

感潮河川の計算

准員 吉川 秀夫*

“Calculation of tidal river”

要旨 感潮河川ではその水位は絶えず變化してゐるが、各地點の最高水位を連ねた曲線は、定流としての背水曲線の上にあるか、下にあるかは簡単に定められない。本論文は主として一樣標の河川に就て數値計算によるその比較検討を試みると共に計算法に對する検討をも試みたものである。尙本論文は著者が東京帝國大學第二工學部在學中に本間教授指導の下に卒業論文として纏めたものゝ要約である。

目 次

第1章 緒 論

第1節 概説 第2節 在來公式の概略

第2章 感潮河川に對する計算

第1節 楠、岡本兩氏の解の數値に依る比較 第2節 定流の場合との比較

第3節 前二節に對する考察 第4節 Chézy の係數 C の異なる場合

第5節 或る瞬間に於ける潮波の波形

第3章 鐘口狀河口に於ける河川潮汐の理論

第1節 鐘口狀河口に於ける河川潮汐の理論 第2節 河幅の變化しない場

合との比較 第3節 定流の場合との比較

第4章 汚水流下の問題の理論

第1節 流下狀況の計算

結 語

第1章 緒 論

第1節 概 説

感潮河川の場合には其の水面勾配は時々依り性質と量とを異にし、従つて流量も時々刻々に變化するので不定流となる。

依つて先づ河川不定流の運動方程式を求め、更に從來研究されたる感潮河川の理論に就き簡単に述べる。

1°. 河川不定流の運動方程式

一般的には水粒子毎に考へて運動方程式を作るのであるが、之は餘りに複雑に過ぎるので、河川の場合には各斷面の水は一括して其の平均流速 v に就き運動方程式を作る事が多い。即ち定常等流の場合の Chézy の流速公式を得たと同様に Euler 流の運動方程式を書けば

* 建設院第一技術研究所

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = g \left(I - \frac{v^2}{C^2 R} \right) \dots\dots\dots (1.1)$$

茲に C 及び R は Chézy 法則の場合と同じ意味である。

2°. 河川潮汐の理論

河口を原点とし上流に x 軸をとれば河川不定流の運動方程式は (1.1) 式に依り、

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -W - gI \dots\dots\dots (1.2)$$

である。茲に W は流水の受ける摩擦抵抗で普通は速度の二乗に比例すると考へられる。

今圖-1 に於て潮汐無き場合には川は固有流速 u_0 、水面勾配 I_0 、水深 h を以て等流を爲すものとし、潮汐に依る水面上昇を ζ 、溯上潮流を u にて表はせば

$$v = u - u_0, \quad I = I_0 + \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad u_0 = C \sqrt{RI_0}$$

である。

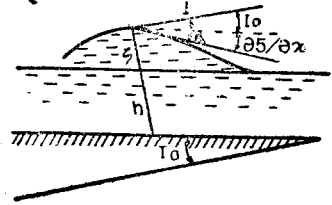


圖-1

又連続の方程式は質量不變の法則より

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [(h+C)v] \dots\dots\dots (1.3)$$

となる。以上の2式に依り河川の潮汐現象が知られる。

此の近似解として Harris, 楠兩氏の方法があり、又岡本氏の解がある。

第2節 在來公式の概略

1°. Harris 氏の近似解

Harris は近似的に (1.2), (1.3) 兩式より波動方程式を導き之に依り解いたが之は省略多く、潮汐の振幅が上流迄少しも減衰しないと云ふ不合理が生ずるので、實用にならないから此所では述べない。

2°. 楠氏の近似解

楠宗道博士¹⁾ は潮流に對する抵抗を流速に比例するとして近似解を求めた。即ち抵抗 W は

$$W = f \cdot v \dots\dots\dots (1.4)$$

と置くが、その爲の誤差を小ならしめる爲に f の値を適當に選んで潮流の半週期に於けるエネルギー損耗が抵抗を流速の二次に比例するとした場合と同一値となる様にした。

運動方程式は $v \frac{\partial v}{\partial x}$ を $\frac{\partial v}{\partial t}$ に對し省略し、更に v を固有流速 u_0 と潮流 u に分ち $v = u - u_0$ とし、且つ潮流なければ $fu_0 + gI_0 = 0$ なる事に注意し、

$$\text{運動方程式: } \frac{\partial u}{\partial t} + fu + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (1.5)$$

を得る。又潮高は川の徑深 R に比して甚小なりとして、

1) 楠: 感潮水路の水流に就て 土木學會誌第 17 卷第 3 號。

$$\text{連続式: } \frac{\partial \zeta}{\partial t} + R \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (1.6)$$

とした。茲で河口 ($x=0$) に於ける潮高

$$\zeta|_{x=0} = a \cos \sigma t \dots\dots\dots (1.7)$$

に應ずる解は次の如くなる。

$$\zeta = a e^{-\alpha x} \cos(\sigma t - \beta x) \dots\dots\dots (1.8)$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{\sigma}{\sqrt{gR \cos \theta}} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ \beta &= \frac{\sigma}{\sqrt{gR \cos \theta}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.9)$$

但し

$$\theta = \tan^{-1} \frac{f}{\sigma}$$

同様に河口に於ける潮汐の最大流速を U とすれば、流速 u は

$$u = U e^{-\alpha x} \cos(\sigma t - \beta x) \dots\dots\dots (1.10)$$

となる。

3° 岡本氏の解

岡本元治郎理學士は抵抗 W を楠博士に倣ひ $f \cdot v$ とする外は (1.2), (1.3) 式より省略なしに解を求めた。

即ち運動方程式は (1.2) 式に於て、 v を固有流、 $-u_0$ と潮流 u に分ち $v = u - u_0$ と置き、且つ潮流無き時は $f u_0 = g I_0$ なる事に注意すれば

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u - u_0) \frac{\partial u}{\partial x} = -f u - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \dots\dots\dots (1.11)$$

又連続方程式は

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [h + \zeta(u - u_0)] \dots\dots\dots (1.12)$$

之を河口 ($x=0$) で

$$\zeta|_{x=0} = a \cos \sigma t \dots\dots\dots (1.13)$$

遙か上流で

$$\zeta|_{x=\infty} = 0 \dots\dots\dots (1.14)$$

となる様に解けば次の如くなる。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -u_0 + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots\dots\dots \\ &= -u_0 + \frac{\gamma_1}{h} a e^{-\alpha_1 x} \cos(\sigma t - \beta_1 x + \theta_1) \\ &\quad + \frac{\gamma_3}{h} \cdot \frac{a}{h} a e^{-\alpha_2 x} \cos(2\sigma t - \beta_2 x + \theta_2) - \frac{\gamma_4}{h} \cdot \frac{a}{h} e^{-2\alpha_1 x} \cos(2\sigma t - 2\beta_1 x + \theta_1) \\ &\quad + \dots\dots\dots (1.15) \\ \zeta(x, t) &= I_0 x + \zeta(x, t) = I_0 x + \zeta_1(x, t) + \zeta_2(x, t) + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= I_0 x + a e^{-\gamma_1 x} \cos(\sigma t - \beta_1 x) \\
 &+ \gamma_2 \frac{a}{k} [a_2 e^{-\gamma_2 x} \cos(2\sigma t - \beta_2 x + \theta_2) - a e^{-2\alpha_1 x} \cos(2\sigma t - 2\beta_1 x + \theta_2)] \\
 &+ \dots \dots \dots (1.16)
 \end{aligned}$$

茲に

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{u_0}{2(c_0^2 - u_0^2)} (p_1 + f) \\
 \beta_1 &= \frac{u_0}{2(c_0^2 - u_0^2)} (q_1 + 2\sigma)
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.17)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_2 &= \frac{u_0}{2(c_0^2 - u_0^2)} (p_2 + f) \\
 \beta_2 &= \frac{u_0}{2(c_0^2 - u_0^2)} (q_2 + 4f)
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.18)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma_1^2 &= \frac{1}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2} [\sigma^2 \alpha_1^2 + \{u_0(\alpha_1^2 + \beta_1^2) - \sigma \beta_1\}^2] \\
 \tan \theta_1 &= \sigma \alpha_1 / u_0(\alpha_1^2 + \beta_1^2) - \sigma \beta_1
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.19)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma_2^2 &= \frac{1}{f^2} \{ (f + 3u_0 \alpha_1)^2 + (3\sigma + 3u_0 \beta_1)^2 \} \\
 \tan \theta_2 &= 3\sigma + 3u_0 \beta_1 / f + 3u_0 \alpha_1
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.20)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma_3^2 &= \frac{1}{(\alpha_2^2 + \beta_2^2)^2 f^2} [\{ 3u_0^2 \alpha_2^2 \alpha_1 + 3u_0^2 \beta_2^2 \alpha_1 + u_0 \alpha_2^2 f \\
 &+ u_0 \beta_2^2 f - 6\sigma^2 \alpha_2 - 6\sigma \alpha_2 \beta_1 u_0 + 2f \sigma \beta_2 + 6\sigma \beta_2 \alpha_1 u_0 \}^2 \\
 &+ \{ 2\sigma \alpha_2 f + 6\sigma \alpha_2 \alpha_1 u_0 + 6\sigma^2 \beta_2 + 6\sigma \beta_2 \beta_1 u_0 + 3u_0^2 \alpha_2^2 \beta_1 \\
 &+ 3u_0^2 \beta_2^2 \beta_1 + 3u_0 \sigma \alpha_2^2 + 3u_0 \sigma \beta_2^2 \}^2]
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.21)$$

$$\begin{aligned}
 \tan \theta_3 &= \{ 2\sigma \alpha_2 f + 6\sigma \alpha_2 \alpha_1 u_0 + 6\sigma^2 \beta_2 + 6\sigma \beta_2 \beta_1 u_0 \\
 &+ 3u_0^2 \alpha_2^2 \beta_1 + 3u_0^2 \beta_2^2 \beta_1 + 3u_0 \alpha_2^2 + 3u_0 \beta_2^2 \} \\
 &\div \{ 3u_0^2 \alpha_2^2 \alpha_1 + 3u_0^2 \beta_2^2 \alpha_1 + u_0 \alpha_2^2 f + u_0 \beta_2^2 f - 6\sigma^2 \alpha_2 \\
 &- 6\sigma \alpha_2 \beta_1 u_0 + 2f \sigma \beta_2 + 6\sigma \beta_2 \alpha_1 u_0 \}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma_4^2 &= \frac{1}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2 f^2} [\{ -3\sigma^2 \alpha_1 - 3\sigma \alpha_1 \beta_1 u_0 + 2f \sigma \beta_1 + 3\sigma \beta_1 \alpha_1 u_0 \\
 &+ 2u_0 \alpha_1^2 f + u_0^2 \alpha_1^2 + 3u_0^2 \beta_1^2 \alpha_1 + 2f u_0 \beta_1^2 \}^2 + \{ 2f \sigma \alpha_1 \\
 &+ 3\sigma \alpha_1^2 u_0 + 3\sigma^2 \beta_1 + 6u_0 \beta_1^2 \sigma + 3u_0 \alpha_1^2 \tau + 3\sigma \alpha_1^2 \beta_1 u_0^2 \\
 &+ 3u_0^2 \beta_1^2 \}^2]
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.22)$$

$$\begin{aligned}
 \tan \theta_4 &= \{ 2f \sigma \alpha_1 + 3\sigma \alpha_1^2 u_0 + 3\sigma^2 \beta_1 + 6u_0 \beta_1^2 \sigma + 3u_0 \alpha_1^2 \tau \\
 &+ 3\sigma \alpha_1^2 \beta_1 u_0^2 + 3u_0^2 \beta_1^2 \} \div \{ -3\sigma^2 \alpha_1 - 3\sigma \alpha_1 \beta_1 u_0 + 2f \sigma \beta_1 \\
 &+ 3\sigma \beta_1 \alpha_1 u_0 + 2u_0 \alpha_1^2 f + 3u_0^2 \alpha_1^2 + 3u_0^2 \beta_1^2 \alpha_1 + 2f u_0 \beta_1^2 \}
 \end{aligned}$$

但し

$$\left. \begin{aligned}
 c_0 &= \sqrt{gh}, & f &= \frac{g}{c} \sqrt{\frac{x_0}{h}} \\
 p_1^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(f^2 - \frac{4c_0^2}{u_0^2} \sigma^2 \right)^2 + \left(\frac{4c_0^2}{u_0^2} f \sigma \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(f^2 - \frac{4c_0^2}{u_0^2} \sigma^2 \right) \\
 q_1^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(f^2 - \frac{4c_0^2}{u_0^2} \sigma^2 \right)^2 + \left(\frac{4c_0^2}{u_0^2} f \sigma \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(f^2 - \frac{4c_0^2}{u_0^2} \sigma^2 \right) \\
 p_2^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(f^2 - 16 \frac{c_0^2}{u_0^2} \sigma^2 \right)^2 + \left(\frac{8c_0^2}{u_0^2} f \sigma \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(f^2 - 16 \frac{c_0^2}{u_0^2} \sigma^2 \right) \\
 q_2^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(f^2 - 16 \frac{c_0^2}{u_0^2} \sigma^2 \right)^2 + \left(\frac{8c_0^2}{u_0^2} f \sigma \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(f^2 - 16 \frac{c_0^2}{u_0^2} \sigma^2 \right)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.23)$$

である。

以上楠氏と岡本氏の解に於て見られる如く、両者に就き次の事が云ひ得る。

- (1) 楠氏の近似解では、運動方程式中 $v \frac{\partial v}{\partial x}$ を省略し、更に u を h に比して甚小と假定して居るので、實際の場合には水深數米に對し u が 1 米内外もあると云ふ場合も少くないので、此の場合には不都合である。
- (2) 岡本氏の解は (1) の如き場合は實際に近いと考へられるが、實際上は計算が非常に厄介になるので不便である。

第 2 章 感潮河川に對する計算

第 1 節 楠、岡本兩氏の解の數値に依る比較

兩氏の解を解析的に比較する事は困難であるので、數値を代入し各場合に就き比較して見る。楠氏の近似解は省略が爲されてゐるが數式の取扱上は岡本氏の解より餘程便利である。そこで兩者の解に於て差が小さければ實用上便利なる楠氏の解を採用すれば良い事となる。

計算上次の如く假定して置く。

$$c = 50 \text{ m-sec 單位, 潮汐の週期 } T = 12 \text{ 時間}$$

$$\text{河川の幅 } b = 100 \text{ m, 勾配 } I_0 = 1/1000, a = 1 \text{ m.}$$

先づ各種水深 (h) の場合に最高水面を比較する。

(1) $h = 1 \text{ m}$ なる場合。

即ち $u_0 = 1.58 \text{ m/sec}$ で、之れに就き計算し比較すれば圖-2 に示す如くなる。此の場合は楠氏の近似解の適用範圍でないので兩者は相當の開きがある。此の點に就ては後に述べる。

(2) $h = 2 \text{ m}$ なる場合。

即ち $u_0 = 2.24 \text{ m/sec}$ なる場合で圖-3 に示す如くなる。

(3) $h = 5 \text{ m}$ なる場合。

即ち $u_0 = 3.54 \text{ m/sec}$ なる場合で、圖-4 に示す如くなる。

(4) $h = 10 \text{ m}$ なる場合。

$u_0 = 4.77 \text{ m/sec}$ なる場合で圖-5 に示す如くなる。

(5) $h = 20 \text{ m}$ なる場合

$u_0 = 5.98 \text{ m/sec}$ なる場合で圖-6 の如し。

第2節 定流の場合との比較

感潮河川の最高水位と従来比較よく研究されて居る定流の背水曲線とを比較して見る。之も式の上では v の比較は困難であるので数値に依り比較する。背水公式としては物部長穂博士の合理的解法¹⁾ を使用して見た。物部氏の式に於て $R = h$ と假定すれば $r = 3$ となるから、之に依り H_0 が種々の値を取る場合に就いて感潮河川の水深と比較する。條は前と同じく $c = 50$, $b = 100 \text{ m}$, $I_0 = 1/10000$ とする。

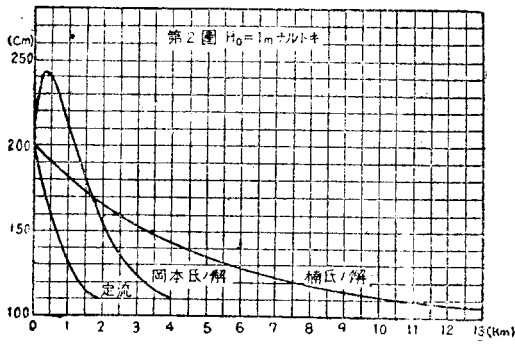


圖-2

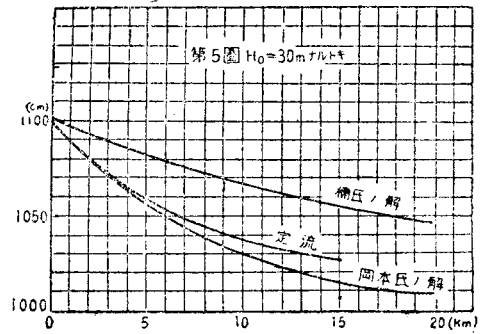


圖-5

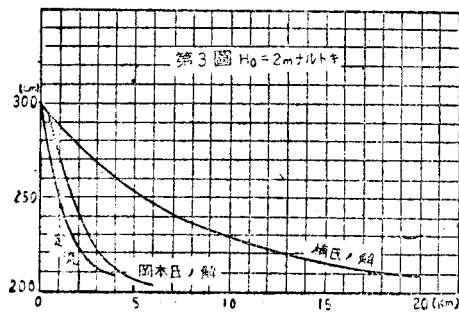


圖-3

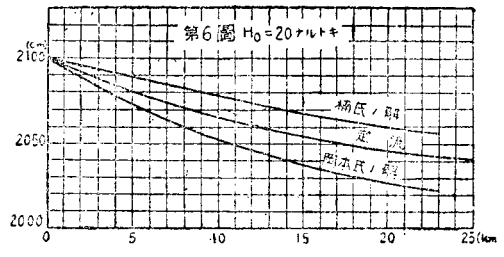


圖-6

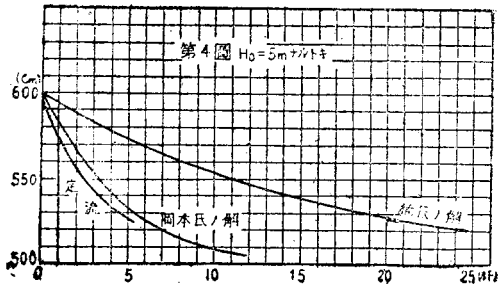


圖-4

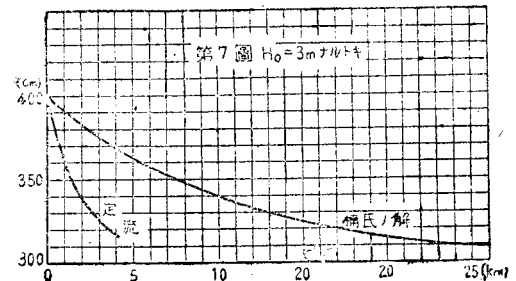


圖-7

- (1) $H_0 = 1\text{ m}$ なる時 圖-2 (4) $H_0 = 5\text{ m}$ なる時 圖-4
 (2) $H_0 = 2\text{ m}$ なる時 圖-3 (5) $H_0 = 10\text{ m}$ なる時 圖-5
 (3) $H_0 = 3\text{ m}$ なる時 圖-4 (6) $H_0 = 20\text{ m}$ なる時 圖-6

第3節 前2節に對する考察

第1章及び主として前2節に於て述べた理論並に計算値に對して考察して見る。

(1) (1.8) 式より明かなる如く、 ζ は振幅に比例する。

故に基本の振幅に對して計算して置けば α の變化に對しては差支へない。岡本氏の解の場合には簡單にそうは云へない。第2分素は α^2 に比例するからである。然し一般に第2分素は小さいので大體に於て α に比例するとしてよいと思ふ。

(2) 又 (1.8) 式に於て、 α は波の振幅で符號には關係せず、又 $e^{-\alpha x}$ は常に正であるから ζ の性質は次の如くなる。

$\alpha t - \beta x$	cos の性質	ζ の性質	摘 要
$0 \sim \pi/2$	正	正	平均水位以上の波を正とす
$\pi/2 \sim \pi$	負	負	
$\pi \sim 3/2\pi$	負	負	
$3/2\pi \sim 2\pi$	正	正	

(3) h が大になれば、 ζ は減衰し難くなる。

之は (1.9) 式に依り、 $R=h$ としてゐるから、 α は h が大になれば減少し、従つて ζ は減衰し難くなる。岡本氏の解の場合には何れになるか理論式からのみでは斷言出来ない。之を計算値に依つて見れば圖-2~圖-7 に見る如く確かに楠氏の解と同様 h が大になれば ζ は減衰し難くなる事を示してゐる。

即ち深い水路では上流迄減衰しない事になる。

(4) h が小なる場合を除き岡本氏の解は常に楠氏の近似解より ζ は小である。之は圖-2~圖-6 に依り明瞭である。

(5) h が小なる時は ($h=1\sim 2\text{ m}$ の時) 岡本氏の解に依る ζ は楠氏のものよりも大きくなる事があり、又 $h=1\text{ m}$ の時は ζ は 1 m より大きくなる事がある。($\alpha=1\text{ m}$ の時) 圖-2 圖-3 に依り明らかである。

(6) 楠氏の解は常に ζ が定流の場合よりも上にある。之も圖-2~圖-7 に依り明らかである。

(7) 岡本氏の解は $h=1\sim 10\text{ m}$ の時は定流よりも上にある事もあるが (之も x が大になれば即ち充分上流では定流の方が上になる) h が此の程度以上になれば常に定流以下になる。

此の點に就いて考へて見れば水面は常に定流時の背水曲線に近付かうとするが、一方底勾配を有してゐる水路を長波が遡行するのであるから傳播と共に振幅は増大する傾向がある。此

の二つの性質を共有してゐるのであるが第1の性質は上流に進むに従つて振幅を減少せしめる傾向のものであるから、之等の二性質は相反する性質と云ひ得る。従つて實際の水面はその中間の性質を現はし潮の影響は背水曲線より想像されるよりも更に上流に迄及ぶものと考へられる。即ち定流の場合より減衰し難い。

(8) 楠氏の解は過大で、岡本氏の解は過小であると思はれる。

$h=5m$ 以下ではこの影響が相當あるも a に比し h が大になれば楠氏の解でよいと思はれる。(7) に於て述べた理由に依り、楠氏の解の方が眞に近いと思はれる。然し之れは實測値に依り比較して見なければ判らない。

(9) 岡本氏の解と定流の場合の背水曲線とは凡の場合よく相似してゐる。

第4節 Chézy の係數 c の異なる場合

河川の粗度係數の變化に於て河川潮汐は如何となるかを調べて見る。既に $c=50$ なる場合に就いては計算を行つたので今 $C=30$ なる場合に就いて計算して比較する事とする。勾配、潮波の振幅等は凡て前と同様とする。

(1) $h=1m$ なる場合、圖-8。 (2) $h=5m$ なる場合、圖-9。

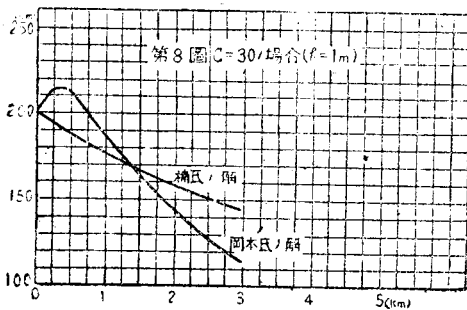


圖-8

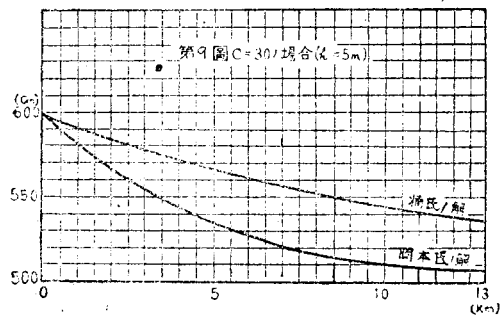


圖-9

以上の圖より次の事が考へられる。

$h=1m$ の時は $C=50$ の場合より減衰し易くなる。 $h=5m$ の時は減衰が悪くなる。又 $h=1m$ の時は圖-8 に依り $C=50$ の時より振幅の最大が小さくなり、又下流にずれる事が判る。

倍潮の最大は計算に依れば $h=1m, 5m$ の時共に $C=50$ の場合と大體同じ所で生ずる。

又岡本氏の解の第一分素は $C=30$ の方が 50 の場合より大きくなる。減衰率の問題に就き考へて見れば、潮汐の河川を得る速度は大體 $\sqrt{gh} - u_0$ である。 C が小であれば u_0 が小さくなり、全體として速度が増すので運動のエネルギーは増大し、位置のエネルギーは減少して C が小さい方が減衰し易くなるであらうと思はれる。

\sqrt{gh} の方は即ち波に依る速度は C に影響される事が少い。何故なれば \sqrt{gh} の方は f に関係があり、之の變化は楠氏の式に依れば $\sqrt{\cos\theta} / \cos\frac{\theta}{2}$ の函數として變り、 f が θ の變化となる。

之の θ は何れの場合でも大體 90° に近いものであるから $\cos\theta$ の變化は小さく更に之が平方

根の中に入つてゐるので C に依る変化は餘りない。又 $\cos \frac{\theta}{2}$ は θ が 90° 附近では之も変化が小さくなる。故に u_0 程には C が影響を與へない。

此の點に就いては第3章第2節に説明せる所に依つても明らかである。

第5節 或る瞬間に於ける潮波の波形

或る瞬間に於ける水位曲線を楠、岡本兩氏の方法に依つて求める。河川の幅 $b=100$ m, Chézy の係数 $c=50$, 勾配 $I_0=1/1000$, 河口に於ける潮波の振幅 $a=1$ m, $t=0$ とす。

(1) $h=1$ m, 圖-10, (2) $h=5$ m, 圖-11.

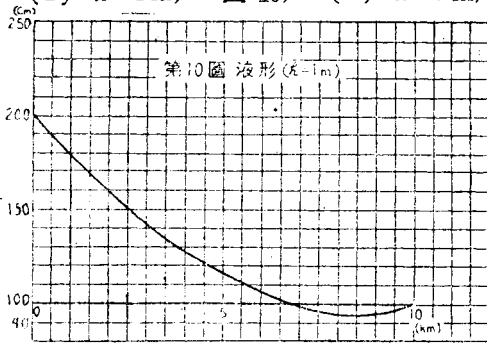


圖-10

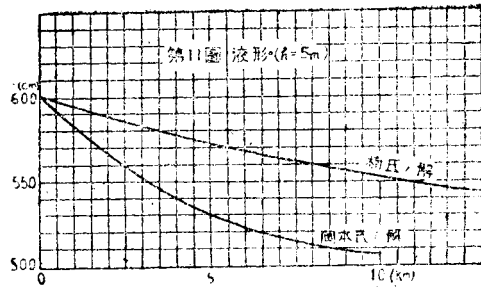


圖-11

以上に依り、水深 h が大になれば波長 λ は長くなつて來る事が判る。

第3章 鐘口狀河口に於ける河川潮汐

第1節 鐘口狀河口に於ける河川潮汐の理論

之は嚴密解を求むる事が困難であるので、直線狀且つ幅一定なる場合の楠氏の近似解より導く。此の場合に於ても河川の中心線は直線狀をなすものとす。

流水の運動方程式は第1章 (1.5) 式と全く同様であるから、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + fu + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

此の場合 x は河の流れの方向即ち下流向の方向にとり、 h, ζ は前と同様に採る。

次に連続の方程式は質量不變の法則より次の如くなる。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (Au)}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

但し A は斷面積である。

故に $A=b(h+\zeta)$ であるから之を (3.2) 式に代入すれば

$$\frac{1}{(h+\zeta)} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{u}{(h+\zeta)} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{u}{b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

となる。茲に於て h に比して ζ は甚だ小であるから $h+\zeta=h$, $\frac{\partial h}{\partial x}=0$ である。又 $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ は $\frac{\partial h}{\partial x}$

に比して小であるから (3.3) 式は次の如くなる。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{u \cdot h}{b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (3.4)$$

之が連続の方程式である。

(3.1), (3.4) 式より u を消去すれば

$$-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{gh}{b} \cdot \frac{\partial b}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} - f \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (3.5)$$

となり、之が断面の變化する場合の感潮河川の方程式である。

此の式に水路の形状を示す式を入れれば良い譯であるが、水路幅が上流に向つて漸近的に縮小して一樣幅 b_0 に近づく様に $b = b_0 + b_1 e^{px}$ ($p > 0$) と置けば (3.5) 式は積分困難となるので、今簡単に $b = b_1 e^{px}$ ($p > 0$) とする。即ち水路幅は上流に向つて漸減して幅 b が 0 に近づく様な形状とす。又勾配 $i = I_0 = \text{const.}$ とす。

依つて (3.5) 式は次の如くなる。

$$-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + gh \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + gh p \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} - f \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (3.6)$$

茲で第1章と同じく河口 ($x=0$) の波高

$$\zeta|_{x=0} = a \cos \sigma t \dots\dots\dots (3.7)$$

に應ずる (3.6) 式の解を求むれば

$$\zeta = a e^{-\alpha x} \cos(\sigma t - \beta x) \dots\dots\dots (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し、} \quad \alpha &= \frac{1}{2} \left(p + \frac{f \sigma}{c_0^2 \beta} \right) \\ \beta &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{c_0} \left\{ (4\sigma^2 - c_0^2 p^2) + \sqrt{(4\sigma^2 - c_0^2 p^2)^2 + 16f^2 \sigma^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.9)$$

となり鐘口状河口に於ける潮汐に依る波高が求められる。更に速度に就いても同様にして求められる。

然し之は近似式であるから次の點に注意する必要がある。

- (1) 水深 h は x の函数でないとしてゐるので、鐘口状河口の場合には定流に於ても h が變化するから、その變化を無視し得る程度に水深が充分深く、且つ勾配 I_0 が小である事が必要である。
- (2) 楠氏の近以解と同様に河口に於ける波高 a に比して水深 h が充分大なる事が必要である。
- (3) 水路の形状が ($-x$) が ∞ となれば 0 となるから或る範圍迄此の方法を使用して以後は楠氏に依つて幅が一定なる水路に變化せしめれば一般感潮河川の問題が解決される事になる。

第2節 河幅の變化しない場合との比較

河幅が、鐘口状河口の河川の場合には、漸減するから河幅一樣の場合に比較して潮波の振幅の減衰の悪い事が想像される。之は河幅の漸減に依る爲の潮波のエネルギーの集約の爲めである。

之の事を前節の理論式に依つて楠氏の解と數値に依り比較して確かめる。

前節に於て $b_1=100\text{m}$, $a=1\text{m}$, $i_0=1/1000$ として $h=5\text{m}$, 20m の二つの場合に就いて比較する。

但し水位曲線 v は鐘口状河口を有する幅一様ならざる河川に於ては h の變化が入つて來るが、此の h の變化は前節に於て無視して式を作製して居り、更に今問題としてゐるのは振幅の變化 v 即ち河川固有流の水位よりの上下の水位變化を問題として比較するのであるから h の變化は考へない事とする。

(1) $h=5\text{m}$ なる場合

(a) $p=0.000005$ なる時 圖-12. (c) $p=0.0001$ なる時 圖-14.

(b) $p=0.00001$ なる時 圖-13. (d) $p=0.0005$ なる時 圖-15.

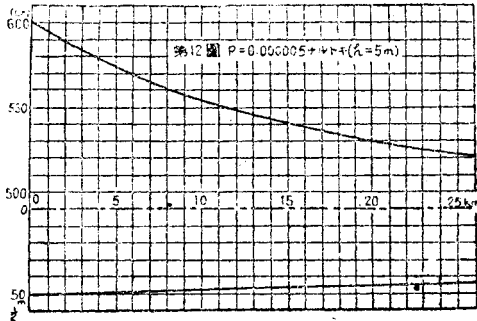


圖-12

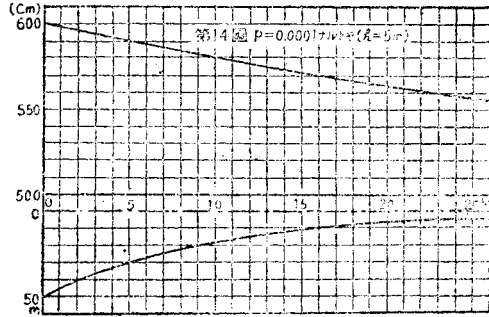


圖-14

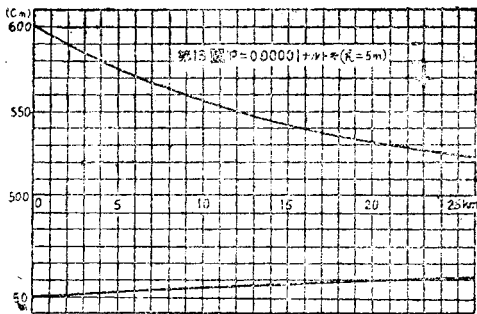


圖-13

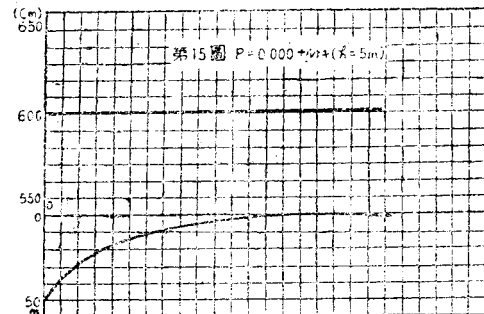


圖-15

前に計算せる (a), (b), (c) の如き場合には $\alpha < 0$ であるから幅一様の場合に比較して減衰は悪いが兎に角減衰したが此の場合には $\alpha > 0$ となり全く減衰なくなり、反つて上流に進むに従つて潮波の振幅は増大する事になる。

次に此の場合より判る如く (c) と (d) との場合の中間に $\alpha=0$ なる場合が存在する。此の時に上流迄潮波の振幅は減衰、増大共になく河口に於ける振幅の儘で進む。此の時の p を p_c とし、は之が限界となる。次に此の p_c を計算して見る。

(c) 上流迄振幅の増減しない場合. ($p=p_c$ なる時)

此の場合には $\alpha=0$ であるから (3.9) 式より

$$p_c = -\frac{f\sigma}{c_0^2\beta}$$

となり之に (3.9) 式より β を計算して代入すれば

$$p_c = \frac{f}{c_0} (p > 0 \text{ としてゐる}). = \frac{\sqrt{gI_0}}{ch} \dots\dots\dots (3.10)$$

となる。此の式を見れば p_c は σ には無関係であり、波の性質には全く無関係である事が判る。單に河川の形状、性状に依つてのみ變化する。又 p_c は水深 h 並に Chézy の係數 c に逆比例する。此の事より h が大になれば p_c は小さくてよい事になり $a/h=20$ の如き場合に $a/h=5$ の如き場合に比較して減衰し難くなる事とよく合致する。又 Chézy の係數 c の小さい時には p_c は大とならねばならぬ。即ち c が小さくなれば減衰の良くなる事を示してゐる。

第2章第4節に計算せる如く c が小さくなれば減衰が良くならねばならぬ。故に前の推論の正しかつた事を示してゐる。

水面勾配は平方根に比例するから I の變化は餘り影響がない。

次に $h=5m$, $I_0=1/1000$, $c=50$ なる場合に就き計算して見れば $p_c=0.00039598$ となる。之の場合の河幅 b を示せば圖-16 の如くなる。

次に $h=5m$ なる時の p と α との關係を示せば圖-17 の如くなる。

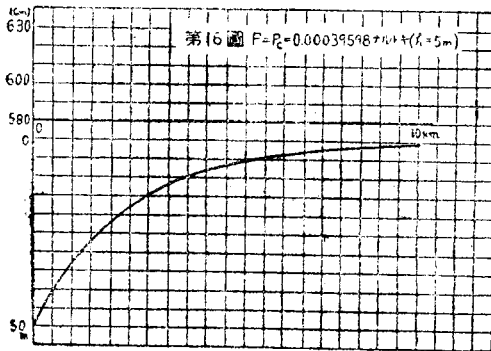


圖-16

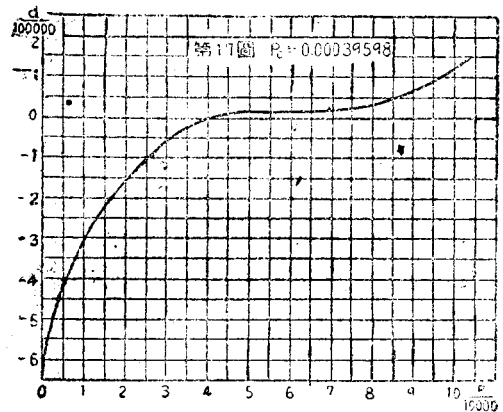


圖-17

$p=0$ なる時は楠氏の解と一致する。又 $h=5m$ なる時は $p=0.000005$ 程度では $p=0$ の場合と α の値は殆んど變らなくなる。故に $p=0.000005$ 以下では河幅一様として計算して差支へない事が判る。

(2) $h=20m$ なる場合

(a) $p=0.00001$ なる時 圖-18

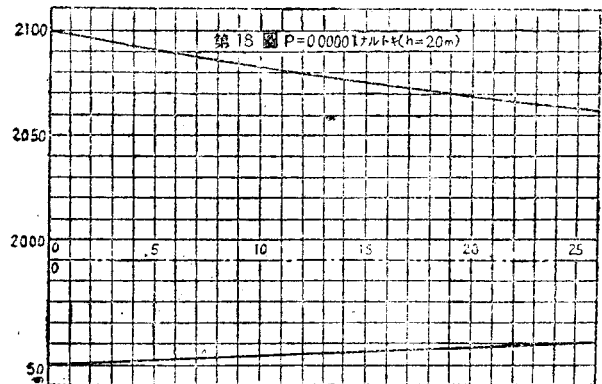


圖-18

第3節 定流の場合との比較

1°. 鐘口状河口に於ける水流の理論

中心線が直線状をなす開水路に於ける流水の運動を表はす基本方程式は次の如くである。

$$-i + \frac{\partial h}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{c^2} \frac{w}{A} + \frac{1+2\eta}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\alpha-1-2\eta}{g} \left(\frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{qv}{A} \right) = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(Av)}{\partial x} - q = 0 \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

(3.11) 式は運動方程式、(3.12) 式は連続方程式である。

茲に用ひた記號の定義は

v : 任意断面中の x 方向の平均流速、茲に x は下流向にとる。 c : Chézy の常数 w : 断面の潤邊長、 A : 断面積、 h : 水深、 q : 水路の單位長當りの側壁よりの流入量。

$$\alpha' = 2\alpha - 1 - \eta$$

側壁よりの流入量のない場合を考へるから $q=0$ である。

既に感潮河川の場合は計算してあるから次の如き形状の水路の場合の鐘口状河口に於ける定流の問題を考へる。

$$i = i_0 = \text{const}, \quad b = b_1 e^{px} \quad (p > 0)$$

即ち水路幅は漸次上流に向つて縮小して零に近付く。此の時の運動方程式は水路の断面を廣矩形と假定すれば (3.11) 式より

$$-i + \frac{dh}{dx} + \alpha' \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{v^2}{c^2 h} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

連続方程式は

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dx} + \frac{1}{b} \frac{db}{dx} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

であるが更に一つの條件として

$$Q = hbv = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

として、此の Q 値を與へる。之は一つの限界條件を支へたと同じである。(3.14) 及び (3.15) 式を (3.13) 式に代入すれば

$$\frac{dh}{dx} \frac{i_0 - \frac{v^2}{c^2 h} + \frac{\alpha' v^2}{gb}}{1 - \frac{\alpha' Q^2}{gh^3 b^2}} = \frac{i_0 - \frac{Q^2}{c^2 h^2 b^2} + \frac{\alpha' Q^2}{gh^2 b^3}}{1 - \frac{\alpha' Q^2}{gh^3 b^2}} \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

$\frac{db}{dx}$ は既知量であつて此の場合は $pb_1 e^{px}$ である。(3.16) なる微分方程式は積分不能の形であるが、或る断面に於ける h の値を知れば

又は

$$\Delta h = \Delta x \frac{i_0 - \frac{Q^2}{c^2 h^3 b^2} - \frac{\alpha' Q^2}{g h^3 b^3} \frac{db}{dx}}{1 - \frac{\alpha' Q^2}{g k^3 b^2}} = \Delta x \cdot f(x, h)$$

$$\Delta h = \Delta x \frac{i_0 - \frac{v^2}{c^2 h} + \frac{\alpha' v^2}{g b} \frac{db}{dx}}{1 - \left(\frac{h_c}{h}\right)^3} = \Delta x \cdot f(x, h, v)$$

..... (3.17)

但し

$$v = \frac{Q}{hb}, \quad h_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha' Q^2}{g b^2}}$$

として Δx に対する Δh を計算し、 $x + \Delta x$ に於ける h の値を $h + \Delta h$ として順次に各断面に於ける h を計算し得る。然し断面の變化が稍甚しい時には c の値も之に相當して變化せしめる必要がある。

上式に依り數値計算を行ひ感潮河川の場合と定流の場合との比較を行ふ。

2° 數値に依る比較

先づ定流の場合に就き次の如き場合に就いて計算を行ふ。但し河床勾配に依る水面變化は定流の場合も感潮河川の場合も共に $-i_0 x$ であるから省略する事とする。

$$b = 100 e^{0.00102x} m, \quad i_0 = 1/1000, \quad c = 50 m-sec \text{ 單位}, \quad \alpha' = 1.1$$

又河口に於て水位 h を 6m に保たしめるから $Q = 1767.78 m^3/sec$ である。然るに $g/\alpha' c^2 = 1/280.6$ であるから $i_0 < g/\alpha' c^2$ の場合に相當する。即ち充分上流では常に常流状態を呈してゐる。

之を計算すれば 圖-19 の如くなる。

次に感潮河川の場合には前節 1°(b) に於て計算せる如くであるが、之は波の振幅の變化のみであり、更に鐘口狀河口の場合には潮波の侵入しない自然状態に於ても水面變化があるから之を計算しなければならぬ。之を計算し兩者を比較すれば圖-19 に示す如くなる。

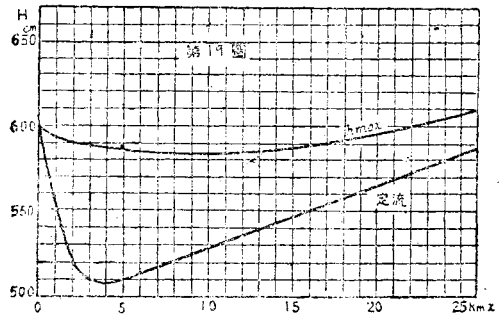


圖-19

次に第 2, 3 節に於て計算せる結果に對して考察して見る。

第 2 章第 3 節 7 に於て述べた理由の上に更に幅の減少の條件が加はるので此の場合には前の幅一樣の場合に比して更に減衰し難くなる事が豫想され、實際の計算上もさうなる。

計算例が僅か一つであつたが、背水よりも上流迄潮波の廻る事を示してゐる。

第 4 章 汚水流下の問題

第 1 節 流下狀況の計算

一般に感潮河川では逆流を生ずるから、河川に排出されたる汚水は此の逆流の爲めと更に水面勾配が一般に小であるために海に排出されないで河川中を浮遊し都市衛生學上の問題をなしてゐる。

る。之は一般に都市は水邊に發達し來つたものであり、更に水運を利用する關係上勾配の緩かな河川に臨むことが多い。此の場合大抵此の河川は感潮河川であるからである。

此の問題に就き例に依つて汚水流下狀況を明らかにして見る。

$$h=2m, \quad I=1/5000, \quad c=30, \quad a=2.5m, \quad b=100m$$

なる場合に就き計算する。

一般に半週期間の流下距離は週期を T とすれば

$$\int_0^{T/2} u(x, t) dt = L \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

で與へられるが楠氏の近似解に依つても岡本氏の解に依つても x と t とは全く獨立であるので上式の積分は不可態である。

そこで微小距離を Δx , 微小時間を Δt とすれば

$$\begin{aligned} u(x, t) \Delta t &= \Delta x_1, \\ u(x + \Delta x_1, t + \Delta t) \Delta t &= \Delta x_2, \\ u(x + \Delta x_1 + \Delta x_2, t + 2\Delta t) \Delta t &= \Delta x_3, \\ &\dots\dots\dots \\ u(x + \Delta x_1 + \dots + \Delta x_n, t + n\Delta t) \Delta t &= \Delta x_{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{となり} \quad - \quad n\Delta t \text{ 時間後の移動距離} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

となるから之より移動距離を計算する。

然し之では Δt を小さく取らなければならぬから Δt 時間の移動距離を

$$1/2\{u(x, t) + u(x + \Delta x_1, t + \Delta t)\} \Delta t = \Delta x_{11}$$

更に

$$1/2\{u(x + \Delta x_{11}, t + \Delta t) + u(x + \Delta x_{11} + \Delta x_2, t + 2\Delta t)\} = \Delta x_{22}$$

.....

の如くして

$$L = \Delta x_{11} + \Delta x_{22} + \dots + \Delta x_{nn} \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

より L を計算する。

更に内挿法等に依つて行へば一層正確になる譯であるが、此所では (4.3) 式に依り計算する。

扱、茲で $u(x, t)$ が問題となる。

楠氏の流速の式は (1. 10) 式に示す如く河口に於ける潮流の最大流速が判らなければならない。之は今の場合未知である。故に之から求めることは出来ない。

其所で楠氏の波高に依る流速の算定の方法¹⁾に依る事にする。此の式を示せば

$$v = c \sqrt{(h \pm a \cos \sigma t) \frac{c u_0}{g} \tan \theta + a \cos \left(\sigma t + \frac{\theta}{2} \right)} \sqrt{\frac{g \cos \theta}{h \pm a \cos \sigma t}} \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

但し楠氏は 實際に計算する場合上式中の $u_0 \sigma \tan \theta / g = i$ を求むる際、 u_0 を河川固有流の流速を取らず、其の點の其の時刻の v (實測値) を取つてゐる。即ち v を求むるにその函數内に v を入

れてゐる。之は不都合であるから、岡本氏の解法に依る μ を用ひて計算することとする。

此の式は前の如き矛盾を含まないけれども計算は相當厄介である。

今、出發點として $x=20,000\text{m}$, $t=0$ とし計算するが $z(x, t)$ を求むる際第二、第三分素は第一分素に比して小さく、且つ之は計算が相當厄介になるし、又 Δx を求むる際相當の誤差を生ずるので之は省略する事とする。

之を計算し、流下狀況を示せば圖-20 に示す如くなる。

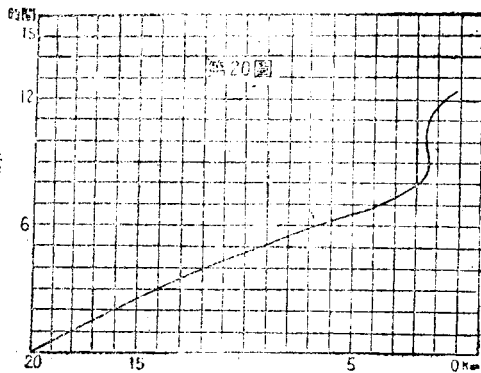


圖-20

同圖より見れば、逆流を生ずる事が非常に少なかつた。之の理由としては、一般に水面勾配は感潮部に於いては更に緩かなものであり、又潮汐の影響は岡本氏の解に依つて與へられるより更に大なる影響を有するものであらうと思はれる。楠氏の解に依り計算すれば更に影響は大であらうと思はれるが、之には河口に於ける U を知る必要がある。

結 語

以上色々計算し來つたが全ての場合に於て水面勾配が急に過ぎた傾向がある。一般に楠氏の解の方が岡本氏の解に比して影響が大きく表はれる事が判つた(水深小なる時には例外はあるが)。背水との關係は大體に於て感潮河川の最高水位の方が高くなる。之は鐘口狀河口の場合も同様である。

鐘口狀河口の場合も甚だ例が少なかつたが幾分性質が究明された。

尙以上の計算は凡て抵抗を一次(速度の)の形で入れてゐるが之を二次の形にした場合に就いて調べて見る積りであつたが問題が相當困難となるため短時日中に爲し得ず省略する事とした。

(昭 19. 10. 14 受付)