

に四邊を固定された正方形版の基本振動形の 2π 秒に於ける振動數 f は、 $s^4 = (3.6461)^2 = 13.2940$ であるから、 $s^4 = \frac{\rho h a^4 p^4}{D \cdot \pi^4} = 13.2940$ となる。この値は友近博士が Weinstein の方法にて求めた値と同一である。

素堀坑の強さに関する弾性學的考察 (下)

正 員 岡 本 舜 三

A study of the stress distribution around a tunnel without lining, from the view of the theory of elasticity (2)

By Sinzo-Okamoto, C. E., Member

第3章 龜裂の進行方向に関する考察

第1節 圓形の孔ある寒天土供試體の龜裂

(I) 壓縮試験

龜裂の出来る方向を検討するために圓形の孔をもつ寒天土供試體の壓縮試験を行う。幅 11.5 cm, 高 16.5 cm, 厚 4.0 cm の角錐形試體の中央に直徑 5.3 cm の圓形の孔をうちぬき、これを高

さの方向に壓縮する、寒天土はこれまでに用いたものと同じである、供試體の側方は開放され裏と表は鋼板と硝子板で固定されている。寒天土の表面には 1.0 cm 間隔の平行線をひき變位を見易くしてある、圖-9 は發生せる龜裂であつて同じ條件で 3 回 (a) (b) (c) 繰返した寫眞である。(1) は龜裂が最初に認められたときを示し、(2) は更に壓縮を繼續するとき、新たなる龜裂が供試體の外側から出來て、圓孔にまで達する狀況を示すもの

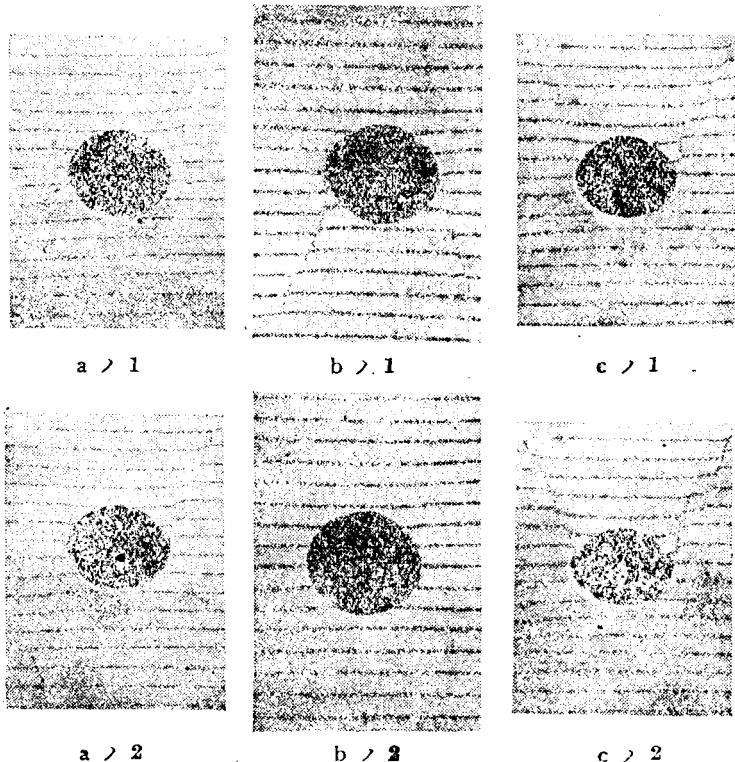


圖-9

である。龜裂の出来る過程をみると (1) まち孔の側壁の中央部から外側に向つて斜上向に龜裂が出来る。その形は直線に近く、終點の位置は孔の頂よりやや高い。これを龜裂 I とする (---10)。 (2) 更に壓縮を續けると新しい龜裂が供試體の外側と龜裂 I の終點附近とほぼ直線状に結んで出来る。これを龜裂 II とする。II の方向は加壓の方向と約 30° の傾をなす。 (3) 龜裂 I と II が連絡せる後は寒天土はこの面にそつて滑り、それと共に龜裂 I はおしつぶされ、新に I より僅かに外側に龜裂 I' が出来て I' と II とが滑り面となつて大きな滑り運動がおきる。このときおしつぶされた I は最早見えない。同じ實驗を 3 回繰返した結果では龜裂 I は加壓の方向に對して夫々 9°, 5° 及 7.5° 傾いているのが認められる。

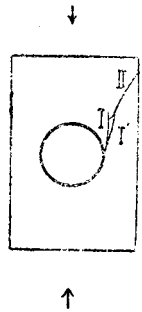


圖-10

(II) 彈性論による應力

圖-12 の如く座標をとれば圓孔ある 2 次元彈性體の一方向への壓縮による應力は次式となる。

$$\sigma_r = \frac{p}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left\{ 1 + \left(1 - \frac{3a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p}{2} \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\}$$

$$\tau = -\frac{p}{2} \left(1 + \frac{2a^3}{r^3} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta$$

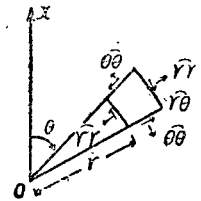


圖-11

但 p は加えられたる壓應力、 a は圓孔の半徑である。この式より計算せる應力を表-8 に示す。

(III) 龜裂の位置と應力分布との關係

Coulomb の説によれば τ と $(\sigma + c \cot \varphi)$ との比が寒天土の内部摩擦係數 $\tan \varphi$ になれば破壊の條件が充される。壓力 p が小さい間は凝集力の影響が大ききいて、この比は $\tan \varphi$ より小さいが、 p が増すとこの比も増し、最初に側壁の中央部で $\tan \varphi$ に達する。更に p を増すと、その點の附近一帯でもこの比が $\tan \varphi$ になる。(このような既に破壊の條件を計算上充している區域を破壊可能區域と便宜上名付ける)

表-8 から、各點について破壊條件

$$\frac{\tau}{\sigma + c \cot \varphi} = \tan \varphi$$

が満足されるようになる時の壓力 p の値を定める事が出来る。この p の値について等値線を畫くと圖-12 の如くなる。圖では $\varphi = 30^\circ$ とし最も危險なる位置、即ち側壁中央部がまず上記の條件を充すようになるときの p を單位にとつてあ

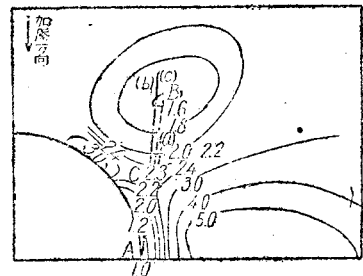


圖-12

る。 $p = 2, 3, 4, \dots$ なる時、上記の條件を充すに至る點を結んだのが圖の等値線である。(このような圖を便宜上等破壊壓力線圖と名付ける。) 壓力が $p = 1$ になると側壁の中央部 A が破壊の條件を充し、壓力 p がますます A 點の附近に破壊可能區域がひろがる。 $p = 1.6$ になると、この區域

表-8

θ a/r		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
		σ_r	1.00	0.00	0.00	0.60	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.95	-0.03	-0.03	-0.07	0.01	0.03	0.05	0.09	0.11	0.13	0.13
	0.90	-0.04	-0.03	-0.01	0.03	0.07	0.12	0.16	0.20	0.22	0.23
	0.85	-0.02	-0.01	0.01	0.06	0.11	0.17	0.22	0.26	0.29	0.30
	0.80	0.01	0.02	0.01	0.10	0.15	0.21	0.26	0.31	0.34	0.35
	0.75	0.07	0.08	0.05	0.14	0.19	0.24	0.29	0.32	0.36	0.37
	0.70	0.14	0.14	0.12	0.20	0.24	0.27	0.32	0.35	0.37	0.37
	0.65	0.21	0.22	0.16	0.25	0.23	0.30	0.33	0.35	0.36	0.37
	0.60	0.29	0.30	0.23	0.31	0.32	0.32	0.33	0.34	0.34	0.35
	0.55	0.38	0.38	0.30	0.36	0.35	0.34	0.33	0.32	0.32	0.32
	0.50	0.47	0.46	0.37	0.42	0.39	0.36	0.33	0.30	0.29	0.28
	0.40	0.64	0.62	0.45	0.53	0.46	0.38	0.31	0.26	0.22	0.20
	0.30	0.79	0.76	0.58	0.62	0.51	0.40	0.29	0.20	0.15	0.12
σ_t	1.00	-1.00	-0.88	-0.53	0.09	0.65	1.35	2.00	2.53	2.88	3.00
	0.95	-0.77	-0.67	-0.37	0.09	0.65	1.25	1.81	2.04	2.52	2.67
	0.90	-0.58	-0.47	-0.23	0.16	0.65	1.16	1.65	2.04	2.30	2.39
	0.85	-0.42	-0.34	-0.12	0.22	0.54	1.08	1.50	1.84	2.07	2.14
	0.80	-0.27	-0.03	-0.03	0.26	0.63	1.01	1.35	1.67	1.87	1.93
	0.75	-0.17	-0.13	0.03	0.29	0.61	0.95	1.29	1.53	1.70	1.76
	0.70	-0.12	-0.06	0.09	0.31	0.60	0.89	1.18	1.40	1.55	1.65
	0.65	-0.06	-0.01	0.12	0.33	0.51	0.84	1.10	1.30	1.43	1.48
	0.60	-0.01	0.03	0.15	0.33	0.56	0.80	1.03	1.21	1.33	1.37
	0.55	0.01	0.05	0.16	0.33	0.54	0.76	0.97	1.14	1.25	1.29
	0.50	0.03	0.06	0.17	0.33	0.52	0.73	0.92	1.08	1.18	1.22
	0.40	0.04	0.07	0.17	0.31	0.49	0.67	0.85	0.99	1.09	1.12
	0.30	0.03	0.06	0.15	0.23	0.46	0.63	0.88	0.94	1.03	1.06
τ	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	0.95	0.00	0.06	0.12	0.16	0.18	0.18	0.16	0.12	0.06	0.00
	0.90	0.00	0.11	0.21	0.28	0.32	0.32	0.28	0.21	0.11	0.00
	0.85	0.00	0.15	0.23	0.33	0.43	0.43	0.38	0.23	0.15	0.00
	0.80	0.00	0.18	0.34	0.46	0.52	0.52	0.46	0.38	0.18	0.00
	0.75	0.00	0.20	0.38	0.51	0.58	0.58	0.51	0.38	0.20	0.00
	0.70	0.00	0.22	0.40	0.55	0.62	0.62	0.55	0.40	0.22	0.00
	0.65	0.00	0.22	0.42	0.57	0.64	0.64	0.57	0.42	0.22	0.00
	0.60	0.00	0.23	0.43	0.58	0.66	0.66	0.58	0.43	0.23	0.00
	0.55	0.00	0.23	0.43	0.58	0.66	0.66	0.58	0.43	0.23	0.00
	0.50	0.00	0.22	0.42	0.57	0.65	0.66	0.57	0.42	0.22	0.00
	0.40	0.00	0.21	0.40	0.54	0.61	0.61	0.54	0.40	0.21	0.00
	0.30	0.00	0.20	0.37	0.50	0.57	0.57	0.50	0.37	0.20	0.00

とは離れて孔の肩の内部 B 點に破壊の條件を満足する點があらわれ、壓力を増すと B を中心とする別の破壊可能區域がひろがる。 $p=2,3$ になるとこの2個の區域は C に於て接觸し今迄 2

個の塊状の區域にわかれていた破壊可能區域は急に ACB の方向に長いひさびさの如き形となる。その結果 ACB 線をはさんで両側には破壊し難い區域が残ることになる。等破壊壓力線圖上に實驗であらわれた龜裂 I を記入すると(圖-13 破線) AC にほぼ一致しているのが認められる。

第2節 尖頭形の孔ある寒天土供試體の壓縮による龜裂

A' 形の孔(高 7.2cm, 巾 5.0cm) がある供試體についても同様な實驗を行ひ、龜裂の位置と等破壊壓力線圖とを比較して見ると、同圖上の ACB を連ぬる線の兩側に破壊しにくい地帯があり、この線に沿つて龜裂が出来ることが認められる。この結果は圓形孔の場合と同様である。圖-13 は龜裂の位置、表-9 は應力の値圖-14 は等破壊壓力線圖である。

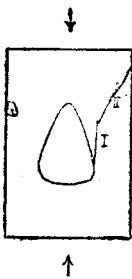
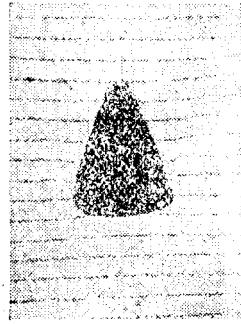


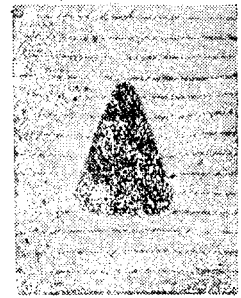
圖-13 (1)
壓縮による龜裂



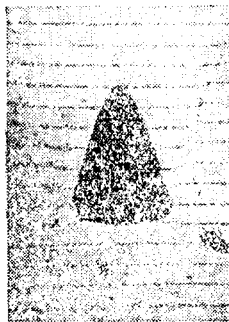
a / 1



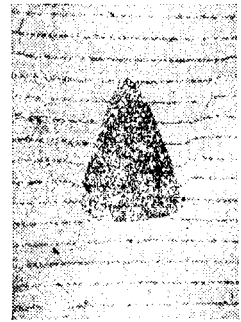
b / 1



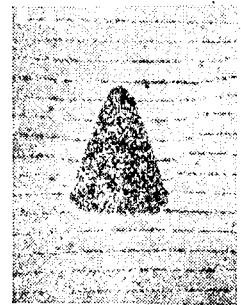
c / 1



a / 2



b / 2



c / 2



圖-14

第3節 龜裂の位置と應力分布との關係

前2節に於て、供試體に圓形孔ある場合と尖頭形孔ある場合の壓縮の際の應力分布と龜裂をしらべ、これについて等破壊壓力線圖を畫いて、次の性質があることを示した。

- (1) 孔のふちの上の點 A で最初に破壊の條件がみたされる。
- (2) 壓縮を續けると破壊可能區域はこの附近に擴がる。
- (3) 更に壓縮を續けると A 點をとりまく破壊可能區域からは離れた點 B で破壊條件が充され、ついで B 點の附近にも破壊可能區域がひ

表-9

	β°	τ							
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.7	1.0
α	0	0.00	0.03	-0.12	-0.27	-0.39	-0.50		
	15	0.00	-0.08	-0.18	-0.29	-0.39	-0.47		
	30	0.00	-0.05	-0.13	-0.22	-0.30	-0.37	-0.48	-0.59
	45	0.00	-0.02	-0.07	-0.13	-0.18	-0.24	-0.32	-0.41
	60	0.00	-0.02	-0.04	-0.08	-0.11	-0.15		
	75	0.00	-0.03	-0.06	-0.09	-0.12	-0.13		
	90	0.00	-0.08	-0.15	-0.19	-0.22	-0.22		
	105	0.00	-0.24	-0.37	-0.40	-0.40	-0.38		
	120	0.00	-0.44	-0.54	-0.53	-0.50	-0.46		
	135	0.00	-0.19	-0.28	-0.33	-0.36	-0.38		
	160	0.00	-0.00	-0.04	-0.12	-0.20	-0.28		
	165	0.00	-0.02	-0.01	-0.08	-0.17	-0.27		
	180	0.00	-0.01	-0.02	-0.08	-0.17	-0.28		
β	0	1.00	0.30	0.10	0.03	0.00	-0.02		
	15	-0.39	-0.14	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12		
	30	-0.57	-0.78	-0.52	-0.47	-0.42	-0.38	-0.34	-0.30
	45	-0.88	-0.93	-0.88	-0.79	-0.74	-0.70	-0.63	-0.57
	60	-1.15	-1.11	-1.09	-1.07	-1.04	-0.98		
	75	-1.40	-1.43	-1.37	-1.32	-1.26	-1.20		
	90	-2.00	-1.85	-1.68	-1.53	-1.41	-1.31		
	105	-2.85	-2.35	-1.92	-1.61	-1.40	-1.28		
	120	-3.81	-2.36	-1.74	-1.40	-1.20	-1.08		
	135	-1.43	-1.21	-1.04	-0.93	-0.83	-0.77		
	150	0.41	-0.01	-0.23	-0.33	-0.28	-0.39		
	165	0.91	0.49	0.26	0.09	-0.23	-0.08		
	180	1.00	0.53	0.41	0.23	0.11	0.31		
β	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
	15	0.00	0.27	0.37	0.39	0.40	0.38		
	30	0.00	0.24	0.40	0.78	0.55	0.56	0.55	0.51
	45	0.00	0.17	0.32	0.43	0.50	0.55	0.58	0.57
	60	0.00	0.11	0.22	0.30	0.37	0.41		
	75	0.00	0.05	0.10	0.14	0.18	0.21		
	90	0.00	-0.01	-0.05	0.06	-0.06	-0.05		
	105	0.00	-0.17	-0.25	-0.03	-0.32	-0.33		
	120	0.00	-0.33	-0.47	-0.53	-0.56	-0.56		
	135	0.00	-0.45	-0.61	-0.67	-0.69	-0.69		
	150	0.00	-0.34	-0.52	-0.59	-0.62	-0.61		
	165	0.00	-0.16	-0.27	-0.49	-0.35	-0.35		
	180	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00		

ろがる。即ち孔のふちと孔の内部に2個の塊狀の破壊可能區域が併立する。

(4) 更に壓縮を続けると2個の破壊可能區域はCに於て接觸する。そしてACBをはさん

でその兩側に破壊し難い區域が残る。

(5) AC の方向は龜裂の方向とほぼ一致する。

龜裂が AC の方向とほぼ一致することについては次のように考えられる。即ち破壊可能區域に於ては破壊はおこり得る状態にあるが個々の區別がある程度の廣さに達しないうちは土塊の集團的な滑り運動はおき得ない。壓力の増加によつて2個の破壊可能區域が C で接觸するに至ると、1個の一方に特に長い區域が破壊可能となり、その兩側に破壊し難い區域が残ることになるので、そこではじめて肉眼で認められるような龜裂がその特別に長い方向に沿つて生じ、土塊の集團的な運動が見られるに至るであらう。以上の考察から次のように結論する即ち彈性學から計算された應力により作られた等破壊壓力線圖に於て、破壊可能區域が特に一方に長くのびる時、龜裂はその區域内にその方向に現れる。

第4章 龜裂が急に方向を変えて進むことについて

第1節 序 論

孔の崩壊の際には3角形状の土塊 BOA (圖-15) が側壁からすり出してくることがあるが、土塊を形作るこの龜裂 OB, OA の成因には2個の場合が考えられる。一つは A と B と O から發した互に無關係な龜裂が O に於て交叉した場合他の一つはまず BO 或は AO が出來て次に O から A 或は B に向つて龜裂が發達する場合である。本章にては後者によつて龜裂が急に折れ曲る場合について考察する。

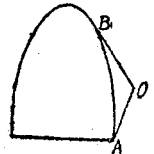


圖-15

これについては既に出來た龜裂の端部に於ける局所的な應力が主として影響するであらうと思われるので、豫め切れ目の入れてある寒天及寒天土供試體を壓縮する場合の龜裂の進み方について考察しよう。

第2節、切れ目を入れた寒天の壓縮試験

(I) 壓縮試験

矩形断面をもつ寒天製塔體に豫め斜に切れ目を入れこれに單純壓縮試験を行う (圖-16)。切れ目を入れずに壓縮すれば加壓の方向と約 30° 傾いて面にそつて破壊する。しかし豫め供試體の中程まで斜に切れ目を入れておくと壓縮による新たな龜裂は、切れ目の先端から、切れ目にほぼ直交して進みそれが供試體の外側に達すると3角形の塊が離れ落ちるが、この現象が孔の側壁の滑り出し現象に似ていることは注目される。それ故このような壓縮試験の結果を分析すれば坑道

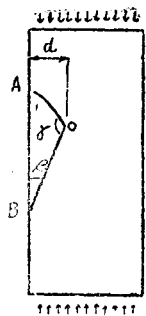


圖-16

側壁に出來るある種の龜裂の成因を理解し得ると思ふ。圖-17 は試験装置を示す。供試體の断面は $3.0\text{cm} \times 3.3\text{cm}$ の矩形で高さは 7.0cm である。これに深さ $\alpha = 0.9\text{cm}$ の切れ目を豫め小刀で入れておいて (圖-16 BO) 壓力を加えると新しい龜裂が O 點から發して OA にそつて進み遂に供試體の外側に達する。圖-18 の凹みは塊の落ちをあとで凹みの下側は豫め入れてあつた切れ目、上側は龜裂である。

表-10

試験番號 1				試験番號 2				試験番號 3			
試験片號	β°	r°	p g/cm ²	試験片號	β°	r°	p g/cm ²	試験片號	β°	r°	p g/cm ²
1	46	110	10.1	1	14.5	115	11.0	1	65	109	19.0
2	58	103	16.2	2	17.5	115.5	13.0	2	74	99	30.0
3	41	111	12.1	3	8.5	109	15.0	3	69	111	28.0
4	56	105	13.1	4	34	118.5	15.0	4	80	105.5	48.0
5	29	114.5	11.1	5	60	109	19.0	5	14	117.5	18.0
6	76.5	97.5	21.2	6	73	99.5	29.0	6	25	114	10.0
7	77	100	25.3	7	46.5	111	12.0	7	29.5	111	12.0
8	64.5	102.5	13.1	8	44	105	11.0	8	48.5	109.5	16.0
9	24.5	117	13.3	9	68	100	21.0	9	46	115	16.0
10	20	117	11.1	10	23.5	109	11.0	10	34	112.5	14.0
11	90	84.5	65.6	11	38	110	13.0	11	75	102	42.0
12	15.5	124	11.1	13	12	113.5	13.0	12	15	111	10.0
13	14	108.5	9.1	14	77	97	14.0				
14	15	110	11.1	15	44.5	111.5	15.0				
15	13	121	15.1	16	61.0	103	21.0				
$E=510\text{g/cm}^2, T=95\text{g/cm}^2$				$E=480\text{g/cm}^2, T=115\text{g/cm}^2$				$E=480\text{g/cm}^2, T=100\text{g/cm}^2$			

強度の異なる3種類の材料で作つた4.3個の供試體について p と $r^{(*)}$ を測定し (圖-16) 表-10に示す。この表から次のことが知られる。(1) r と β の關係には材料の引張強さは影響しない。(2) r は 90° 乃至 120° であり $\beta > 25^\circ$ の範圍では β が増すと漸次減少する。(3) $\beta < 25^\circ$ の範圍では r は略々一定であるが、 β が減じると r もやゝ減る傾向が見られる。(4) 引張強度の大なる材料では p が大きい。(5) p は β と共に増す。殊に β が大なる時は p の増加率も大きくなる。

(II) 彈性學的計算

準備として次の3個の2次元彈性問題を取扱う。

(a) 無限遠にて一方向に一様なる壓應力 p をうける無限板の應力。

座標軸を圖-19(a)の如く採れば應力は

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\theta\theta}_p &= -\frac{p}{2}\{1+\cos 2(\theta-\beta)\} \\ \widehat{r r}_p &= -\frac{p}{2}\{1-\cos 2(\theta-\beta)\} \\ \widehat{r\theta}_p &= -\frac{p}{2}\sin 2(\theta-\beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

によつて與えられる。

(b) 一圓形孔のある無限體に無限遠に於て一方向に一様なる壓應力 p が働く場合の應力。(圖-19b)

この場合の應力は

*5. 亀裂が直線でない時は起點の切線ときれめのなす角をとる。

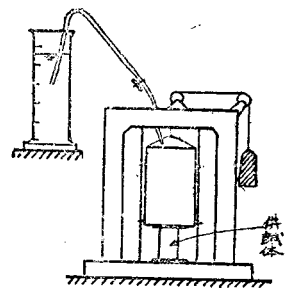


圖-17

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\theta\theta}_p &= -\frac{p}{2} \left\{ 1 + \frac{R^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2(\theta - \beta) \right\} \\ \widehat{rr}_p &= -\frac{p}{2} \left\{ 1 - \frac{R^2}{r^2} - \left(1 - \frac{4R}{r^3} + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2(\theta - \beta) \right\} \\ \widehat{r\theta}_p &= -\frac{p}{2} \left(1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4} \right) \sin 2(\theta - \beta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

(c) 2 個の同心圓にて圍れる環體を一半徑にそつて切斷し、切れ目に沿うて Δ なるすれを與える場合の應力。(圖19 c)

内圓の半徑 R_1 が外圓の半徑 R_2 に比して著しく小さい時は

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\theta\theta}_\Delta &= \frac{\Delta E}{4\pi R_1} \left(\frac{R_1}{r} + \frac{R_1^3}{r^3} \right) \cos \theta \\ \widehat{rr}_\Delta &= \frac{\Delta E}{4\pi R_1} \left(\frac{R_1}{r} - \frac{3R_1^3}{r^3} \right) \cos \theta \\ \widehat{r\theta}_\Delta &= \frac{\Delta E}{4\pi R_1} \left(\frac{R_1}{r} - \frac{R_1^3}{r^3} \right) \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

以上の計算式が知られる結果のうちで、此の後の考察にて引用される性質のみを次に整理しておく。二次元無限體が無限遠にて一樣なる壓應力 p をうける時にはその應力は次の性質をもつ。

〔性質 1〕. $\theta = \frac{\pi}{2}$ なる動徑 (y 軸) にそつた断面上^{*6)} では垂面應力は

$$\widehat{\theta\theta}_{p, \frac{\pi}{2}} = -p \sin^2 \beta \dots \dots \dots (16)$$

接面應力は $\widehat{r\theta}_{p, \frac{\pi}{2}} = -\frac{p}{2} \sin 2\beta \dots \dots \dots (17)$

である。原點を中心とする小なる半徑の圓形孔ある場合にも孔の近傍を除けば同じことが成立つ。

〔性質 2〕. 2 次元弾性體にて、孔のない場合は原點における $\widehat{\theta\theta}_p$ 、又孔がある場合は孔のふちにおける $\widehat{\theta\theta}_p$ の値は、共に次の性質をもつ。即ち p に垂直なる断面上にて最少値 $\widehat{\theta\theta}_{p, \min}$ となり、 p に平行なる断面上にて最大値 $\widehat{\theta\theta}_{p, \max}$ となり、 p の方向と θ をなす断面上では

$$\frac{2\widehat{\theta\theta}_p - (\widehat{\theta\theta}_{p, \max} + \widehat{\theta\theta}_{p, \min})}{\widehat{\theta\theta}_{p, \max} - \widehat{\theta\theta}_{p, \min}} = \cos 2\theta \dots \dots \dots (18)$$

である。よつて a, b を θ に關係なき常數とすると

$$\widehat{\theta\theta}_p = -\frac{p}{2} \{ a + b \cos 2(\theta - \beta) \} \dots \dots \dots (19)$$

なる形で表わされる。但 $pa = -(\widehat{\theta\theta}_{p, \max} + \widehat{\theta\theta}_{p, \min})$, $pb = \widehat{\theta\theta}_{p, \max} - \widehat{\theta\theta}_{p, \min}$ 。

〔性質 3〕 孔のふちに生ずる應力は p に比例し孔の徑によらない。

一圓形孔を持ち且その中心から無限遠に達する直線狀の切れ目を持つ二次元無限體が切れ目にそいて Δ なるすれをうけた場合にその應力分布は次の性質をもつ。

〔性質 4〕 孔のふちにおける $\widehat{\theta\theta}_\Delta$ は外側にすれている切れ目の側と 90° をなす断面上にて最

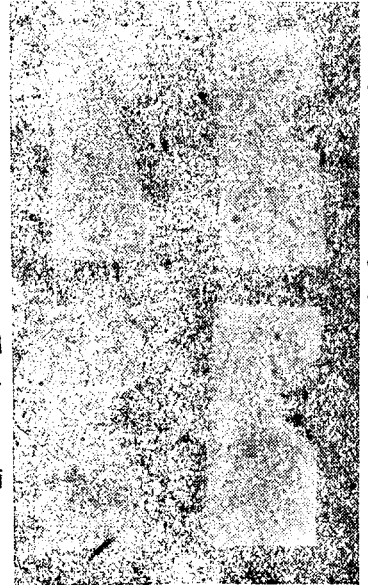


圖-18

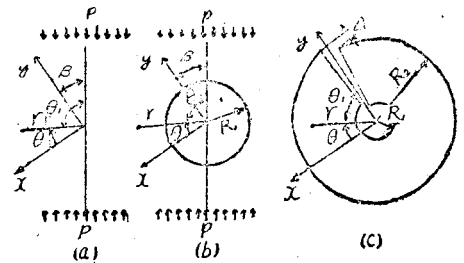


圖-19

*6. 簡單のために座標の原點を通る平面をとくに断面と呼ぶことにする。

大張應力 $\widehat{\theta\theta}_{d,max}$ となり、内側にずれている切れ目の側と 90° をなす断面上にて最大壓應力 $-\widehat{\theta\theta}_{d,max}$ となる。任意の断面上に於ては $\widehat{\theta\theta}_d = \widehat{\theta\theta}_{d,max} \cos \theta$ である。

〔性質 5〕 $\widehat{\theta\theta}_{d,max}$ は d に比例し圓形孔の半径に反比例する。

〔性質 6〕 切れ目の上では垂面應力は 0 である。

〔性質 7〕 きれめの上に於ける接面應力の分布は圓孔の附近に於て著しく大きく、孔からの距離が増すと急に減少する。 R_1 及 R_1/R_2 が小なるときは切れ目の上における接面應力の分布状態は R_2 には殆んど無關係である。

(III) 龜裂の進む方向に關する考察

實驗の結果をこの計算結果から考察しようと思ふ。そのために供試體を、原點を中心とする小なる半径の圓形孔をもち且 y 軸にそつて圓孔より供試體外側に至る 1 個の切れ目を持つ 2 次元彈性體と考える。圖-20 に於て OB は豫め入れてある切れ目、 OA は壓縮によりあらたに出来る龜裂を示す。切れ目の先端に微小なる半径 r_1 の圓形孔があると假定する。

もし供試體に切れ目を入れず p にて壓縮すれば OB 面上には〔性質 1〕により $\widehat{\theta\theta}_{p,\frac{\pi}{2}} = -p \sin^2 \beta$, $\widehat{r\theta}_{p,\frac{\pi}{2}} = -\frac{p}{2} \sin 2\beta$ なる應力を生じその合成力は

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\theta\theta}_{p,\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha}{\sin \beta} &= -pd \sin \beta \\ \widehat{r\theta}_{p,\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha}{\sin \beta} &= -pd \cos \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

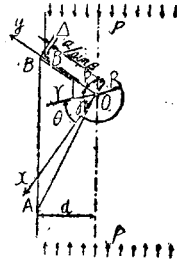


圖-20

になる。この時はこの面にそうずれはおきないのであるが、 OB 面にそつて切れ目を入れた場合には切れ目の上の垂面應力は (20) の値を取り得るけれども、接面應力は摩擦係数以上にはなり得ないために、摩擦係数が小なる場合には、接面抵抗力はこの面にそうずれを防止するに必要な大きさに達せず、切れ目にそうずれ d が生ずることになる。換言すれば、切れ目を入れると謂ふことは、切れ目を入れないとき p により生じている應力に切れ目にそい d なるずれを與える時の應力を重合せしめることと同じ意味になる。寒天は張應力に非常に弱いから最大張應力の生ずる断面から引裂けると考えることは妥當であらう。それ故もしずれ d を與えた場合の應力のみを考へれば〔性質 4〕により x 軸にそい新しい龜裂が出来 $\gamma = 90^\circ$ となる筈であるが、 p による應力をこれに重合するときは、 γ が 90° よりやゝ大なる断面上に於て最大張應力を生ずることになる。これは γ が増すと d による張應力はやゝ減少するが p による壓應力がこれを償つて猶餘りある程減少するからである。このことを (II) の結果を用いて量的に取扱ふ。(II) の計算は無限體に關するものであり、供試體は有限なる矩形であるからこの計算結果を應用するために次の如き假定を設ける。

〔假定 1〕 切れ目の上に働く垂面應力は一樣にして $\widehat{\theta\theta}_{\frac{\pi}{2}} = -p \sin^2 \beta$ なる値をもつ。これは〔性質 1 及 6〕にもとずく。従つて OB 面 (その長さは $\frac{d}{\sin \beta}$) 上に働く垂面應力の合力を N とすれば

$$N = -p \sin^2 \beta \frac{d}{\sin \beta} = -pd \sin \beta \dots\dots\dots (21)$$

である。

〔假定 2〕 p による $\widehat{\theta\theta}_p$ は孔のふちの上では

$$\widehat{\theta\theta}_p = -\frac{p}{2}\{a+b \cos 2(\theta-\beta)\} \dots\dots\dots (22)$$

にて與えられる。茲に a, b は θ に関係なき係數である。〔性質 2〕で述べた様に孔のある場合も、無い場合も、切れ目のない供試體が壓力 p を受けた時の $\widehat{\theta\theta}$ は上式の形で表わされている。切れ目の先端に小なる半径の孔があり且それが圓形だとしたのは假定にすぎないから $\widehat{\theta\theta}_p$ として (14) をそのまま用ひるのは適當でない。しかし上式の如く適當なる係數 a, b を用ひるならば先端の状態が假定とはやゝ異なる場合にも上式は成立つと考へてよいであらう。

〔假定 3〕 Δ による $\widehat{\theta\theta}_\Delta$ は孔のふちの上では

$$\widehat{\theta\theta}_{\Delta, \max} \cos \theta \dots\dots\dots (23)$$

にて與えられる。茲に $\widehat{\theta\theta}_{\Delta, \max}$ は切れ目に直交する斷面上の Δ による最大張應力で Δ に比例する。これは〔性質 4 及 5〕にもとづく。孔徑が小なる時は Δ による應力は切れ目の長さの影響を殆んどうけない。それ故 Δ による原點附近の應力分布については切れ目が無限に長い場合の値を有限長の切れ目の場合にそのまま假定したのである。

〔假定 4〕 切れ目の上の接面力は $N \tan \beta_0 = -pd \sin \beta \tan \beta_0 \dots\dots\dots (24)$

である。こゝに $\tan \beta_0$ は切れ目の兩側の間摩擦係數を現す。寒天では切れ目があるとき摩擦係數は切れ目のない時に比し著しく小さくなる。例へば壓縮試験の破壊面の方面から推定される切れ目なき寒天の β_0 は 30° であるが切斷せる寒天の 2 片間では β_0 殆んど 0 に近いことが認められる。

〔假定 5〕 切れ目にそうて Δ なるすれを生ぜしむるために切れ目の上に働くべき接面應力の合成力は

$$K \widehat{\theta\theta}_{\Delta, \max} \dots\dots\dots (25)$$

にて與えられる。但 K は切れ目の長さによらない正數で長さの次元をもつ。切れ目の長さに無關係に K をとつたのは〔性質 7〕に述べた如く圓孔の半径が小なるときは切れ目の上の接面應力は殆んど原點附近に集り、その合成力は切れ目の長さが變つても殆んど變らないからである。

以上の假定にもとづいて數量的考察を加えて見よう。OB 面上に (16) (17) で與えらるゝ垂面應力と接面力とが働くならば壓力 p のもとに OB 面にそうすれはおきない。しかるに實際に接面力として働いているのは抵抗力 $-pd \sin \beta \tan \beta_0$ であるからその差の符號を逆にした力

$$-\{-pd \cos \beta + pd \sin \beta \tan \beta_0\} = pd \cos(\beta + \beta_0) \sec \beta_0 \dots\dots\dots (26)$$

は切れ目にそうすれをおこすことになる。この力に依つて孔のふちにひきおこされる最大張應力 $\widehat{\theta\theta}_{\Delta, \max}$ は (25) と (26) を等しとおいて定められる。

$$K \widehat{\theta\theta}_{\Delta, \max} = pd \cos(\beta + \beta_0) \sec \beta_0 \dots\dots\dots (27)$$

孔のふちにそう $\widehat{\theta\theta}$ は p によるものは (22) にて與えられ Δ によるものは (23) にて與えられ、

兩者の和が實際におきてゐる値であると考える。

$$\widehat{\theta\theta} = \widehat{\theta\theta}_{d,max} \cos \theta - \frac{p}{2} \{a + b \cos 2(\theta - \beta)\} \dots\dots\dots (28)$$

である。張力に弱い材料では $\widehat{\theta\theta}$ の最大なる断面で破壊がおきると考えられる。これを求めるために $\widehat{\theta\theta}$ を θ で微分して 0 とおく。

$$\widehat{\theta\theta}_{d,max} \sin \theta - pb \sin 2(\theta - \beta) = 0$$

$\widehat{\theta\theta}$ を最大ならしむる θ を θ_0 とすれば上式より

$$\frac{p \sin 2(\theta_0 - \beta)}{\sin \theta_0} = \frac{\widehat{\theta\theta}_{d,max}}{b} = \frac{p\alpha}{Kb} \cos(\beta + \beta_0) \sec \beta_0 \dots\dots\dots (29)$$

$\gamma = 45^\circ - \theta_0$ なる故

$$\frac{\sin 2(\beta + \gamma) \cos \beta_0}{\cos(\beta_0 + \beta) \cos \gamma} = \frac{d}{bK} \dots\dots\dots (30)$$

切れ目の深さが一定なる時左邊を常數 c_1 にて表わせば

$$\frac{\sin 2(\beta + \gamma) \cos \beta_0}{\cos(\beta_0 + \beta) \cos \gamma} = c_1 \dots\dots\dots (31)$$

これは豫め入れてあつた切れ目と新たに發生する龜裂の兩者の方向の間の關係を示す式である。

以上の結果を圖-21 に圖解してある。(a) は p による孔のふちの上の $\widehat{\theta\theta}$ を示し、 p に垂直及平行なる断面上に極値をもち π なる波長をもつ波形である。(b) は A による孔のふちの上の $\widehat{\theta\theta}$ を示したもので、それはきれめに垂直なる断面上に極値を持ち 2π なる波長をもつ波形である。

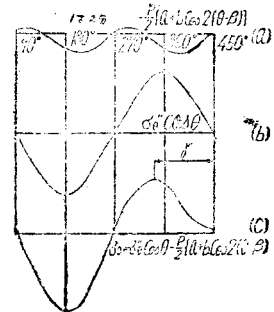


圖-21

(c) は兩者の重合でその極大となる位置は $\theta = 360^\circ$ よりやゝ小さくなつてゐる。切れ目の先端の孔の半径が小なる時は孔の縁の上では $\widehat{\theta\theta}_d$ は $\widehat{\theta\theta}_p$ に比してはるかに大きな値である(性質 3) による) から、 γ は 90° から餘り偏らないことになる。(31) より θ_0 を求める圖解法を吟味すれば γ と β との關係が明になる。この式を變形すると $c_1 \sec \beta_0 \sin \theta_0 = \sin 2(\theta_0 - \beta) \sec(\beta + \beta_0)$ であるから $x_1(\theta) = c_1 \sec \beta_0 \sin \theta$ 、 $x_2(\theta) = \sin 2(\theta - \beta) \sec(\beta + \beta_0)$ なる函數 x_1, x_2 を θ について求めて交點を求めればこれが θ_0 になる。

圖-22 (a) は $c_1 = 2.5$ としたときの $x_1(\theta)$ と $\beta_0 = 0$ とし β が、 $0, \frac{\pi}{8}, \frac{2}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{4}{8}\pi$ に對する $x_2(\theta)$ を畫いたものである。 $A_0 A_1 \dots$ は夫々の β に對する x_2 と x_1 との交點でその坐標 θ_0 を β について畫いたものが圖の下方の曲線である。これは求める $\beta - \gamma$ 曲線であり、 $\beta = 0$ にて $\gamma = 90^\circ$ となり β が増加すると γ は急に増して極大値に達し、再び漸減して $\beta = 90^\circ$ に於て $\gamma = 90^\circ$ になる。圖-22 (b) は $c = 2.5$ 、 $\beta_0 = 20^\circ$ として x_1, x_2 を畫いたものである。この場合にも $\gamma - \beta$ 曲線は前と同じ傾向をもつてゐるが γ の値が一般にやゝ大きくなつてゐる。圖-22 (c) は $c = 1.0$ 、 $\beta_0 = 20^\circ$ として x_1, x_2 を畫いたものである。この場合には $\beta = 90^\circ$ に於て $\gamma = 90^\circ$ であ

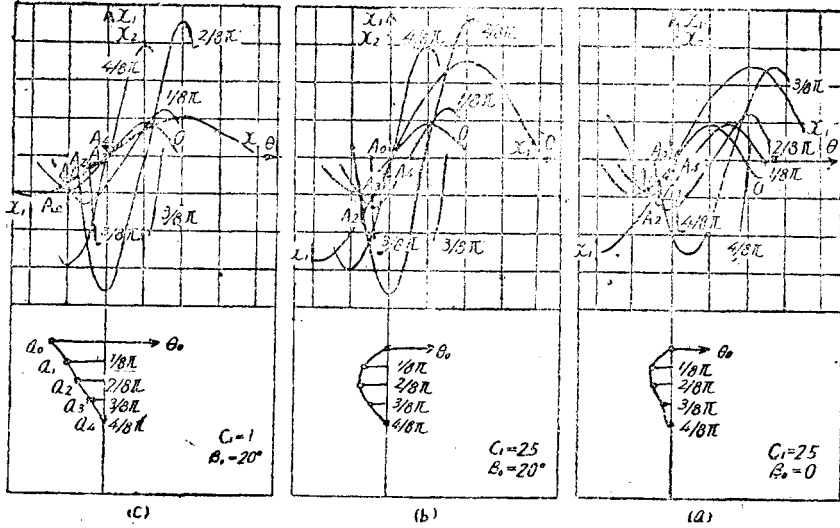


圖 22

り β が減少するにつれて γ は増加し $\beta=0^\circ$ に於て γ は最大となる。(28) の第 2 項を第 1 項に比して無視すれば $\widehat{\theta\theta}$ の最大値は、

$$\widehat{\theta\theta}_{\max} = \widehat{\theta\theta}_{A, \max} \cos \theta_0 = pb \frac{\sin 2(\theta_0 - \beta)}{\sin \theta_0} \cos \theta_0 = pb 2(\gamma + \beta) \tan \gamma$$

この値が寒天の引張強度 σ_T に達した時に新たな龜裂が出来ると考えると

$$pb \sin 2(\gamma + \beta) \tan \gamma = \sigma_T \dots\dots\dots (32)$$

材料が一定であれば σ_T/b を常数 c_2 とおくと

$$p = c_2 \frac{\cot \gamma}{\sin 2(\gamma + \beta)} \dots\dots\dots (33)$$

これは β と p の間の関係を示す式である。

c_1, c_2 の値は實驗による以外に知るよしもないが、これらを適當なる常数に選ぶ時 γ, β, θ の間に既に見出された種々の關係が説明されうならば、龜裂の折れ曲る原因について、これまで述べてきた考へ方が誤つていないことの證明になると思う。實驗の結果に就いては本章第 2 節 (1) に列擧したが次に c_1, c_2 を適當に選ぶことにより、これを説明し得ることを示そう。

(1) について:—(30) 式により γ, β の間の關係式には σ_T は含まれていない。よつて γ, β の關係には寒天の引張強度は關係がない。

(2) 及 (3) について:—切り離された寒天の表面相互間には殆んど摩擦が存しないので $\beta_0=0$ とおくと (31) 式は $\frac{\sin 2(\beta + \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} = c_1$ となり $c_1=2.5$ として圖示すると圖-23 の破線となる。この曲線は $\beta=0$ の時 $\gamma=90^\circ$ となり β が増すと γ は急に増加し $\beta=25^\circ$ で γ は極大値 160° となり更に β を増すと γ は徐々に減じ $\beta=90^\circ$ にて $\gamma=90^\circ$ となる。これを實驗の結果 (圖-23 實線) と比較するとかなりよく一致している。

(4) について;—(32) によれば p は σ_T に比例する。故に引張強度の大なる寒天では p は大となる。

(5) について;—(33) に於て c_2 の値を第1實驗では 19.0, 第2實驗では 22.5, 第3實驗では 22.5 にとれば圖-24 (a), (b), (c) に破線にて示す曲線が得られる。これによれば p とその増加率は β と共にまし、實驗結果(實線)とかなりよく一致している。

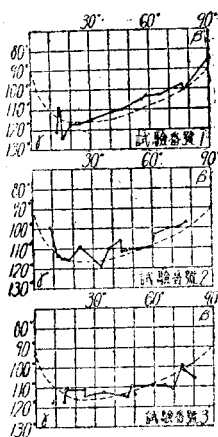


圖-23

かくの如く實驗値と計算値が一致することは、新しい龜裂の成因に關する上記の考え方が妥當なることを示すものと云い得るであらう。

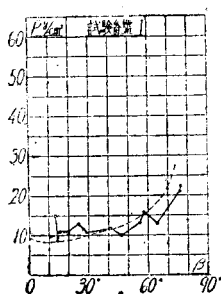


圖-24 (a)

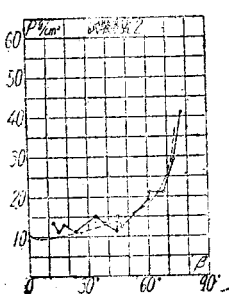


圖-24 (b)

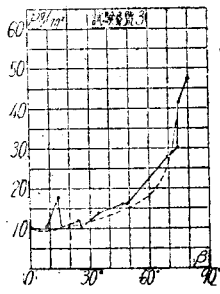


圖-24 (c)

(IV) 結 論

以上の研究により、寒天のようにかなり弾性的な材料では次の事が結論される。(1) 豫め龜裂がある所へ壓縮力を加えるとその龜裂の先端から在來の龜裂と鈍角をなして新しい龜裂が出来る。(2) これは在來の龜裂の先端に應力集中現象がおきるためである。(3) 新しい龜裂は在來の龜裂の先端に生ずる最大張應力 $\widehat{\theta\theta}_{max}$ が一定値に達した時その面上の引き裂きによつて始まる。(4) 龜裂の先端における $\widehat{\theta\theta}$ は二つの應力 $\widehat{\theta\theta}_d$ と $\widehat{\theta\theta}_p$ の和と考えられる。

$$\widehat{\theta\theta} = \widehat{\theta\theta}_p + \widehat{\theta\theta}_d \dots\dots\dots (34)$$

しかして $\widehat{\theta\theta}_p$ は θ に關して

$$\frac{\widehat{\theta\theta}_p - a'}{b'} = \cos 2(\theta - \beta) \dots\dots\dots (35)$$

なる關係で定まり $\widehat{\theta\theta}_d$ は θ に關して

$$\frac{\widehat{\theta\theta}_d}{c'} = \cos \theta \dots\dots\dots (36)$$

の關係で定まる分布をなす應力である。茲に a', b', c' は θ に無關係なる係數である。(4) 彈性體では上記の2應力のうち後者は前者よりはるかに大きい。

第3節、切れ目を入れた寒天土の壓縮試験

(I) 壓縮試験

矩形断面をもつ寒天土製磚體に單純壓縮を加えると加壓の方向と約 30° の傾きをした面にそひ破壊する。しかし豫め供試體の中程迄斜に切れ目を入れておくと、壓縮による新たな龜裂は切れ目の先端から、切れ目と鈍角をなして進展する。この龜裂が外側迄達すると 3 角形状の塊が離れおちることになる。試験片の断面は 3.9cm×3.9cm で高さは 8cm である。これに垂直深さ $\alpha = 1.5\text{cm}$ の切れ目を豫め入れてある(圖-16 B)。試験片に加壓すると新しい龜裂が O より發し OA にそつて進み試験片の外側に達する。圖-25 にその數例を示す。ここに 3 角形状のくぼみの下邊は豫め入れておいた切れ目、上邊は新しく發生した龜裂の面である。



圖-25

試験は溶液濃度 2, 混合比 1.0(實驗 A) と溶液濃度 2, 混合比 1.5(實驗 B) の 2 種の寒天土で作られた 20 個の試験片に

ついて行われ、その結果を圖-11 に示した。これによると次のことが知られる。(a) r は 100° 乃至 140° の鈍角である。(b) r は β が小なる時は β が増すと急に増加するが β が約 25° の時最大となり、更に β を増すと漸次減少する。(c) p は β と共に増すが β が増すと p の増加率も漸増し β が約 60° 以上になると著しく増す。

表-11

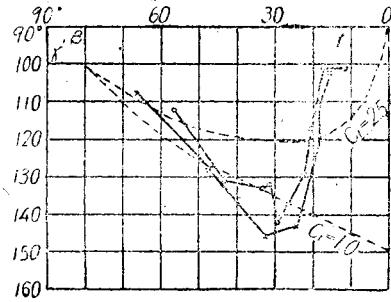
試験番號 A				試験番號 B			
試験片番號	β°	r°	P_g/cm^2	試験片番號	β°	r°	P_g/cm^2
No. 1*	60			No. 1	47	128	39.5
2*	70			2	24	143	36.1
3	33	133	43.3	3	18	111	29.5
4	29	142	36.8	5	18	120	28.3
5	31	132	38.1	6	32	146	40.0
6	22	129	32.9	7	66	108	44.0
7	43	131	40.8	8	15	102	29.5
10	56	112	52.0				
12*	55			* 印を付したる試験片に於ては、あらかじめ入れてあつた龜裂とは全く關係なく滑り破壊し、それがおこる迄には、在來の切目からの龜裂の進行を認め得なかつた。			
13*	60						
14	11	101	35.5				
15	20	117	39.5				
16	16.5	101	38.1				

(II) 龜裂の進む方向に関する考察

寒天における實驗結果と性質的には同じ結果が得られたと云うことは寒天土の場合にも寒天の場合と同様な機構で新しい龜裂が発生することを豫想せしめる。それ故前項と同じ考察を進めるならば

$$\frac{\sin 2(\beta+\gamma)\cos \beta_0}{\cos(\beta_0+\beta)\cos \gamma} = c_1, \quad p = c_2 \frac{\cot \gamma}{\sin 2(\gamma+\beta)}$$

が得られる。β=20°, c₁=2.5 及 β₀=20°, c₁=1.0 として γ, β の関係をこの式から求めると圖-26 の破線となり、實驗結果(同圖實線)と餘りよく一致していない。p と β の関係を上式より計算して圖-27(破線)に示した。實驗 A では c₁=1.0, c₂=18.5。實驗 B では c₁=1.0, c₂=16.0 とすると實驗結果(實線)とやゝ一致した曲線が得られるが餘り充分なる一致とは言えない。弾性體と假定して導かれた(31)(33)兩式が寒天土の場合には實驗結果と餘りよく一致しない原因は、材料が完全弾性を持たないためであると思われる。このような材料では大なる應力が局部的に集中すればその附近は流動し應力の緊張は緩みそのかわりそれを取りまく部分の應力が幾分大きくなりその結果一局部のみに強く働く應力はその附近の小なる應力と平均化されると考えられる。第2節で述べた弾性學的計算によれば



—○— 試驗結果 A
- - - 試驗結果 B

圖-26

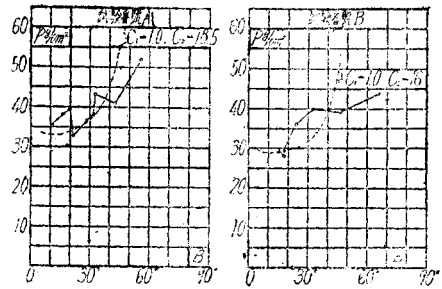


圖-27

$\widehat{\theta\theta}_A$ の最大値は切れ目の先端に想像された孔の半径が小なる時は甚だしく大になり $\widehat{\theta\theta}_B$ の最大値はこれよりはるかに小になる。寒天のような弾性的なる材料で應力が局部的に非常に大きくなり

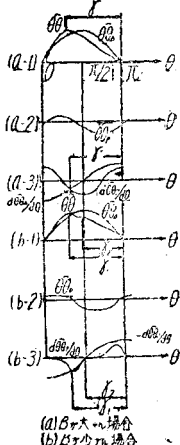


圖-28

りうる材料では上記の計算の如き應力分布がおこり得るであらう。この場合には $\widehat{\theta\theta}_{max}$ に對する $\widehat{\theta\theta}_B$ の影響は微弱であるから $\widehat{\theta\theta}_B$ の函數形がどんな形であろうとも、それが週期 π をもつならば γ と β の關係には餘り大なる影響をもたないであらう。しかし寒天土のように局部的に應力が餘り増大し得ない場合は $\widehat{\theta\theta}_A$ と $\widehat{\theta\theta}_B$ の大いさが似てくるために $\widehat{\theta\theta}_B$ の函數形が $\widehat{\theta\theta}_{A,max}$ にならざる影響を及ぼすことになるであらう。例へば $\beta_0=20^\circ$, $c_1=1.0$ とし $\widehat{\theta\theta}_B$ の函數形が β が大なる時には圖-28 a-2 曲線の如き形をもち β が小なる時にはその分布状態が少し變つて同圖 b-2 曲線の如くなると假定して見よう。その時は後者の微分係数は b-3 圖の如くなり $\widehat{\theta\theta}$ の極大値が 2 個所出来ることになる。その一つの方で破壊がおきれば $\gamma=90^\circ$ に近くなり他の一つの方で破壊がおきれば γ はかなり大きな鈍角となる。従つてこのような假定をすれば圖-26 に於て β が小なる時 γ が 90° に近くなることを説明することが出来よ

う。即ち $\theta = \beta$ 及 $\theta = \beta + \pi/2$ に於て極大及極小値をもち π なる週期をもつ θ の適當なる函數 $f(\theta)$ を考え、(22)の $\cos 2(\theta - \beta)$ のかわりにこれを代入することに依つて、寒天の場合と同様な考え方から寒天土内の龜裂の折れ曲る現象を理解し得るのである。

第4節、龜裂の折れ曲る機械について

前の2節に於て寒天と寒天土内に豫め切れ目がある時に壓縮力が加わる時はその先端から在來の切れ目の方向と鈍角をなして新らしい龜裂が進行しうることを實驗的に示し且彈性論によつて之を検討した。坑道の側壁部に坑のふちから内部に至る龜裂が出来た時はその先端部に於て上記の實驗と同様な應力状態が現出され、その結果新らしい龜裂が在來の龜裂と鈍角をなして發生することはあり得ることこれが側壁から三角形土塊がすり出してくる原因であると思われる。

重力堰堤に作用する地震力の影響 (其の二) (地震時動水壓の正解)

正 員 畑 野 正*

Seismic Force Effect on Gravity-dams. (No. 2)
(Accurate Solution of Dynamic Water-pressures on
Dams, during Earth-quake.)

By Tadashi Hatano C. E., Member.

要旨 先に筆者は重力堰堤に作用する地震力の影響(其の一)に於て、重力堰堤に水壓の作用しない場合の振動を取扱ひ、地震動週期の短い時は、從來の考へ方に變更を要する事を述べたが、本文に於ては從來動水壓の理論式として採用されている Westergaard 氏の解が正解でなく、地震動週期小なる時は用いられない事を指摘し、これに對し筆者の正解を述べた。

1. 從來の動水壓理論に對する批判

1) Westergaard 氏の解¹⁾

Westergaard 氏の解を要約すると次の如くである。自由水面を上流側に向つて x 軸とし、堰堤上流面を沿直と考へてこれを下向きに y 軸とする。今靜水壓を加へない動水壓のみを σ とし、 ξ, η を x, y 方向の水分子の變位量とすれば、運動の方程式として次式を得る。

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{W_0}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{W_0}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \dots\dots\dots (2)$$

こゝに W_0 は水の單位體積の重量、 g は重力の加速度である。又水の體積彈性率を K とおけ

* 日本發送電々力技術研究所員 工學士

1) Transaction of A. S. C. F. 1933.