cos(m+1)\theta-\sin(m+1)\theta\}A(m) \\ 2GW=\sum_{m=1}^{m}\{{}_mR_7(\gamma)e^{-k'mZ}+\sum_{i=1}^{3}{}_mR_{(8)}(\gamma)e^{-km+1,iZ}\}\{\cos(m+1)\theta+\sin(m+1)\theta\}A(m) \\ \quad +\sum_{i=1}^{2} c(0.i)k_{0.i}e^{-k0iZ}J_0(k_{0i}\gamma)+(2\alpha-1)\{A_3(0.0)\log\frac{1}{\gamma}+B_3(0.0)\}+2(\alpha-1)F.Z \end{cases}$$

但し玆に

$$\begin{cases} {}_mR_1(\gamma)=[2(\alpha-1)J_m(k'_m\gamma)-k'_m\gamma\{J_{m-1}(k'_m\gamma)-J_{m+1}(k'_m\gamma)\}] \\ {}_mR_2(\gamma)=mR_3(\gamma)=-\frac{k_{m+1}i}{2}(h_{m+1,i})\gamma=\gamma_1\{J_m(k_{m+1i}\gamma)-J_{m+2}(k_{m+,i}\gamma)\} \\ {}_mR_4(\gamma)=(2\alpha-1-m)J_m(k'_m\gamma) \\ {}_mR_5(\gamma)=mR_6(\gamma)=-(m+1)h_{m+1,i}\gamma=\gamma_1\frac{J_{m+1}(h_{m+1,i}\gamma)}{\gamma} \\ {}_mR_7(\gamma)=k'_m\gamma J_m(k'_m\gamma) \\ {}_mR_8(\gamma)={}_mR_9(\gamma)=k_{m+1,i}(k_{m+1,i})\gamma=\gamma_1 J_{m+1}(k_{m+1,i}\gamma) \end{cases}$$

にして "γ" のみの函數である。

拱堰堤固定線上を $(n-1)$ 等分し，此の固定點 n 個の上にて完全に固定されてゐるものとすれば次の如く最小自乘法の原則を應用して $A(m)$ を決定する事が出來る。先づ固定點 (γ_1,θ_1,z_1), (γ_2,θ_2,z_2) ……$(\gamma_n,\theta_n z_n)$ に於ける $A(m)$ の係數を次の如く計算する必要がある。

(A) $2GU=0$

(1) $\gamma=\gamma_1$, $\theta=\theta_1$, $z=z_1$

$m=1$ $\quad ua_1=\{{}_1R_1(\gamma_1)e^{-k'_1Z_1}+\sum_{i=1}^{3}{}_1R_2(\gamma_1)e^{-k_2iZ}\}(\cos 2\theta_1+\sin 2\theta_1)$

$m=2$ $\quad ub_1=\{{}_2R_1(\gamma_1)e^{-k'_2Z_1}+\sum_{i=1}^{3}{}_2R_2(\gamma_1)e^{-k_3iZ_1}\}(\cos 3\theta_1+\sin 3\theta_1)$

……………………………………………

$m=m$ $\quad um_1=\{{}_mR_1(\gamma_1)e^{-k'mZ_1}+\sum_{i=1}^{3}{}_mR_2(\gamma_1)e^{-k'm+iZ_1}\}\{\cos(m+1)\theta_1+\sin(m+1)\theta_1\}$

(2) $\gamma=\gamma_2$, $\theta=\theta_2$, $z=z_2$

$m=1$ $\quad ua_2=\{{}_1R_1(\gamma_2)e^{-k'_1Z_2}+\sum_{i=1}^{3}{}_1R_2(\gamma_2)e^{-k_2iZ_2}\}(\cos 2\theta_2+\sin 2\theta_2)$

$m=2$ $\quad ub_2=\{{}_2R_1(\gamma_2)e^{-k'_2Z_2}+\sum_{i=1}^{3}{}_2R_2(\gamma_2)e^{-k_3iZ'_2}\}(\cos 3\theta_2+\sin 3\theta_2)$

……………………………………………

$$m=m \qquad um_2=\{{}_mR_1(\gamma_2)e^{-k'mZ_2}+\sum_{i=1}^{3}{}_mR_2(\gamma_2)e^{-km+1,iZ_2}\}\{\cos(m+1)\theta_2+\sin(m+1)\theta_2\}$$

(3) $\gamma=\gamma_n$, $\theta=\theta_n$, $z=z_n$

$$m=1 \qquad uan=\{{}_1R_1(\gamma_n)e^{-k'_1Zn_3}+\sum_{i=1}{}_1R_2(\gamma_n)e^{-k_2,iZn}\}(\cos 2\theta_n+\sin 2\theta_n)$$

$$m=2 \qquad ub_n=\{{}_2R_1(\gamma_n)e^{-k'_2Zn}+\sum_{i=1}^{3}{}_2R_2(\gamma_n)e^{-k_3i,Zn}\}(\cos 3\theta_n+\sin 3\theta_n)$$

....

$$m=n \qquad um_n=\{{}_mR_1(\gamma_n)e^{-k'mZn}+\sum_{i=1}^{3}{}_mR_2(\gamma_n)e^{-km+1,iZn}\}\{\cos(m+1)\theta_n+\sin(m+1)\theta_n\}$$

(B) $2G7=0$

(4) $\gamma=\gamma_1$, $\theta=\theta_1$, $z=z_1$

$$m=1 \qquad va_{n+1}=\{{}_1R_4(\gamma_1)e^{-k'_1Z_1}+\sum_{i=1}^{3}{}_1R_5(\gamma_1)e^{-k'z,iZ_1}\}(\cos 2\theta_1-\sin 2\theta_1)$$

$$m=2 \qquad vb_{n+1}=\{{}_2R_4(\gamma_1)e^{-k'_2Z_1}+\sum_{i=1}^{3}{}_2R_5(\gamma_1)e^{-k_3iZ_1}\}(\cos 3\theta_1-\sin 3\theta_1)$$

....

$$m=m \qquad vm_{n+1}=\{{}_mR_4(\gamma_1)e^{-k'mZ_1}+\sum_{i=1}^{3}{}_mR_5(\gamma_1)e^{-km+1,iZ_1}\}\{\cos(m+1)\theta_1-\sin(m+1)\theta_1\}$$

(5) $\gamma=\gamma_2$, $\theta=\theta_2$, $z=z_2$

$$m=1 \qquad va_{n+2}=\{{}_1R_4(\gamma_2)e^{-k'_1Z_2}+\sum_{i=1}^{3}{}_1R_5(\gamma_2)e^{-k_2iZ_2}\}(\cos 2\theta_2-\sin 2\theta_2)$$

$$m=2 \qquad vb_{n+2}=\{{}_2R_1(\gamma_2)e^{-k'_2Z_2}+\sum_{i=1}^{3}{}_2R_5(\gamma_2)e^{-k_3iZ_2}\}(\cos 3\theta_2-\sin 3\theta_2)$$

....

$$m=m \qquad vm_{n+2}=\{{}_mR_4(\gamma_2)e^{-k'mZ_2}+\sum_{i=1}^{3}{}_mR_5(\gamma_2)e^{-k_{m+1}iZ_2}\}\{\cos(m+1)\theta_2-\sin(m+1)\theta_2\}$$

(6) $\gamma=\gamma_n$, $\theta=\theta_n$, $z=z_n$

$$m=1 \qquad va_{2n}=\{{}_1R_4(\gamma_n)e^{-k'_1Zn}+\sum_{i=1}^{3}{}_1R_5(\gamma_n)e^{-k_2iZn}\}(\cos 2\theta_n-\sin 2\theta_n)$$

$$m=2 \qquad vb_{2n}=\{{}_2R_4(\gamma_n)e^{-k'_2Zn}+\sum_{i=1}^{3}{}_2R_5(\gamma_n)e^{-k_3,iZn}\}(\cos 3\theta_n-\sin 3\theta_n)$$

....

$$m=m \qquad vm_{2n}=\{{}_mR_4(\gamma_n)e^{-k'mZn}+\sum_{i=1}^{3}{}_mR_5(\gamma_n)e^{-km+1_iZn}\}\{\cos(m+1)\theta_n-\sin(m+1)\theta_n\}$$

(C) $2GW=0$

(7) $\gamma=\gamma_1$, $\theta=\theta_1$, $z=z_1$

$$m=1 \qquad wa_{2n+1}=\{{}_1R_7(\gamma_1)e^{-k'_1Z_1}+\sum_{i=1}^{3}{}_1R_8(\gamma_1)e^{-k_2i,Z_1}\}(\cos 2\theta_1+\sin 2\theta_1)$$

$$m=2 \qquad wb_{2n+1}=\{{}_2R_7(\gamma_1)e^{-k'_2Z_1}+\sum_{i=1}^{3}{}_2R_8(\gamma_1)e^{-k_3iZ_1}\}(\cos 3\theta_1+\sin 3\theta_1)$$

....

$$m=m \qquad wm_{2n+1}=\{{}_mR_7(\gamma_1)e^{-k'mZ_1}+\sum_{i=1}^{3}{}_mR_8(\gamma_1)e^{-k_{m+1}Z_1}\}\{\cos(m+1)\theta_1+\sin(m+1)\theta_1\}$$

(8) $\gamma=\gamma_2$, $\theta=\theta_2$, $z=z_2$

$$m=1 \qquad wa_{2n+2}=\{{}_1R_7(\gamma_2)e^{-k'_1Z_2}+\sum_{i=1}^{3}{}_1R_8(\gamma_2)e^{-k_2,iZ_2}\}(\cos 2\theta_2+\sin 2\theta_2)$$

$$m=2 \qquad wb_{2n+2}=\{{}_2R_7(\gamma_2)e^{-k'_2z_2}+\sum_{i=1}^{3}{}_2R_8(\gamma_2)e^{-k_{3i}z_2}\}(\cos 3\theta_2+\sin 3\theta_2)$$

$$\cdots\cdots$$

$$m=m \qquad wm_{2n+2}=\{{}_mR_7(\gamma_2)e^{-k'_m z_2}+\sum_{i=1}^{3}{}_mR_8(\gamma_2)e^{-k_{m+1.i}z_2}\}\{\cos(m+1)\theta_2+\sin(m+1)\theta_2\}$$

(9) $\gamma=\gamma_n,\ \theta=\theta_n,\ z=z_n$

$$m=1 \qquad wa_{3n}=\{{}_1R_7(\gamma_n)e^{-k'_1 z_n}+\sum_{i=1}^{3}{}_1R_8(\gamma_n)e^{-k_{2.i}z_n}\}(\cos 2\theta_n+\sin 2\theta_n)$$

$$m=2 \qquad wb_{3n}=\{{}_2R_7(\gamma_n)e^{-k'_2 z_n}+\sum_{i=1}^{3}{}_2R_8(\gamma_n)e^{-k_{3.i}z_n}\}(\cos 3\theta_n+\sin 3\theta_n)$$

$$\cdots\cdots$$

$$m=m \qquad wm_{3n}=\{{}_mR_7(\gamma_n)e^{-k'_m z_n}+\sum_{i=1}^{3}{}_mR_8(\gamma_n)e^{-k_{m+1.i}z_n}\}\{\cos(m+1)\theta_n+\sin(m+1)\theta_n\}$$

尙絕對項

$$ul_1=-\sum_{i=1}^{2}c(0.i)k_{o.i}e^{-k_{o.i}z_1}J_1(k_{oi}\gamma_1)+\gamma_1 Z_1 A_3(0.0)$$

$$ul_2=-\sum_{i=1}^{2}c(0.i)k_{o.i}e^{-k_{o.i}z_2}J_1(k_{oi}\gamma_2)+\gamma_2 Z_2 A_3(0.0)$$

$$\cdots\cdots$$

$$u'_n=-\sum_{i=1}^{2}c(0.i)k_{oi}e^{-k_{oi}z_n}J_1(k_{oi}\gamma_n)+\gamma_n Z_n A_3(0.0)$$

$$vl_{n+1}=vl_{n+2}=\cdots\cdots=vl_{2n}=0$$

$$w'_{2n+1}=-\sum_{i=1}^{2}c(0.i)k_{oi}e^{-k_{oi}z_1}J_0(k_{oi}\gamma_1)-(2\alpha-1)\{A_3(0.0)\log\frac{1}{\gamma_1}+B_3(0.0)\}-2(\alpha-1)F.Z_1$$

$$wl_{2n+2}=-\sum_{i=1}^{2}c(0.i)k_{oi}e^{-k_{oi}z_2}J_0(k_{oi}\gamma_2)-(2\alpha-1)\{A_3(0.0)\log\frac{1}{\gamma^2}+B_3(0.0)\}-2(\alpha-1)F.Z_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$wl_{3n}=-\sum_{i=1}^{2}c(0.i)k_{oi}e^{-k_{oi}z_n}J_0(k_{oi}\gamma_n)-(2\alpha-1)\{A_3(0.0)\log\frac{1}{\gamma_n}+B_3(0.0)\}-2(\alpha-1)F.Z_n$$

以上の係數を計算すれば次の觀測方程式を作成する事が出來る。

$U: 1\rightarrow n$, $V: n+1\rightarrow 2n$, $W: 2n+1\rightarrow 2n$

$$\left.\begin{array}{l}
ua_1A(1)+ub_1A(2)+uc_1A(3)+\cdots+um_1A(m)=ul_1\\
ua_2A(1)+ub_2A(2)+uc_2A(3)+\cdots+um_2A(m)=ul_2\\
\cdots\cdots\\
ua_nA(1)+ub_nA(2)+uc_nA(3)+\cdots+um_nA(m)=ul_n\\
va_{n+1}A(1)+\sigma b_{n+1}A(2)+vc_{n+1}A(3)+\cdots+vm_{n+1}A(m)=vl_{n+1}\\
va_{n+1}A(1)+vb_{n+2}A(2)+vc_{n+2}A(3)+\cdots+vm_{n+2}A(m)=vl_{n+2}\\
\cdots\cdots\\
wa_{2n}A(1)+wb_{2n}A(2)+wc_{2n}A(3)+\cdots+wm_{2n}A(m)=w'_{2n}\\
wa_{2n+1}A(1)+wb_{2n+1}A(2)+wc_{2n}A(3)+\cdots+wm_{2n+1}A(m)=wl_{2n+1}\\
wa_{2n+2}A(1)+wb_{2n+2}A(2)+wc_{2n+2}A(3)+\cdots+wm_{2n+2}A(m)=wl_{2n+2}\\
\cdots\cdots\\
wa_{3n}A(1)+wb_{3n}A(2)+wc_{3n}A(3)+\cdots+wm_{3n}A(m)=wl_{3n}
\end{array}\right\}\cdots\cdots(25)$$

15. 正規方程式の作成

m の値を n に等しく採れば與へられた n 個の點の固定條件を完全に滿足する事になるが，一般には計算が非常に複雜になる故 $m<n$ に取るを適當とするから，m 個の $A(m)$ でこの條件を最大に滿足すべき $A(m)$ の値は上記の觀測方程式より正規方程式を作つて是れを解く事とする。

正規方程式を得るには $[aa]$，$[ab]$………$[al]$………の和を求めて置けばよいのであるが，其他に更に

$$\left.\begin{array}{l} S_1=a_1+b_1+c_1+\cdots\cdots\cdots\cdots+l_1 \\ S_2=a_2+b_2+c_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+l_2 \\ S_3=a_3+b_3+c_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+l_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{3n}=a_{3n}+b_{3n}+c_{3n}+\cdots\cdots\cdots+l_{3n} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

を計算して置き $[aS]$………を作つて置けば

$$\left.\begin{array}{l} [aa]+[aq]+\cdots\cdots\cdots\cdots+[al]=[aS] \\ [ba]+[bb]+\cdots\cdots\cdots\cdots+[bl]=[bS] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [la]+[lb]+\cdots\cdots\cdots\cdots+[ll]=[lS] \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

なる $(3n+1)$ 個の關係があることが知られる故，之を利用して途中の計算を簡單に査照する事が出來る。正規方程式の解法には Gauss の方法，Doolittle の方法等あり各種の最小自乘法の圖書に掲載されて居り，夫々の特徴を有するが次に Gauss の方法の概略を述べる。

正規方程式

$$\left.\begin{array}{l} [aa]A(1)+[ab]A(2)+ac]A(3)+\cdots\cdots\cdots\cdots+[am]A(m)=[al] \\ [ba]A(1)+[bb]A(2)+[bc]A(3)+\cdots\cdots\cdots\cdots+[bm]A(m)=[bl] \\ [ca]A(1)+[cb]A(2)+[cc]A(3)+\cdots\cdots\cdots\cdots+[cm]A(m)=[cl] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [ma]A(1)+[mb]A(2)+[mc]A(3)+\cdots\cdots\cdots+[mm]A(m)=[ml] \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

此の m 個の聯立方程式の第一式を $A(1)$ について解くと

$$A(1)=\frac{[al]}{[aa]}-\frac{[ab]}{[aa]}A(2)-\frac{[ac]}{[aa]}A(3)-\cdots\cdots\cdots\cdots-\frac{[am]}{[aa]}A(m)$$

であるから之を第二式以下に代入すると $A(2)$，$A(3)$……$A(m)$ についての次の聯立方程式が得られる。

$$\left.\begin{array}{l} [bb\cdot1]A(2)+[bc\cdot1]A(3)+\cdots\cdots\cdots\cdots+[bm\cdot1]A(m)=[bl\cdot1] \\ [cb\cdot1]A(2)+[cc\cdot1]A(3)+\cdots\cdots\cdots\cdots+[cm\cdot1]A(m)=[cl\cdot1] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [mb\cdot1]A(2)+[mc\cdot1]A(3)+\cdots\cdots\cdots\cdots+[mm\,1]A(m)=[ml\cdot1] \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

玆に用ひられた記號の意味は次の如きものである。

$$[bb\,1]=[bb]-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}\;;\;[bc\cdot1]=[bc]-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$$

であり一般に $b,c,\cdots\cdots\cdots m,l$ の中の任意の二つを α,β で表はすと

$$[\alpha\beta\cdot1]=[\alpha\beta]-\frac{[a\alpha]\,[a\beta]}{[aa]} \qquad \text{である。}$$

次に聯立方程式(29)の第一方程式を $A(2)$ について解くと

$$A(2)=\frac{[bl\cdot1]}{[bb\cdot1]}-\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}A(3)-\cdots\cdots-\frac{[bm\cdot1]}{[bb\cdot1]}A(m) \qquad \text{が得られる。}$$

之を第二式以下に代入すると．

$$\left.\begin{array}{l} [cc\cdot2]A(3)+\cdots\cdots\cdots\cdots+[cm\cdot2]A(m)=[cl\,2] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [mc\cdot2]A(3)+\cdots\cdots\cdots\cdots+[mm\cdot2]A(m)=[ml\cdot2] \end{array}\right\} \qquad \text{となる。}$$

記號の意味は前と同樣で一般に $[\alpha\beta\cdot 2]=[\alpha\beta\cdot 1]-\dfrac{[b\alpha\cdot 1][b\beta\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$ であり α,β は $c,d,\cdots\cdots m,l,$ の中の任意の二つを表はす。斯くの如き代置を續けると最後に，

$$[m\,m(m-1)]A(m)=[ml(m-1)] \quad\cdots\cdots(30)$$

なる單一の方程式に到達する。是れに依つて未知量 $A(m)$ を求める事が出來，上の計算を順次に逆に進めて總ての未知量が求められる。即ち

$$\left.\begin{aligned}
A(m)&=\frac{[ml\cdot(m-1)]}{[mm\cdot(m-1)]}\\
A(3)&=\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}-\cdots\cdots\cdots\frac{[cm\cdot 2]}{[cc\cdot 3]}A(m)\\
A(2)&=\frac{[l\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}A(3)-\cdots\cdots-\frac{[bm\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdot A(m)\\
A(1)&=\frac{[al]}{[aa]}-\frac{[ab]}{[aa]}A(2)-\frac{[ac]}{[aa]}A(3)\cdots\cdots\cdots-\frac{[am]}{[aa]}A(m)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(31)$$

に依つて $A(1)$, $A(2)$, $A(3)\cdots\cdots A(m)$ が得られる。

尙途中の計算に誤りが無いか否かは次式を必ず滿さなければならない諸條件を，果して滿足してゐるか否かを檢する事によつて查照される。

16. 動水壓荷重

地震の爲地盤及び堤體に作用する上流向の加速度に因り堤體の上流面に靜水壓以外に，動水壓が作用する。此の動水壓の影響は相當大なる故斷面決定に之を無視する事が出來ない。この影響を應力函數に採り入れる方法を研究する。

應力函數 $F=\phi_0+x\phi_1+y\phi_2+z\phi_3$ の內の $\phi_0=\phi_0'+\phi_0''$ の二函數に分け ϕ_0'' によつて動水壓を採らしむるものとする。

$$\phi_0''=\sum_{k=1}^{n}\lambda_0(k)J_0(k\gamma)e^{-kZ}$$

この $\phi_0''(\gamma_0 Z)$ にて上流面 $\gamma=\gamma_0$ に於ける動水壓を表はしめるものとし，常數 k 及び係數 $\lambda_0(k)$ を決定せんとす。堰堤天端の座標を原點に採り滿水面を $Z=Z_0$ とすれば Z なる深さに於ける動水壓強度は次式によつて表はされる。

$$p_d=\frac{7}{8}w_0K(H_0-Z_0)^{\frac{1}{2}}(Z-Z_0)^{\frac{1}{2}} \quad\cdots\cdots(32)$$

茲に　w_0＝水の比重 1 t/m³

P_d：原點より下方 Z なる深さに於ける上流面に作用する動水壓強度 (t/m²)

H_0：堤題の最大高 (m)

Z_0：滿水面迄の深さ (m)

K：震度

(32)式の P_d を有限の指數函數によつて表はす爲次の方法を採る。

$$P_d=\sum_{i=1}^{n}\zeta(ki)e^{-kiZ}=\zeta(ki)e^{-k1Z}+\zeta(k_2)e^{-k_0Z}+\cdots\cdots+\zeta(k_n)e^{-knZ}$$

此の係數 $\zeta(ki)$ を求める爲に $\zeta(ki)\equiv\lambda_0(ki)J_0(ki\gamma_0)$ と置けば $J_0(ki\gamma_0)$ は常數なる故一種の Prony 補間式となる。(32)式にて $Z-Z_0\equiv\xi$, $dZ=d\xi$, $Z=\xi+Z_0$ と置けば

$$\int^{\infty}e^{-P(Z-Z_0)}(Z-Z_0)^{\frac{1}{2}}d(Z-Z_0)=\int_0^{\infty}e^{-P\xi}\xi^{\frac{1}{2}}d\xi=\frac{\zeta(k_1)}{P+k_1}+\frac{\zeta(k_2)}{P+k_2}+\cdots+\frac{\zeta(k_n)}{P+k_n} \quad (33)$$

然るに左邊は Euler 積分によつて $\int_0^{\infty}e^{-P\cdot\xi}\xi^{\frac{1}{2}}d\xi=\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{P^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{2P}\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$ なる故 P の函數にして既知の量なる

故是れを $c(P)$ と置けば

$$c(P)\times(P \text{ の } n \text{ 次式})=\{P \text{ の } (n-1) \text{ 次式}\} \text{ となる。}$$

即ち
$$c(P)(P^n+\mu_1 P^{n-1}+\cdots\cdots+\mu_n)=\gamma_0 P^{n-1}+\gamma_1 P^{n-2}+\cdots\cdots+\gamma_{n-1}$$

次に P に適當な値 P_1, P_2, $P_3\cdots\cdots P_{2n}$ を與へると上式より μ_1, $\mu_2\cdots\cdots\mu_n$; γ_0, $\gamma_1\cdots\cdots\gamma_{n-1}$ を未知數とする聯立一次方程式を $2n$ 個得る。之を解いて μ_k, ν_c を求めたとすれば(33)式の k_1, $k_2\cdots\cdots\cdots k_n$ は結局

$$t^n+\mu_1 t^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+\mu_n=0$$

の根である事を知る故是れを解き，之に依つて左邊及右邊の分母は全部既知となりし故，適宜の n 個の P に對する(33)式を作り n 個の聯立方程式を解きて $\zeta(ki)$ を定める事が出來る。（昭 23. 7. 21 受付）

河口不等流に於ける亂れ粘性係數の1例

正員　濱　田　德　一

Turbulent Viscosity Coefficients of the Nonuniform Flow at River Mouth.

By Tokuichi Hamada, C. E. Member

目　　次

圖—1