

會，及び科學弘報協會發行) 第7輯に掲載決定である。

勿論この小論にも今後猶修正を要する點もあらうかと思はれるが、會員各位の御教匠を仰ぎ、整つたものに仕上げたい次第である。

終りに臨み、御繁用中を種々御指導を頂いてゐる恩師東大教授田中 豊博士に厚く御禮申上げる次第である。

## 註

(34) 式に於て、剪断力の影響をことさらに省略すると、或る場合に  $R > 0.41 \sim 0.56$  と云ふ様な條件が得られるが如何に微小なりとは云へ剪断力の影響を取除く事はいけない事と考へられる。

## 堰堤々體及基礎の接觸線附近の應力分布に就て

正員 工學博士 石原 藤次郎\*

准員 丹 羽 義 次\*\*

On the stress distribution near the line of contact between triangular gravity dam body and foundation

By Tojiro Ishihara, Dr. Eng., C.E., Member

Yoshiji Niwa, C.E., Assoc. Member

**要 旨** 堰堤内部應力の弾性學的解析に際しては、従來は専ら半無限長三角形斷面に就て行われたので、堤體と基礎との接觸線附近に於ける應力分布を明かにすることが出来なかつた。本文は應力修正函数を用いて半無限長三角形堰堤内の應力を修正し、修正函数中の諸常數を接觸線に沿う堤體と基礎との變位を一致せしめることから決定し、接觸線附近の應力分布を求めたものである。その結果は水平な接觸線に於ける應力分布が、堤頂まで満水した際の水壓及堤體自重のみを考えた場合にも直線的變化をなさず、堤體及基礎の弾性性質に應じて大きい影響を受けることを知つた。この事實は基礎の影響を無視し半無限三角形斷面に就て行われた在來の弾性學的計算法と著しく趣を異にするもので、高堰堤の合理的設計上注目すべき事柄である。

## 目 次

1. 緒 言
2. 堤體の應力分布及變位
  - (1) 水壓による應力分布, (2) 自重による應力分布, (3) 水壓及自重による變位, (4) 應力修正函数,
  - (5) 應力修正函数による應力及變位, (6) 接觸線附近の應力及變位
3. 基礎の應力分布及變位
  - (1) 鉛直力の影響, (2) 水平力の影響
4. 堤體及基礎の接觸線附近の應力分布

\* 京都大學教授

\*\* 工學士 京都大學大学院特別研究生

## 5. 數値計算例

(1) 水壓及自重による堰體底面の應力分布, (2) 水壓及自重による堰體底面の變位, (3) 應力修正函數とそれによる堰體底面の應力及變位, (4) 基礎の變位, (5) 計算結果とその考察

## 6. 結 語

## 1. 緒 言

高堰堤築造は河川の總合的開發に際し最も緊要な事柄であるが、高堰堤の設計施工を合理化するためには先ず第一に各種外力による堤内應力の分布を明確ならしめねばならない。この意味から既に多數の研究者によつて彈性學的な應力解析が行われ、基本三角形斷面の重力堰堤が水壓、自重、地震力並に堤頂に働く集中荷重及モーメントを受けた場合に就ては嚴密な解が與えられている<sup>1)</sup>。しかしながら之等の解法は何れも堰堤の上下流面が一定の傾斜を以て無限に下方に續いているものと假定し、應力の算定に際して何等堤底の條件が入つていない。換言すれば堤底に於てもそれより上位の水平斷面と相似的な應力が起つていと假定している。然るに堰堤の如く高さの底幅に對する比が比較的小さいものでは、固定端の應力即ち堤底の應力が變つてくると、その影響が堤底以上の斷面に有力に働き、Saint-Venant の理論はあてはまらないことになる。實際には堰堤應力は堤底近くで大きくなり堰堤の生命を支配するものであるから、之が堤底の變形によつて變化すれば、折角求めた應力は堰堤の安全度檢定に於て充分の信頼を置き難くなる。

この意味に於て Wolf<sup>2)</sup> の研究は注目し得るものである。Wolf は Airy 應力函數が満足すべき 4 次の偏微分方程式の一つの特解として多項式の形で表されるものがあることに立脚し、基本三角形斷面の堰堤應力を求めたが、その際基礎の影響に關する一考察として、基礎が硬直で變形を起さないと云う場合を取扱つた。彼が鉛直な上流面と 45° に傾いた下流面とを有する堰堤につき、鉛直方向の座標に關する 5 次の多項式を應力函數に用いて行つた數値計算によると、堤底の水平斷面にて鉛直應力の分布は直線的でなく、の Lévy<sup>3)</sup> 解法による直線的分布の場合と比較すると、中央部ではそれより大きく、兩端部ではそれより小さい。又剪斷應力の分布も直線的でなく、下流面近くで最大値をとり、下流趾では直線分布の場合より小となつてゐる。又 Vogt<sup>4)</sup> は Lévy の研究結果より堤底の變形を計算し、堤底にて岩盤と堤體との連續性を満足するには附加應力を加へねばならないことを證明している。

かくして堤底の變形が堰堤應力に及ぼす影響が極めて大切なことがわかるが、本研究はこうした問題の解決に資するために、堤體及基礎の彈性的性質が之等の接觸線附近の應力分布に如何に

- 1) 石原藤次郎, 小西一郎: “重力堰堤の應力計算に就て,” 土木學會誌, 第 22 卷第 3 號, 昭和 11 年。
- 2) K. Wolf: Zur Integration der Gleichung  $\Delta\Delta F=0$  durch Polynome im Falle des Staumauerproblems,” Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Feb., 1914.
- 3) Maurice Lévy: “Sur l'équilibre élastique d'un barrage en maçonnerie à section triangulaire,” Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. 127, p. 10, 1898.
- 4) Vogt: “Über die Berechnung der Fundamentdeformation,” Det Norske Videnskaps Akademi, 1925.

影響するかを Vogt<sup>4)</sup> の提唱に従つて弾性學的に解析したものである。即ち先づ半無限三角形断面の堰堤が水壓及自重を受けた場合の應力を弾性學的に計算し、この應力を應力修正函數を用いて修正し、基礎の影響を加味した堤底の應力及變位を求め、一方この應力と貯水池水壓を外力として受ける基礎の變位を求め、兩者の變位が接觸線に於て一致すると云う條件から修正函數中の諸常數を決定した。この計算に就ては後述の如く 2, 3 再検討の餘地がある様であるが、一應接觸線附近の應力分布を求めて基礎の影響を具體的に知り得る様にした點に於て、高堰堤の合理的設計に注目すべき示唆を與えるものと思ふ。

なお本研究に於ては水壓及自重のみを考えたから、他の外力が働く場合に就ては更に考究を必要とする。又堰堤の長さは断面寸法に比して極めて大きく、之に作用する外力も堰堤の長さの方向に對して變化しないものとし、所謂平面變形をなすものとして 2 次元の問題として取扱つてゐる。堰堤の兩岸との取付部分などに就ては 3 次元的に考察しないと充分な結論を得難いはずである。これ等に關して更に他日の研究に俟ちたいと思ふ。

2. 堤體の應力分布及變位

(1) 水壓による應力分布. 圖-1 の如く頂角  $\gamma$  なる半無限三角形断面を考へて上流面に  $x$  軸、頂點を通りこれに直角に下流方向に  $y$  軸をとれば、堤頂まで貯水した場合の應力函數は<sup>5)</sup>

$$F_p = r^3(b_1 \cos \theta + d_1 \sin \theta + a_3 \cos 3\theta + c_3 \sin 3\theta)$$

にして、各成分應力は

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F_p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_p}{\partial \theta^2} = r(2b_1 \cos \theta + 2d_1 \sin \theta - 6a_3 \cos 3\theta - 6c_3 \sin 3\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F_p}{\partial r^2} = r(6b_1 \cos \theta + 6d_1 \sin \theta + 6a_3 \cos 3\theta + 6c_3 \sin 3\theta) \end{aligned} \quad \dots\dots (1)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_p}{\partial \theta} \right) = 2r(b_1 \sin \theta - d_1 \cos \theta + 3a_3 \sin 3\theta - 3c_3 \cos 3\theta)$$

である。今上流面に沿ひ堤頂より單位距離の點に於ける水壓を  $p$  とすれば、境界條件として、

$$(\sigma_\theta)_{\theta=0} = -pr, \quad (\tau_{r\theta})_{\theta=0} = 0; \quad (\sigma_\theta)_{\theta=\gamma} = 0, \quad (\tau_{r\theta})_{\theta=\gamma} = 0$$

が成立するから、これらから必要な係數を決定すると、

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= -\left(\frac{1}{6} + B\right)p = -B'p, \quad d_1 = -3Ap, \quad a_3 = Bp, \quad c_3 = Ap; \\ \text{但し, } A &= \frac{1}{12} \left( \frac{\sin 4\lambda + 2\sin 2\gamma}{3 - 4\cos 2\gamma + \cos 4\gamma} \right), \quad B = -\frac{1}{12} \left( \frac{3 - 2\cos 2\gamma - \cos 4\gamma}{3 - 4\cos 2\gamma + \cos 4\gamma} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

従つて水壓による所要の應力函數は次の様になる。

$$F_p = pr^3(A \sin 3\theta + B \cos 3\theta - 3A \sin \theta - B' \cos \theta) \quad \dots\dots (3)$$

(2) 自重による應力分布. 座標系を上と同様にとれば、この場合の應力函數も亦<sup>6)</sup>

$$F_g = r^3(b_1 \cos \theta + d_1 \sin \theta + a_3 \cos 3\theta + c_3 \sin 3\theta)$$

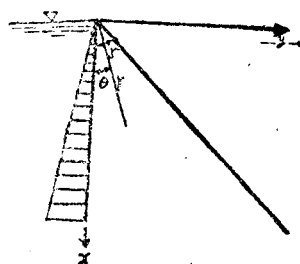


圖-1

となり. 各成分應力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F_g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_g}{\partial \theta^2} - gr \cos(\theta - \beta) \\ &= r\{2b_1 \cos \theta + 2d_1 \sin \theta - 6a_3 \cos 3\theta - 6c_3 \sin 3\theta - g \cos(\theta - \beta)\} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F_g}{\partial r^2} - gr \cos(\theta - \beta) \\ &= r\{6b_1 \cos \theta + 6d_1 \sin \theta + 6a_3 \cos 3\theta + 6c_3 \sin 3\theta - g \cos(\theta - \beta)\} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_g}{\partial \theta} \right) = 2r\{b_1 \sin \theta - d_1 \cos \theta + 3a_3 \sin 3\theta - 3c_3 \cos 3\theta\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

となる. 次に境界條件

$$(\sigma_\theta)_{\theta=0} = 0, \quad (\tau_{r\theta})_{\theta=0} = 0; \quad (\sigma_r)_{\theta=r} = 0, \quad (\tau_{r\theta})_{\theta=r} = 0$$

から係数を決定すれば,

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \left( B - \frac{\cos \beta}{6} \right) g = -B'g, \quad d_1 = -3Ag, \quad a_3 = Bg, \quad c_3 = Ag; \\ \text{但し, } A &= \frac{1}{12} \left\{ \frac{\cos \alpha (3 \sin 3\gamma - \sin \gamma) - \cos \beta (\sin 4\gamma + 2 \sin 2\gamma)}{3 - 4 \cos 2\gamma + \cos 4\gamma} \right\}, \\ B &= -\frac{1}{12} \left\{ \frac{3 \cos \alpha (\cos \gamma - \cos 3\gamma) + \cos \beta (2 \cos 2\gamma + \cos 4\gamma - 3)}{3 - 4 \cos 2\gamma + \cos 4\gamma} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

茲に  $g$  は堤體材料の單位重量,  $\alpha$  及  $\beta$  は夫々堤體の下流面及上流面が鉛直線となす角度である. 従つて自重による應力函数は

$$F_g = gr^3(A \sin 3\theta + B \cos 3\theta - 3A \sin \theta - B' \cos \theta) \dots\dots\dots (6)$$

(3) 水壓及自重による變位. 水壓又は自重による應力函数は, (3) 及 (6) 式より次の如くまとめて書くことが出来る.

$$F_{(p \text{ or } g)} = (p \text{ or } g)r^3(A \sin 3\theta + B \cos 3\theta - 3A \sin \theta - B' \cos \theta) \dots\dots\dots (7)$$

茲に係數  $A, B, B'$  は  $p$  又は  $g$  に應じて夫々 (2) 又は (5) 式の値を採用しなければならないが, この應力函数に相當する變位を求めるために變位函数を  $\psi$  とすれば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) &= \nabla^2 F_{(p \text{ or } g)} - (1 - \eta)gr \cos(\theta - \beta) \\ &= -8(p \text{ or } g)r(3A \sin \theta + B' \cos \theta) - (1 - \eta)gr \cos(\theta - \beta) \end{aligned}$$

$$\therefore \psi = 4(p \text{ or } g)r(3A \cos \theta - B' \sin \theta) + f(r) + \frac{F(\theta)}{r} - \frac{(1 - \eta)}{2}gr \sin(\theta - \beta)$$

所が變位函数は  $\nabla^2 \psi = 0$  を満足しなければならないから, 結局次の様になる.

$$\psi = 4(p \text{ or } g)r(3A \cos \theta - B' \sin \theta) + c \log r + \frac{a}{r} \sin \theta + \frac{b}{r} \cos \theta - \frac{(1 - \eta)}{2}gr \sin(\theta - \beta) \dots\dots\dots (8)$$

但し,  $\eta = \sigma/(1 - \sigma)$ ,  $\alpha$ : 堤體材料のポアソン比,  $a, b, c$ : 常數

上式にて右邊の末項は自重の場合にのみ加うべきものであるが, この變位函数が定まれば一般

に次式によつて  $r, \theta$  方向の變位が求められる。

$$2\mu u_r = -\frac{\partial F}{\partial r} + (1-\sigma)r \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$2\mu u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + (1-\sigma)r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \text{但し} \quad E: \text{ 堤體材料の彈性係數}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2\mu u_{(p \text{ or } g)r} &= -3(p \text{ or } g)r^2(A \sin 3\theta + B \cos 3\theta - 3A \sin \theta - B' \cos \theta) \\ &\quad - 4(1-\sigma)(p \text{ or } g)r^2(3A \sin \theta + B' \cos \theta) + (1-\sigma)(a \cos \theta - b \sin \theta) \\ &\quad - \frac{(1-2\sigma)}{2} gr^2 \cos(\theta - \beta) \\ 2\mu u_{(p \text{ or } g)\theta} &= -(p \text{ or } g)r^2(3A \cos 3\theta - 3B \sin 3\theta - 3A \cos \theta + B' \sin \theta) \\ &\quad + 4(1-\sigma)(p \text{ or } g)r^2(3A \cos \theta - B' \sin \theta) + (1-\sigma)(cr - a \sin \theta - b \cos \theta) \\ &\quad - \frac{(1-2\sigma)}{2} gr^2 \sin(\theta - \beta) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

茲に  $a, b, c$  は境界條件から決定さるべき常數であり、各式の末項は自重の場合のみ加えることは云うまでもない。

(4) 應力修正函數. 基礎の影響を加味した堤底附近の應力を求めるために、半無限三角形断面として求めた上記各應力を修正することとし、それに必要な所謂應力修正函數を  $F = r^{n+1}f(\theta)$  と置き、基本方程式  $\nabla^4 F = 0$  に代入すれば、

$$\frac{d^4 f(\theta)}{d\theta^4} + 2(n^2+1) \frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} + (n^2-1)^2 f(\theta) = 0$$

この一般解は、

$$f(\theta) = C_1 \cos(n-1)\theta + C_2 \sin(n-1)\theta + C_3 \sin(n+1)\theta + C_4 \cos(n+1)\theta$$

従つて所要の應力修正函數は、

$$F_\gamma = r^{n+1}(A \sin n\theta \cos \theta + B \cos n\theta \cos \theta + C \cos n\theta \sin \theta + D \sin n\theta \sin \theta) \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。所が堤體上下流面の  $\sigma_\theta, \tau_{\theta\gamma}$  は半無限三角形断面として求めたものと變らないはずであるから、(11)式による  $\sigma_\theta, \tau_{\theta\gamma}$  は次の條件を満足しなければならない。

$$(\Sigma_\theta)_{\theta=0} = 0, \quad (T_{\gamma\theta})_{\theta=0} = 0; \quad (\Sigma_\theta)_{\theta=\gamma} = 0, \quad (T_{\gamma\theta})_{\theta=\gamma} = 0$$

これより (1) 式の常數を定めると、

$$\left. \begin{aligned} B=0, \quad C &= -nA, \quad A \sin n\gamma \cos \gamma + C \cos n\gamma \sin \gamma + D \sin n\gamma \sin \gamma = 0, \\ A(n \cos n\gamma \cos \gamma - \sin n\gamma \sin \gamma) &+ C(-n \sin n\gamma \sin \gamma + \cos n\gamma \cos \gamma) \\ &+ D(n \cos n\gamma \sin \gamma + \sin n\gamma \cos \gamma) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\therefore D = A(n \cot n\gamma - \cot \gamma) \equiv -mA, \quad n^2 \sin^2 \gamma = \sin^2 n\gamma$$

$$\therefore \sin n\gamma = \pm n \sin \gamma \quad \dots\dots\dots (13)$$

この條件式は  $\pi < \gamma < 2\pi$  にて 2 つの實根  $n_0, n_1$  と複素數の根を有し、 $\gamma = \pi$  の時は 1, 2, 3, ...

…の實根,  $\gamma=2\pi$  の時は  $1/2, 1, 3/2, 2, \dots$  の實根,  $0 < \gamma < \pi$  には複素數の根のみを有する。  
 堰堤に於ては  $0 < \gamma < \pi$  であるから,  $m_k = a_k + ib_k$  として (13) 式に入れると,

$$\sin a_k \gamma \cosh b_k \gamma = \pm a_k \sin \gamma; \quad \cos a_k \gamma \sinh b_k \gamma = \pm b_k \sin \gamma$$

この式は完全に解くことは出来ないが, 近似的に次の様になる<sup>7)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \pm \frac{\pi(2k-1) - e_k}{2\gamma}, & b_k &= \pm \frac{1}{\gamma} \log \left\{ \frac{\pi(2k-1) - e_k}{\gamma} \sin \gamma \right\} \\ \text{但し, } e_k &= 4 \log \left\{ \frac{\pi(2k-1)}{\gamma} \sin \gamma / \{\pi(2k-1)\}, \quad k=2, 3, 4, \dots \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

かくして  $n_k$  が定まれば,  $n_k$  の實部, 虚部ともに境界條件を満足するから, (11) 式は結局次の様になる。

$$\begin{aligned} F_\gamma &= \Re \sum_{2,3,\dots}^{k-} (A_k - iB_k) r^{a_k+1} (n_k \cos n_k \theta \sin \theta + m_k \sin n_k \theta \sin \theta - \sin n_k \theta \cos \theta) \\ &= \Re \sum_{2,3,\dots}^{k-} (A_k - iB_k) r^{(a_k+1)+ib_k} \{ f_k(\theta) + i g_k(\theta) \} \dots \dots \dots (15) \\ &= \sum_{2,3,\dots}^{k-} r^{a_k+1} [ A_k \{ f_k(\theta) \cos \alpha_k - g_k(\theta) \sin \alpha_k \} + B_k \{ f_k(\theta) \sin \alpha_k + g_k(\theta) \cos \alpha_k \} ] \end{aligned}$$

茲に,  $\Re$  は實部をとることを意味し,  $a_{k(\gamma \neq 2\pi)} = b_k \log r$ ,

$$\begin{aligned} m_k &= \cot \gamma - n_k \cot n_k \gamma = (\cot \gamma - a_k \cot a_k \gamma) + i(b_k \tan a_k \gamma) \equiv m + im'' \\ \left. \begin{aligned} f_k(\theta) &= b_k \\ g_k(\theta) &= -a_k \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \sin \theta \sin a_k \theta \sinh b_k \theta & + m'' \\ & \sin \theta \sin a_k \theta \cosh b_k \theta & - m'' \end{aligned} \right\} \sin \theta \cos a_k \theta \sinh b_k \theta \\ & \left. \begin{aligned} & + a_k \\ & + b_k \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \sin a_k \theta \cosh b_k \theta \\ & \sin \theta \cos a_k \theta \cosh b_k \theta - \cos \theta \end{aligned} \end{aligned} \end{aligned} \left. \begin{aligned} & \cos a_k \theta \sinh b_k \theta \\ & \cos a_k \theta \sinh b_k \theta \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

(5) 應力修正函数による應力及變位. 各成分應力は (15) 式を應力の一般式

$$\sigma_r = \frac{\partial^2 F_\gamma}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial F_\gamma}{r \partial r}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F_\gamma}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial F_\gamma}{r \partial \theta} \right) \dots \dots \dots (16)$$

に代入して求められが, 必要な各項を計算すると次の通りである。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_\gamma}{\partial \theta^2} &= \sum_{2,3,\dots}^{k-} r^{a_k-1} [ A_k \{ f_k(\theta) \cos \alpha_k - g_k''(\theta) \sin \alpha_k \} + B_k \{ f_k''(\theta) \sin \alpha_k + g_k''(\theta) \cos \alpha_k \} ] \\ \frac{1}{r} \frac{\partial F_\gamma}{\partial r} &= \sum_{2,3,\dots}^{k-} r^{a_k-1} [ A_k \{ (a_k+1) \{ f_k(\theta) \cos \alpha_k - g_k(\theta) \sin \alpha_k \} - b_k \{ f_k(\theta) \sin \alpha_k + g_k(\theta) \cos \alpha_k \} \\ & \quad + B_k \{ (a_k+1) \{ f_k(\theta) \sin \alpha_k + g_k(\theta) \cos \alpha_k \} - b_k \{ f_k(\theta) \cos \alpha_k - g_k(\theta) \sin \alpha_k \} ] \\ \frac{\partial^2 F_\gamma}{\partial r^2} &= \sum_{2,3,\dots}^{k-} r^{a_k-1} [ A_k \{ -(2a_k+1) \{ f_k(\theta) \sin \alpha_k + g_k(\theta) \cos \alpha_k \} \\ & \quad + (a_k^2 + a_k - b_k^2) \{ f_k(\theta) \cos \alpha_k - g_k(\theta) \sin \alpha_k \} \\ & \quad + B_k \{ (2a_k+1) \{ f_k(\theta) \cos \alpha_k - g_k(\theta) \sin \alpha_k \} \\ & \quad + (a_k^2 + a_k - b_k^2) \{ f_k(\theta) \sin \alpha_k + g_k(\theta) \cos \alpha_k \} ] \end{aligned}$$

7) John H. A. Brautz: "The Stees Function and Photo-Elasticity Applied to Dam," Trans. Am. Soc. C. E., vol. 101, 1936, p. 1256.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F_\gamma}{\partial \theta} \right) = \sum_{2,3,\dots}^{k-1} r^{a_k-1} [A_k \{ a_k (f'_k(\theta) \cos \alpha_k - g'_k(\theta) \sin \alpha_k) - b_k (f'_k(\theta) \sin \alpha_k + g'_k(\theta) \cos \alpha_k) \} \\ + B_k \{ a_k (f'_k(\theta) \sin \alpha_k + g'_k(\theta) \cos \alpha_k) + b_k (f'_k(\theta) \cos \alpha_k - g'_k(\theta) \sin \alpha_k) \}]$$

茲に、

$$\left. \begin{aligned} f'_k(\theta) &= (m'_k b_k + m''_k a_k) \\ g'_k(\theta) &= (-m'_k a_k + m''_k b_k) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &+ (b_k^2 + 1 - a_k^2) \\ &- (2a_k b_k) \end{aligned} \left. \begin{aligned} &\sin \theta \sin a_k \theta \sinh b_k \theta \\ &\sin \theta \sin a_k \theta \cosh b_k \theta \end{aligned} \right\} \\ &+ (2a_k b_k) \left. \begin{aligned} &\sin \theta \cos a_k \theta \sinh b_k \theta \\ &+ (b_k^2 + 1 - a_k^2) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} &+ (m'_k a_k - m''_k b_k) \\ &+ (m'_k b_k + m''_k a_k) \end{aligned} \right\} \sin \theta \cos a_k \theta \cosh b_k \theta \\ &+ m'_k \left. \begin{aligned} &\cos \theta \sin a_k \theta \cosh b_k \theta \\ &+ m''_k \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} &- m''_k \\ &+ m'_k \end{aligned} \right\} \cos \theta \cos a_k \theta \sinh b_k \theta \\ f''_k(\theta) &= (b_k^2 + b_k - 3a_k^2 b_k) \\ g''_k(\theta) &= (a_k^2 - a_k - 3a_k b_k^2) \left. \begin{aligned} &\sin \theta \sin a_k \theta \sinh b_k \theta \\ &\sin \theta \sin a_k \theta \cosh b_k \theta \end{aligned} \right\} \\ &+ (2a_k b_k m'_k + m'_k b_k^2 - m'_k - a_k^2 m'_k) \\ &+ (-2a_k b_k m'_k + m''_k b_k^2 - m''_k - a_k^2 m'_k) \left. \begin{aligned} &\sin \theta \sin a_k \theta \cosh b_k \theta \\ &\sin \theta \cos a_k \theta \sinh b_k \theta \end{aligned} \right\} \\ &+ (2a_k b_k m'_k + m''_k + a_k^2 m'_k - b_k^2 m'_k) \\ &+ (2a_k b_k m'_k - m'_k - a_k^2 m'_k + b_k^2 m'_k) \left. \begin{aligned} &\sin \theta \cos a_k \theta \sinh b_k \theta \\ &\sin \theta \cos a_k \theta \cosh b_k \theta \end{aligned} \right\} \\ &+ (3a_k b_k^2 + a_k - a_k^2) \\ &+ (-3a_k^2 b_k + b_k + b_k^2) \left. \begin{aligned} &\cos \theta \sin a_k \theta \sinh b_k \theta \\ &\cos \theta \sin a_k \theta \cosh b_k \theta \end{aligned} \right\} \\ &+ (b_k^2 + 1 - a_k^2) \\ &- 2a_k b_k \left. \begin{aligned} &\cos \theta \sin a_k \theta \sinh b_k \theta \\ &\cos \theta \sin a_k \theta \cosh b_k \theta \end{aligned} \right\} \\ &+ 2a_k b_k \left. \begin{aligned} &\cos \theta \cos a_k \theta \sinh b_k \theta \\ &+ 2(a_k m'_k - b_k m''_k) \end{aligned} \right\} \\ &+ (b_k^2 + 1 - a_k^2) \left. \begin{aligned} &\cos \theta \cos a_k \theta \sinh b_k \theta \\ &+ 2(a_k m''_k + b_k m'_k) \end{aligned} \right\} \cos \theta \cos a_k \theta \cosh b_k \theta$$

次に應力修正函数

$$F_\gamma = \sum_{2,3,\dots}^{k-1} r^{n_k+1} (n_k \cos n_k \theta \sin \theta + m_k \sin n_k \theta \sin \theta - \sin n_k \theta \cos \theta)$$

に相當する變位函数  $\psi$  は

$$\nabla^2 F_\gamma = \frac{\partial^2 (r\psi)}{\partial r \partial \theta} = \sum_{2,3,\dots}^{k-1} 2n_k r^{n_k-1} \{ m_k \cos(n_k-1)\theta - (n_k+1) \sin(n_k-1)\theta \}$$

を満足し、而も  $\nabla^2 \psi = 0$  となるものであるから、

$$\psi = \sum_{2,3,\dots}^{k-1} \frac{2}{(n_k-1)} r^{n_k-1} \{ m_k \sin(n_k-1)\theta + (n_k+1) \cos(n_k-1)\theta \} \dots \dots \dots (17)$$

これから (15) 式に相當する變位函数を求め、一般式 (9) によつて變位を計算すると、

$$2\mu u_r = \Re \sum_{2,3,\dots}^{k-1} (A_k - iB_k) [ -(n_k+1)r^{n_k} \{ n_k \cos n_k \theta \sin \theta + m_k \sin n_k \theta \sin \theta \\ - \sin n_k \theta \cos \theta \} + 2(1-\sigma)r^{n_k} \{ m_k \cos(n_k-1)\theta - (n_k+1) \sin(n_k-1)\theta \} ]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{2,3,\dots}^{k=\infty} r^{\alpha_k} [A_k F_{rk}(\theta) + B_k G_{rk}(\theta) + 2(1-\sigma)\{A_k F'_{rk}(\theta) + B_k G'_{rk}(\theta)\}] \\
 2\mu u_{\gamma 0} &= \Re \sum_{2,3,\dots}^{k=\infty} (A_k - iB_k) [-r^{\alpha_k} \{(1-\alpha_k^2) \sin n_k \theta \sin \theta + m_k n_k \cos n_k \theta \sin \theta \\
 &\quad + m_k \sin n_k \theta \cos \theta\} + 2(1-\sigma) r^{\alpha_k} \{m_k \sin(n_k - 1)\theta + (n_k + 1) \cos(n_k - 1)\theta\}] \\
 &\quad + \sum_{2,3,\dots}^{k=\infty} r^{\alpha_k} [A_k F_{\theta k}(\theta) + B_k G_{\theta k}(\theta) + 2(1-\sigma)\{A_k F'_{\theta k}(\theta) + B_k G'_{\theta k}(\theta)\}]
 \end{aligned} \tag{18}$$

茲に、 $F_{rk}(\theta) = \{b_k g_{rk}(\theta) - (a_k + 1) f_{rk}(\theta)\} \cos \alpha_k + \{b_k f_{rk}(\theta) + (a_k + 1) g_{rk}(\theta)\} \sin \alpha_k$   
 $G_{rk}(\theta) = \{b_k f'_{rk}(\theta) - (a_k + 1) f'_{rk}(\theta)\} \sin \alpha_k - \{b_k f_{rk}(\theta) + (a_k + 1) g_{rk}(\theta)\} \cos \alpha_k$   
 $F'_{rk}(\theta) = f'_{rk}(\theta) \cos \alpha_k - g'_{rk}(\theta) \sin \alpha_k$ ,  $G'_{rk}(\theta) = f'_{rk}(\theta) \sin \alpha_k + g'_{rk}(\theta) \cos \alpha_k$   
 $F_{\theta k}(\theta) = -f_{\theta k}(\theta) \cos \alpha_k + g_{\theta k}(\theta) \sin \alpha_k$ ,  $G_{\theta k}(\theta) = -g_{\theta k}(\theta) \cos \alpha_k - f_{\theta k}(\theta) \sin \alpha_k$   
 $F'_{\theta k}(\theta) = f'_{\theta k}(\theta) \cos \alpha_k - g'_{\theta k}(\theta) \sin \alpha_k$ ,  $G'_{\theta k}(\theta) = g'_{\theta k}(\theta) \cos \alpha_k + f'_{\theta k}(\theta) \sin \alpha_k$

$$\begin{aligned}
 f_{rk}(\theta) &= b_k \left. \begin{array}{l} \sin \theta \sin \alpha_k \theta \sinh b_k \theta \\ \sin \theta \sin \alpha_k \theta \cosh b_k \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} + m_k' \\ + m_k'' \end{array} \\
 g_{rk}(\theta) &= -a_k \left. \begin{array}{l} \sin \theta \cos \alpha_k \theta \sinh b_k \theta \\ \sin \theta \cos \alpha_k \theta \cosh b_k \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} + a_k \\ + b_k \end{array} \\
 &\quad - m_k'' \left. \begin{array}{l} \sin \theta \cos \alpha_k \theta \sinh b_k \theta \\ \sin \theta \cos \alpha_k \theta \cosh b_k \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} - \cos \theta \sin \alpha_k \theta \cosh b_k \theta \\ - \cos \theta \cos \alpha_k \theta \sinh b_k \theta \end{array} \\
 f'_{rk}(\theta) &= m_k'' \left. \begin{array}{l} \sin(\alpha_k - 1)\theta \sinh b_k \theta \\ \sin(\alpha_k - 1)\theta \cosh b_k \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} -(a_k + 1) \\ - b_k \end{array} \\
 g'_{rk}(\theta) &= -m_k' \left. \begin{array}{l} \cos(\alpha_k - 1)\theta \sinh b_k \theta \\ \cos(\alpha_k - 1)\theta \cosh b_k \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} + m_k' \\ + m_k'' \end{array} \\
 f_{\theta k}(\theta) &= (m_k' b_k + m_k'' a_k) \left. \begin{array}{l} \sin \theta \sin \alpha_k \theta \sinh b_k \theta \\ \sin \theta \sin \alpha_k \theta \cosh b_k \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} + (1 - a_k^2 + b_k^2) \\ - 2a_k b_k \end{array} \\
 g_{\theta k}(\theta) &= -(m_k' a_k - m_k'' b_k) \left. \begin{array}{l} \sin \theta \cos \alpha_k \theta \sinh b_k \theta \\ \sin \theta \cos \alpha_k \theta \cosh b_k \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} + (m_k' a_k - m_k'' b_k) \\ + (m_k' b_k + m_k'' a_k) \end{array} \\
 &\quad + 2a_k b_k \left. \begin{array}{l} \sin \theta \cos \alpha_k \theta \sinh b_k \theta \\ \sin \theta \cos \alpha_k \theta \cosh b_k \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} + (m_k' a_k - m_k'' b_k) \\ + (m_k' b_k + m_k'' a_k) \end{array} \\
 &\quad + m_k' \left. \begin{array}{l} \cos \theta \sin \alpha_k \theta \cosh b_k \theta \\ \cos \theta \cos \alpha_k \theta \sinh b_k \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} - m_k' \\ + m_k' \end{array} \\
 f'_{\theta k}(\theta) &= b_k \left. \begin{array}{l} \sin(\alpha_k - 1)\theta \sinh b_k \theta \\ \sin(\alpha_k - 1)\theta \cosh b_k \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} + m_k' \\ + m_k'' \end{array} \\
 g'_{\theta k}(\theta) &= -(a_k + 1) \left. \begin{array}{l} \cos(\alpha_k - 1)\theta \sinh b_k \theta \\ \cos(\alpha_k - 1)\theta \cosh b_k \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} + (a_k + 1) \\ + b_k \end{array} \\
 &\quad - m_k'' \left. \begin{array}{l} \cos(\alpha_k - 1)\theta \sinh b_k \theta \\ \cos(\alpha_k - 1)\theta \cosh b_k \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} + (a_k + 1) \\ + b_k \end{array}
 \end{aligned}$$

(6) 接觸線附近の應力及變位。基礎との接觸線附近に於ける堤體の應力を與える應力函數は、(3), (6), (15) 式を用いて

$$F = F_p + F_q + F_r \tag{19}$$

となるから、これより所要の應力が計算される。同じく變位は (10), (18) を用いて、

$$u_r = u_{pr} + u_{qr} + u_{rr}, \quad u_\theta = u_{p\theta} + u_{q\theta} + u_{r\theta} \tag{20}$$



として計算されることになる。

3. 基礎の應力分布及變位

(1) 鉛直力の影響. 半無限平面の境界面に鉛直集中荷重  $P$  が作用する場合の應力函数  $F_p$  は、座標軸を圖-2 の如く定めると<sup>8)</sup>,

$$F_p = \frac{P}{\pi} r \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \theta \quad \dots\dots\dots (21)$$

であり、各成分應力は

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\sin \theta}{r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

又境界面より  $a$  なる距離にある水平線上の應力は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{r} = -\frac{2P}{\pi a} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\sin^3 \theta}{r} = -\frac{2P}{\pi a} \sin^3 \theta \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r} = -\frac{2P}{\pi a} \sin^2 \theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

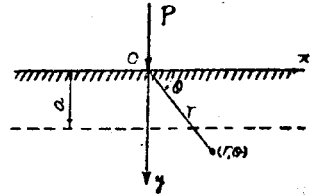


圖-2

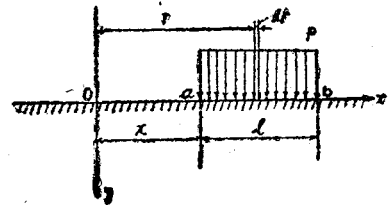


圖-3

次に變位函数

$$\psi = 2 \frac{P}{\pi} \frac{\log r}{r} \cos \theta + f(r) + \frac{F(\theta)}{r}$$

を條件式  $\nabla^2 \psi = 0$  に入れて  $f(r)$ ,  $F(\theta)$  を定めると、

$$\psi = 2 \frac{P}{\pi} \left\{ \frac{\log r}{r} \cos \theta + \frac{1}{r} \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \theta + \frac{a}{r} \sin \theta + \frac{b}{r} \cos \theta + c \log r \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

茲に  $a, b, c$  は境界条件から決定さるべき常數である。(24) 式を變位の一般式 (9) に入れて  $u_{Pr}$ ,  $u_{P\theta}$  を求め、境界条件

$$\theta = \pi/2 \text{ にて } u_{P\theta} = 0; \quad \theta = \pi/2, \quad r = d \text{ にて } u_{Pr} = 0$$

から常數を定めると、

$$c = a = 0, \quad b = (1 - \log d)$$

となるから、結局次の變位式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} 2\mu u_{Pr} &= \frac{P}{\pi} \left[ -\left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \theta + 2(1 - \sigma) \left\{ \sin \theta \log \frac{d}{r} + \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \theta \right\} \right] \\ 2\mu u_{P\theta} &= \frac{P}{\pi} \left[ -\cos \theta + \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \theta + 2(1 - \sigma) \left\{ \cos \theta \log \frac{d}{r} - \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \theta \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

特に  $\theta = 0, \pi$  に於ては、

$$2\mu u_{Pr} = -P \left( \frac{1}{2} - \sigma \right), \quad 2\mu u_{P\theta} = \pm \frac{P}{\pi} \left\{ 2(1 - \sigma) \log \frac{d}{r} - 1 \right\} \quad \dots\dots\dots (25')$$

8) Timoshenko: "Theory of Elasticity," 1st. Edition, 1934, p. 82.

上式の複號にて上は  $\theta=0$ , 下は  $\theta=\pi$  の場合である。

等分布荷重  $p$  が作用する場合は, 上記の結果を載荷重區間に亘つて積分すればよく, 圖-3 の如く  $a$  より  $b$  まで長さ  $l$  の區間に等分布荷重  $p$  が作用すれば, 鉛直方向の變位:—

$$\left. \begin{aligned} O \text{ 點, } 2\mu u_{\rho\theta} &= \frac{p}{\pi} \left[ 2(1-\sigma) \left\{ (x+l) \log \frac{d}{x+l} - x \log \frac{d}{x} + l \right\} - l \right] \\ a \text{ 點, } 2\mu u_{\rho\theta} &= \frac{p}{\pi} \left[ 2(1-\sigma) \left\{ l \log \frac{l}{d} + l \right\} - l \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)_a$$

水平方向の變位:—

$$\left. \begin{aligned} O \text{ 點, } 2\mu u_{\rho r} &= -p \left( \frac{1}{2} - \sigma \right) l \\ a \text{ 點, } 2\mu u_{\rho r} &= -p \left( \frac{1}{2} - \sigma \right) l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)_b$$

(2) 水平力の影響. 半無限平面の境界面に水平集中荷重  $Q$  が作用する場合の應力函數  $F_Q$  は, 座標軸を圖-4 の如く定めると,

$$F_Q = -\frac{Q}{\pi} r \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \theta \dots\dots\dots (27)$$

であり, 各應力成分は

$$\sigma_r = -\frac{2Q}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

又境界面より  $a$  なる距離にある水平線上の應力は,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2Q}{\pi} \frac{\cos^3 \theta}{r} = -\frac{2Q}{\pi a} \cos^3 \theta \sin \theta \\ \sigma_y &= -\frac{2Q}{\pi} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{r} = -\frac{2Q}{\pi a} \sin^3 \theta \sin \theta \\ \tau_{xy} &= -\frac{2Q}{\pi} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{r} = -\frac{2Q}{\pi a} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (29)$$

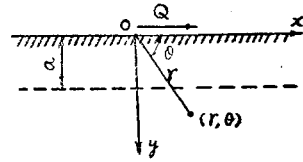


圖-4

次に變位函數

$$\phi = -2 \frac{Q}{\pi} \frac{\log r}{r} \sin \theta + f(r) + \frac{F(\theta)}{r}$$

を條件式  $\nabla^2 \phi = 0$  に入れて  $f(r)$ ,  $F(\theta)$  を定めると,

$$\phi = -2 \frac{Q}{\pi} \left\{ \frac{\log r}{r} \sin \theta - \frac{1}{r} \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \theta - \frac{a}{r} \sin \theta - \frac{b}{r} \cos \theta + c \log r \right\} \dots\dots\dots (30)$$

これを變位の一般式 (9) に入れて  $u_{\rho r}$ ,  $u_{\rho\theta}$  を求め, 境界條件

$$\theta=0, \pi \text{ 及 } r=d \text{ にて } u_{\rho r}=0, u_{\rho\theta}=0; \quad \theta=\pi/2 \text{ にて } u_{\rho r}=0$$

から常數を定めると.

$$a = \log d - 1, \quad b = 0, \quad c = -(1-2\sigma)\pi / \{4(1-\sigma)d\}$$

となるから, 結局次の變位式が得られる.

$$2\mu u_{\rho r} = \frac{Q}{\pi} \left[ \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \theta - 2(1-\sigma) \left\{ \cos \theta \log \frac{r}{d} + \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \theta \right\} \right]$$

$$2\mu u_{\theta} = \frac{Q}{\pi} \left[ \sin \theta + \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \theta - 2(1-\sigma) \left\{ \sin \theta \log \frac{d}{r} + \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \theta + \frac{1-2\sigma}{4(1-\sigma)} \frac{\pi}{d} r \right\} \right] \dots\dots\dots (31)$$

特に  $\theta=0, \pi$  に於ては,

$$2\mu u_{\theta} = \pm \frac{Q}{\pi} 2(1-\sigma) \log \frac{d}{r}, \quad 2\mu u_{\theta} = \frac{(1-2\sigma)}{2} Q \left( 1 - \frac{r}{d} \right) \dots\dots\dots (31)$$

上式の複號にて上は  $\theta=0$ , 下は  $Q=\pi$  の場合である。

等分布荷重  $q$  が  $a$  より  $b$  まで長さ  $l$  に亘つて水平に作用すれば (圖-3 参照),

鉛直方向の變位:—

$$\left. \begin{aligned} O \text{ 點, } 2\mu u_{\theta} &= \frac{(1-2\sigma)}{2} ql \left( 1 - \frac{l+2x}{2d} \right) \\ a \text{ 點, } 2\mu u_{\theta} &= \frac{(1-2\sigma)}{2} ql \left( 1 - \frac{l}{2d} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)_a$$

水平方向の變位:—

$$\left. \begin{aligned} O \text{ 點, } 2\mu u_{\theta} &= \frac{q}{\pi} 2(1-\sigma) \left\{ (x+l) \log \frac{d}{x+l} - x \log \frac{d}{x} + l \right\} \\ a \text{ 點, } 2\mu u_{\theta} &= \frac{q}{\pi} 2(1-\sigma) \left\{ l \log \frac{d}{l} + l \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)_b$$

4. 堤體及基礎の接觸線附近の應力分布

基礎の影響を加味した場合, 水壓及自重による堤體內接觸線附近の應力  $\sigma_r, \sigma_{\theta}, \tau_{r\theta}$  は (19) 式の應力函数  $F$  を用いて計算される。今堤頂を通る鉛直線及水平線を 圖-5 の如く  $x', y'$  軸とすれば,  $\sigma_{x'}$  は鉛直直應力,  $\sigma_{y'}$  は水平直應力,  $\tau_{x'y'}$  は剪斷應力となり, これらと  $\sigma_r, \sigma_{\theta}, \tau_{r\theta}$  との関係は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_r \cos^2(\theta-\beta) + \sigma_{\theta} \sin^2(\theta-\beta) - 2\tau_{r\theta} \sin(\theta-\beta) \cos(\theta-\beta) \\ \sigma_{y'} &= \sigma_r \sin^2(\theta-\beta) + \sigma_{\theta} \cos^2(\theta-\beta) + 2\tau_{r\theta} \sin(\theta-\beta) \cos(\theta-\beta) \\ \tau_{x'y'} &= (\sigma_r - \sigma_{\theta}) \sin(\theta-\beta) \cos(\theta-\beta) + \tau_{r\theta} \{ \cos^2(\theta-\beta) - \sin^2(\theta-\beta) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

次に接觸線附近の堤體の變位  $u_r, u_{\theta}$  は (20) 式を用いて計算され, 變換式

$$\left. \begin{aligned} u_{x'} &= u_r \cos(\theta-\beta) - u_{\theta} \sin(\theta-\beta), \\ u_{y'} &= u_r \sin(\theta-\beta) + u_{\theta} \cos(\theta-\beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

によつて鉛直及水平方向の變位  $u_{x'}, u_{y'}$  が求められる。

上記の方法で求めた應力  $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}$  中には應力修正函数中の常數  $A_k, B_k (k=2, 3, \dots\dots)$  が含まれ, 變位  $u_{x'}, u_{y'}$  中には境界條件から決定さるべき常數  $a, b, c$  が含まれている。これらの常數は接觸線に於ける堤體の應力  $\sigma_{x'}, \tau_{x'y'}$  と貯水池底面に働く水壓とを外力として受ける基礎頂面の變位を堤體

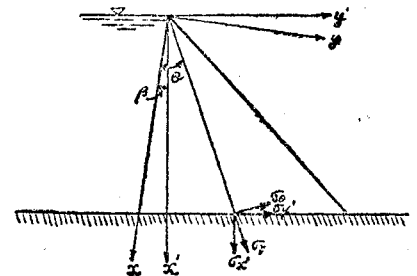


圖-5

底面の變位と全く一致せしめると云ふ條件のもとに決定すればよい。しかしながら兩者の接觸線上のすべての點で變位を一致せしめることは計算上不可能であつて、實用計算としては或有限個の代表的な點で一致せしめる外はない。なおこの場合基礎の變位は、堰體底面の各點に於ける應力を算出しこの應力分布を適當な數の等分布荷重に換算して基礎頂面に作用せしめると、比較的簡単に計算することが出来る。

かくして弾性基礎上の弾性堰堤の接觸線附近の應力分布を求め、これらが兩者の弾性性質の差異によつて如何に影響されるかを明かにし、高堰堤の合理的設計に資すべき重要な關係を知ることが出来るが、數値計算例に就て詳細な説明をしたいと思う。

5. 數 値 計 算 例

相模川堰堤を標準にとつて堰堤各部の寸法を圖-6 の如く定める。

(1) 水壓及自重による堰體底面の應力分布。  
 (2) (5) 式によつて必要な係數を求め、(1), (4) 式によつて底面①～⑥點の應力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  を計算し、更に (33) 式によつて直角座標系に於ける應力  $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}$  に換算した結果は表-1 の通りである。この場合貯水池は満水時を考へ、堰體材料の單位體積の重量を  $2.4 \text{ t/m}^3$ 、水のそれを  $1 \text{ t/m}^3$  とした。

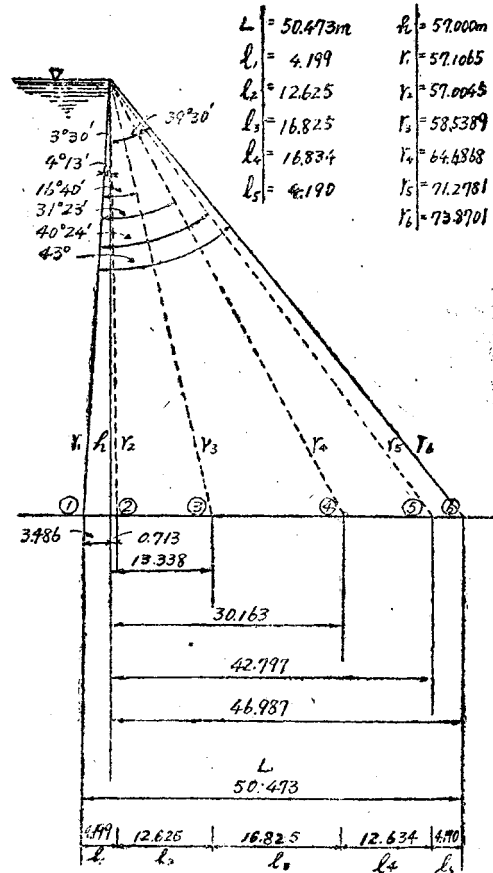


表-1. 水壓及自重による堰體底面の應力

圖-6 堰堤寸法

鉛直方向應力  $\sigma'_x(\text{t/m}^2)$

	①	②	③	④	⑤	⑥
水 壓	65.090	53.932	20.396	- 24.312	- 57.894	- 69.029
自 重	- 127.350	- 117.540	- 88.059	- 48.764	- 19.237	- 9.447
計	- 62.260	- 63.608	- 67.663	- 73.076	- 77.131	- 78.476

水平方向應力  $\sigma'_{y'}(\text{t/m}^2)$

	①	②	③	④	⑤	⑥
水 壓	- 56.543	- 55.741	- 53.331	- 50.119	- 47.706	- 46.908
自 重	- 0.477	- 0.972	- 2.455	- 4.443	- 5.927	- 6.420
計	- 57.020	- 56.713	- 55.786	- 54.552	- 53.633	- 53.328

剪断應力  $\tau_{xy}$  (t/m<sup>2</sup>)

	①	②	③	④	⑤	⑥
水 壓	- 7.468	- 11.580	- 23.942	- 40.419	- 52.798	- 56.903
自 重	7.790	6.494	2.599	- 2.591	- 6.496	- 7.788
計	0.322	- 5.086	- 21.343	- 43.010	- 59.294	- 64.691

(2) 水壓及自重による堤體底面の變位. (10) 式によつて底面 ①~⑥ 點の變位  $u_{yr}, u_{y0}; u_{gr}, u_{g0}$  を求め, (34) 式によつて  $u_{Ds}, u_{Dy}$  (但し添字  $D$  は堤體を意味する) に換算した結果は,

$$\left. \begin{aligned} 2\mu u_{Ds} &= C_{1(p+g)} + (1-\sigma)\{0.99813a - 0.06105b + Kc\} \\ 2\mu u_{Dy} &= C_{2(p+g)} + (1-\sigma)\{-0.06105a - 0.99813b + 57.000c\} \end{aligned} \right\}$$

となり,  $C_1, C_2$  及  $K$  は表-2 の如く與えられる.

表-2 a, b 水壓及自重による堤體底面の變位

表-2 a

	水 壓		自 重	
	$C_{1p}$	$C_{2p}$	$C_{1g}$	$C_{2g}$
①	2113.1643 - 488.7377 $\sigma$	3892.3850 - 3991.7421 $\sigma$	-3865.3334 + 3850.6307 $\sigma$	-3409.7692 + 3171.3121 $\sigma$
②	1482.7815 + 101.6275 $\sigma$	3656.5886 - 4005.8669 $\sigma$	-3302.7930 + 3331.9438 $\sigma$	-3412.5070 + 3688.3085 $\sigma$
③	- 515.5299 + 1875.8618 $\sigma$	2968.4042 - 3786.7302 $\sigma$	-1675.5028 + 1549.5895 $\sigma$	-3434.2405 + 5007.4751 $\sigma$
④	-3421.9483 + 4240.8298 $\sigma$	2098.0503 - 2883.4329 $\sigma$	344.2781 - 1348.4343 $\sigma$	-3492.0043 + 6216.1855 $\sigma$
⑤	-5787.1094 + 6016.8782 $\sigma$	1479.8683 - 1745.8566 $\sigma$	1750.1316 - 3918.1346 $\sigma$	-3557.7442 + 6711.4739 $\sigma$
⑥	-6606.1052 + 6606.1052 $\sigma$	1281.7491 - 1281.7491 $\sigma$	2196.9496 - 4846.2155 $\sigma$	-3586.8581 + 6800.8523 $\sigma$

表-2 b

(3) 應力修正函數とそれによる堤體底面の應力及變位. 本例では頂角  $\gamma =$

	$K$
①	3.4864
②	- 0.713
③	- 13.3340
④	- 30.1585
⑤	- 42.7968
⑥	- 46.9873

43° にして,

$$\left. \begin{aligned} \sin a_k \gamma \cosh b_k \gamma &= \pm a_k \sinh \gamma \\ \cos a_k \gamma \sinh b_k \gamma &= \pm b_k \sin \gamma \end{aligned} \right\}$$

を満足する  $a_k, b_k$  は例えば,

$$a_2 = 5.638746, \quad b_2 = 2.860375; \quad a_3 = 10.095970, \quad b_3 = 3.556865$$

$$\therefore n_2 = 5.638746 + i 2.860375, \quad n_3 = 10.095970 + i 3.556865$$

である. これらを用いて (16), (33) 式により應力修正函數による堤體底面 ①~⑥ 點の應力を求めると表-3, 4 の如くなる. 同様に (18), (34) 式によつて計算した變位は表-5 の如く與えられる. この内表-4 は表-3 に於ける  $r_1, r_2, \dots, r_6$  の値を計算の便宜上何れも  $r_2$  の値に換算したものであり, 表-5 に於ても同様に  $r_2$  の値に換算して置いた.

(4) 基礎の變位. 以上の計算によつて堤體底面に於ける ①~⑥ 點の應力が求められたが, 便宜上 ①~②, ②~③, …… , ⑤~⑥ の各區間を夫々等分布する應力に換算して夫々鉛直及切線方向の應力度を決定し, これらの應力と堰堤上流側貯水池水壓を外力として受ける場合の基礎の變位を求めよう. この場合 (25), (26), (31), (32) 式を適用するが, 特に問題となる重要な點は之

表-3.4 應力修正函數による堤體底面の應力

$\sigma_x'$	
①	$14.429 r_1^{a_2-1} A_2 + 71.576 r_1^{a_2-1} B_2 - 144.333 r_1^{a_3-1} A_3 - 161.841 r_1^{a_3-1} B_3$
②	$- 8.381 r_2'' '' + 48.817 r_2'' '' - 1.092 r_2'' '' - 107.778 r_2'' ''$
③	$- 6.443 r_3'' '' - 20.985 r_3'' '' - 7.061 r_3'' '' + 195.343 r_3'' ''$
④	$15.822 r_4'' '' - 23.480 r_4'' '' + 14.888 r_4'' '' - 109.980 r_4'' ''$
⑤	$- 9.018 r_5'' '' + 20.225 r_5'' '' - 4.273 r_5'' '' + 22.722 r_5'' ''$
⑥	$- 22.335 r_6'' '' + 37.488 r_6'' '' - 23.811 r_6'' '' + 127.094 r_6'' ''$
$\sigma_y'$	
①	$0.054 r_1^{a_2-1} A_2 + 0.054 r_1^{a_2-1} B_2 + 0.540 r_1^{a_3-1} A_3 - 0.603 r_1^{a_3-1} B_3$
②	$- 5.440 r_2'' '' + 5.041 r_2'' '' + 8.007 r_2'' '' - 57.096 r_2'' ''$
③	$- 47.213 r_3'' '' + 21.471 r_3'' '' + 93.429 r_3'' '' - 202.100 r_3'' ''$
④	$- 64.320 r_4'' '' + 27.258 r_4'' '' - 161.929 r_4'' '' + 114.597 r_4'' ''$
⑤	$- 30.653 r_5'' '' + 26.562 r_5'' '' - 87.170 r_5'' '' + 131.408 r_5'' ''$
⑥	$- 15.177 r_6'' '' + 25.475 r_6'' '' - 16.181 r_6'' '' + 86.366 r_6'' ''$
$\tau_{xy}'$	
①	$- 0.883 r_1^{a_2-1} A_2 - 4.378 r_1^{a_2-1} B_2 + 8.829 r_1^{a_3-1} A_3 + 9.859 r_1^{a_3-1} B_3$
②	$12.032 r_2'' '' - 25.046 r_2'' '' + 10.551 r_2'' '' + 124.937 r_2'' ''$
③	$31.759 r_3'' '' - 31.641 r_3'' '' - 2.756 r_3'' '' - 51.467 r_3'' ''$
④	$- 4.612 r_4'' '' + 4.304 r_4'' '' + 55.030 r_4'' '' - 119.623 r_4'' ''$
⑤	$- 21.031 r_5'' '' + 24.667 r_5'' '' - 40.130 r_5'' '' + 78.774 r_5'' ''$
⑥	$- 18.411 r_6'' '' + 30.903 r_6'' '' - 19.628 r_6'' '' + 104.768 r_6'' ''$

表-4

$\sigma_x'$	
①	$14.549 r_2^{a_2-1} A_2 + 72.173 r_2^{a_2-1} B_2 - 146.678 r_2^{a_3-1} A_3 - 163.863 r_2^{a_3-1} B_3$
②	$- 8.381 '' + 48.817 '' + 1.092 '' - 107.778 ''$
③	$- 7.288 '' - 23.511 '' - 8.969 '' + 248.138 ''$
④	$28.037 '' - 41.607 '' + 45.208 '' - 333.961 ''$
⑤	$- 25.427 '' + 57.025 '' - 31.970 '' + 170.003 ''$
⑥	$- 74.323 '' + 124.747 '' - 245.750 '' + 1311.718 ''$
$\sigma_y'$	
①	$0.054 r_2^{a_2-1} A_2 + 72.173 r_2^{a_2-1} B_2 - 0.549 r_2^{a_3-1} A_3 - 0.613 r_2^{a_3-1} B_3$
②	$- 5.440 '' + 5.041 '' + 8.007 '' - 57.096 ''$
③	$- 53.404 '' + 24.286 '' + 125.031 '' - 256.722 ''$
④	$- 113.975 '' + 48.301 '' - 491.707 '' + 347.931 ''$
⑤	$- 86.428 '' + 74.893 '' - 652.194 '' + 983.176 ''$
⑥	$- 50.504 '' + 84.772 '' - 167.002 '' + 891.371 ''$

表5 應力修正係數による基礎底面の變位

		$\sigma_{x'y'}$				
①	-	0.890 $r_2^{0.9-1} A_2$	-	4.415 $r_2^{1.0-1} B_2$	+ 8.792 $r_2^{0.9-1} A_3$	+ 10.019 $r_2^{0.9-1} B_3$
②		12.032 "	-	25.046 "	+ 10.551 "	+ 124.937 "
③		35.245 "	-	35.790 "	- 3.500 "	- 65.377 "
④	-	8.172 "	+ 7.627 "	+ 167.102 "	- 363.242 "	
⑤	-	59.298 "	+ 69.550 "	- 300.247 "	+ 589.376 "	
⑥	-	61.266 "	+ 102.835 "	- 202.578 "	+ 1081.295 "	

		$2\mu M_{xy}$			
①	(	7.9695 - 7.9695 $\sigma$ ) $r_2^{0.9} A_2$	(+ 8.6613 - 8.6613 $\sigma$ ) $r_2^{0.9} B_2$	(- 18.9808 + 18.9808 $\sigma$ ) $r_2^{0.9} A_3$	(- 8.7124 + 8.7124 $\sigma$ ) $r_2^{0.9} B_3$
②	(	2.1506 - 1.7450 $\sigma$ ) "	(+ 7.4896 - 8.6441 $\sigma$ ) "	(- 3.0624 + 4.1912 $\sigma$ ) "	(- 9.4665 + 15.0058 $\sigma$ ) "
③	(	-3.1147 + 9.3328 $\sigma$ ) "	(- 4.5721 - 4.1949 $\sigma$ ) "	(- 4.8561 - 8.3279 $\sigma$ ) "	(+ 22.5822 + 2.1309 $\sigma$ ) "
④	(	6.7744 + 4.1071 $\sigma$ ) "	(- 4.2039 - 8.2614 $\sigma$ ) "	(- 0.6802 + 30.9079 $\sigma$ ) "	(- 35.0109 - 22.9303 $\sigma$ ) "
⑤	(	20.2689 - 16.7084 $\sigma$ ) "	(+ 20.8878 - 25.9108 $\sigma$ ) "	(+ 87.2392 - 70.5577 $\sigma$ ) "	(+ 35.0109 - 22.9303 $\sigma$ ) "
⑥	(	23.2552 - 26.2552 $\sigma$ ) "	(+ 34.1677 - 31.1677 $\sigma$ ) "	(+ 176.5712 - 176.5712 $\sigma$ ) "	(+ 146.8296 - 146.8296 $\sigma$ ) "

		$2\mu M_{xy}$			
①	(	11.6522 - 11.6522 $\sigma$ ) $r_2^{0.9} A_2$	(- 3.6503 + 3.6503 $\sigma$ ) $r_2^{0.9} B_2$	(- 11.4027 + 11.4027 $\sigma$ ) $r_2^{0.9} A_3$	(+ 20.4549 - 20.4549 $\sigma$ ) $r_2^{0.9} B_3$
②	(	11.5227 - 11.6470 $\sigma$ ) "	(- 8.4852 + 3.9988 $\sigma$ ) "	(- 11.3474 + 1.2599 $\sigma$ ) "	(+ 18.7789 - 7.9053 $\sigma$ ) "
③	(	5.4224 - 2.4510 $\sigma$ ) "	(- 5.1106 - 1.6205 $\sigma$ ) "	(+ 4.5594 - 8.4810 $\sigma$ ) "	(- 20.9258 + 10.2821 $\sigma$ ) "
④	(	-18.1510 - 17.1613 $\sigma$ ) "	(+ 4.7886 + 0.4370 $\sigma$ ) "	(- 18.9232 + 24.8400 $\sigma$ ) "	(- 30.4558 + 12.1517 $\sigma$ ) "
⑤	(	-35.6727 + 32.8356 $\sigma$ ) "	(+ 15.9536 - 9.8138 $\sigma$ ) "	(- 142.4989 + 134.5672 $\sigma$ ) "	(+ 98.4905 - 58.7386 $\sigma$ ) "
⑥	(	-38.3879 + 38.3879 $\sigma$ ) "	(+ 19.0538 - 19.0538 $\sigma$ ) "	(- 162.5307 + 162.5307 $\sigma$ ) "	(+ 149.6637 - 149.6637 $\sigma$ ) "

等の式に含まれる  $d$  の値の決定であつて、特別の境界條件がない限り一律に決定することは困難である。勿論基礎の弾性性質によつて相當の變化をすることが考えられ、今後の理論的及實驗的研究に俟つものが尠くない。なお (25') 式より明かな如く、境界面に鉛直集中荷重  $P$  が働く場合、境界面に於ける切線方向の變位は荷重作用點からの距離に關係なく、 $P(1/2-\sigma)$  だけ作用點の方向に惹起されることになるが、この點にも疑問があり、變位誘導中の微分方程式を一層嚴密に解かないと妥當な結果を得難い様である。しかしながら今假りに基礎岩盤の單位體積重量を  $2.6t/m^3$ 、鉛直平均等分布荷重を  $50t/m^2$  とすれば、境界面より  $d=20m$  の距離に於ける應力は荷重にものが自重によるものの約 3% となる。而も  $d=20m$  とした場合の接觸線に沿う應力分布状態は、米國の Grand Coulee 堰堤の應力計算結果<sup>9)</sup> と殆ど一致することが確められたので、本研究では一先ず  $d=20m$  を採用して計算することとした。

斯くして堤體及基礎につき接觸線上の各點の變位を得れば、兩者の變位を一致せしめると云う條件によつて常數  $a, b, c, A_2, B_2, \dots$  を定めればよい。ここでは計算の便宜上①、④及⑥の3點に於ける鉛直及切線方向の變位を夫々一致せしめる様にしたから、決定し得べき常數は6個である。應力修正函數の性質を一應具體的に吟味して、變位に最も大きい影響を與えるものとして  $A_2, B_2, B_3$  を選び(表-5参照)、これらと  $a, b, c$  の3常數と以て所要の常數とした。變位を合致せしめる點を更に増加して多くの應力修正函數を用いるほど、満足な結果が得られるはずであるが、それだけ計算が煩雜になり實際問題として頗る困難である。

(5) 計算結果とその考察 堤體及基礎の弾性性質即ち弾性係數  $E$  及ポアソン比  $\sigma$  を表-6(添

表-6 堤體及基礎の弾性性質の假定

(1) 弾性係數と同一とし、ポアソン比を變化した場合

	$\sigma_D$	$\sigma_F$	$E_D : E_F$	$\mu_D/\mu_F$	備 考
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	1 : 1	$\frac{35}{36}$	$\frac{\mu_D}{\mu_F} = \frac{\frac{E_D}{2(1+\sigma_D)}}{\frac{E_F}{2(1+\sigma_F)}} = \frac{E_D(1+\sigma_F)}{E_F(1+\sigma_D)} = \frac{(1+\sigma_F)}{(1+\sigma_D)}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1 : 1	1	
3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	1 : 1	$\frac{49}{48}$	

(2) ポアソン比を同一とし、弾性係數の比を變化した場合

	$\sigma_D : \sigma_F$	$E_D : E_F$	$\mu_D/\mu_F$	圖-7 中に使用する線圖
1	1 : 1	1 : 1	1	實 線
2	1 : 1	1 : 2	$\frac{1}{2}$	破 線
3	1 : 1	2 : 1	2	鎖 線
4	1 : 1	1 : $\infty$	0	點 線

9) 前掲 7): p. 1297.



表-7 堤體のポアソン比を變化した場合の應力分布 (t/m<sup>3</sup>)

		①	②	③	④	⑤	⑥
$\sigma_x$	直線分布	- 62.260	- 63.608	- 67.663	- 73.076	- 77.131	- 78.476
	1	- 23.572	- 40.725	- 90.064	- 68.518	- 67.313	- 105.379
	2	- 25.608	- 40.877	- 89.572	- 69.051	- 66.956	- 104.985
	3	- 25.892	- 40.424	- 89.620	- 69.673	- 66.222	- 103.837
$\sigma_y$	直線分布	- 57.020	- 56.713	- 55.786	- 54.552	- 53.633	- 53.328
	1	- 56.876	- 52.930	- 43.127	- 71.965	- 86.391	- 71.608
	2	- 56.882	- 52.557	- 39.533	- 65.800	- 83.683	- 71.341
	3	- 56.884	- 52.291	- 37.301	- 62.112	- 81.731	- 70.561
$\tau_{xy}$	直線分布	0.322	- 5.086	- 21.343	- 43.010	- 59.294	- 64.691
	1	- 2.044	- 18.840	- 26.168	- 23.972	- 70.551	- 86.866
	2	- 1.920	- 19.405	- 27.761	- 22.929	- 68.880	- 86.542
	3	- 1.930	- 19.997	- 28.963	- 22.197	- 67.429	- 85.596

字 D, F は夫々堤體及基礎を意味する) の如く變化し、數値計算を行つた結果は次の通りである。

先ず (1) の場合は、 $\mu_D/\mu_F$  の變化も僅少であつて、表-7 の如く接觸線に於ける應力分布に對する彈性性質の影響はさほど著しいものとは認め難い様である。しかし半無限三角形断面とし基礎の影響を考えない場合堤體底面の應力分布が直線的に變化する事實とは大に趣を異にし、特に鉛直應力  $\sigma_y$  の値が上流側にて減少し下流側にて増大すること並に剪斷應力  $\tau_{xy}$  の値が下流側で増大することは、高堰堤の設計上注意すべき事柄である。

次に (2) の場合は 圖-7 の如き結果となり、接觸線に於ける應力分布に對する彈性性質の影響は相當顯著である。 $E_D/E_F$  の値に拘らず  $d=20$  m としたために若干の誤差は免れないが、一般的に云つて應力分布曲線は  $E_D/E_F$  が 1 より大又は小なるに應じて互に反對の性質を表し、 $E_D/E_F=1$  なる場合は丁度その平均の位置を占める様である。

先ず鉛直應力  $\sigma_x$  は  $E_D/E_F$  の値によつて影響されることが少く、堤體中央より下流側、特に趾部附近でかなり大きい變化を認め得るに過ぎない。趾部に於ける値は  $E_D/E_F$  が大きくなるほど増大するが、 $E_D/E_F$  の値に拘らず同一の應力を示す點が趾部より少し内側に寄つた所にあり、又中央附近

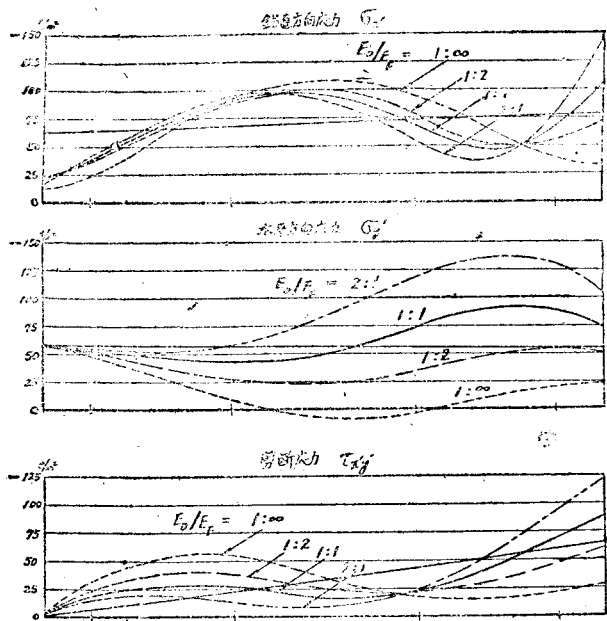


圖-7 堤體及基礎の彈性係數比を異にした場合の應力分布

にも時々こうした性質を示す点がある様である。水平直應力  $\sigma_y$  の分布状態は最も顯著な變化を示し、 $E_D/E_F$  が大なるほど中央より下流側の全部に非常な壓縮應力を生じ、 $E_D/E_F$  が小なるほど全部分にわたつて應力を減じ一部引張應力となる所もあるが、踵部附近の應力分布の變化は一般に僅小である。最後に剪斷應力  $\tau_{xy}$  の分布状態に就ては、 $E_D/E_F$  の影響を受けない點が趾部より底幅の  $1/3$  ほど内側によつた所にあり、これより下流側では  $E_D/E_F$  が小なるほど應力は小となり、上流側はその反對である。

なお踵部の應力は何れも  $E_D/E_F$  の値に拘らず殆ど一定であるが、趾部のそれは何れも相當大きい變化を呈していることが認められる。又何れの應力も  $\mu_D/\mu_F$  の増減に伴う變化が大體に於て (1) と (2) の場合で互に反對の性質を示す様である。これらの計算結果が直線的分布 (圖-7 に實線で示す) の場合と非常に異なつてゐることは、圖より明かであつて、(1) の場合に述べたと同様に大いに注目すべき事柄である。

## 6. 結 語

我々は堤體及基礎の接觸線附近の應力分布の解析方法を考究し、相模川堰堤を對象として數値計算を行い、堤體及基礎の彈性性質が應力分布に大きい影響を與えることを明かにし、半無限三角形斷面を假定し基礎の影響を加味しなかつた従來の計算法の如く直線的應力分布をなさざることを知つた。本研究は堤頂まで満水した場合の水壓と堤體自重とを外力として作用せしめた場合のみを取扱つたので、他の外力に就ては更に考究を要するが、我國にて漸く實現の機運にある高堰堤の合理的設計に注目すべき示唆を與えるものと思ふ。

我々の計算では表-7 の如く踵趾部に特に目立つた應力集中を認めなかつたが、光彈性實驗の結果<sup>10)</sup>によるとこの部分に相當の應力集中を生ずる様であり、本計算にはなお再検討の餘地があると考えられる。例えば  $d$  の値の合理的な推定、(25) 式の再吟味、並に變位を一致させる點の數とその位置及應力修正函數の選擇の如きは特に重要な問題である。我々の設計試作中の遠心力を應用した光彈性試験装置は今後のこうした問題の解明に大いに役立つものと考えられる。

本研究は文部省科學研究費及學術振興會の援助の下に行つてゐる“高堰堤設計の合理化に關する基礎的研究”の成果の1部であり、これらの援助に對し謝意を表す。

10) 前掲 7): p. 1217.