4. 結　言

以上述べた所により，吊橋の補剛桁に於ける其の中心軸廻りの捩り振動と中心軸の上下振動とは聯成的に取扱はれ得る事を知つた．

小論を纏むるに當つて種々御指導を賜つた東大田中　豊先生，種々御指導及び御激勵を賜つた平井敦助教授に厚く感謝申上ぐる次第であります．

ラ ー メ ン の 解 法

准員 横 山 勝 信*

Solution of Raumen

By Katunobu Yokoyama, Assoc Member

要　旨　ラーメンの解法には種々の試みがなされてゐるが，全部が全部と言つて良い程式を覺えねばならないと云ふ缺點を有して居るが，獨りモーメント分配法は固定梁の端モーメント，格點に於ける分配率，格點より隣接格點への傳達率の觀念さへ念頭に置けば別に面倒な式を覺へずとも如何程でも眞に近い値を求めることが出來る．

しかし之には目の子式運算と云ふ缺點を有し複雜な構造物には不向である．

私は以下述べる如き格點子なる量を考へることに依り規則的な式の作法に成功した．

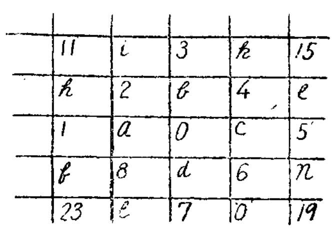
目　次

1. 一 般 式

一般式を與へる爲に圖-1の如き格子型ラーメンを考へる．

此の內一つの格點 0 に着目し 0 を含み 0 から一つ置きにとつた格點の組を 0 の組の格點と名付け圖の如く 1,2,3,4,5 等と名付ける．

之等に含まれぬ格點の組を a の組の格點と名付け圖の如く a, b, c, d, e 等と名付けるものとする．



圖—1

モーメント分配法を適用するに當り a, 0 の組の格點を交互に自由にすることにする．即ち例へば 0 の組の格點は全く回轉せしめぬ樣にして a の組の格點を自由に回轉せしめる（以下之を單に a 組の格點を自由にすると云ふ）と云ふ操作と 0 組の格點を自由にする操作を反復するの

* 建設院水政局

である.

先づ各格點が固定されてゐる狀態に於て荷重を作用せしめると各部材の端には端モーメントを生ずる．例へば0の格點を考へれば $0A, 0B, 0C, 0D$ なる四個の部材に依り四つの端モーメントを生ずる譯を此の總和を不均モーメントと名付ける．蓋し若し之が0ならば其の格點を自由に轉し得る樣にしても格點は回轉を行はないからである．最初不均モーメントを初期不均モーメントと稱することとする.

最初には初期不均モーメントがあるのであるが上記の如く $0, a$ の組の格點を交互に自由にすると各回に於ける不均モーメントは操作が進むにつれて減少し0に收斂することが判る.

そこを之等の不均モーメントの總和を考へてそれが格點0に於けるものならば X_0，格點 a に於けるものならば X_a と云ふ風に表はすことにする.

更に之等の不均モーメントの總和の函數として

$$X_0-1/2(\alpha_{a0}X_a+\alpha_{b0}X_b+\alpha_{c0}X_c+\alpha_{d0}X_d)\equiv P_0$$

なるものを考へ之を0に於ける格點子と名付けることにする．但し α_{a0} は格點 a に於ける $a0$ 部材の a 側に對する分配率である．簡單の爲に部材の斷面は隣接に格點間に於て一定であるとし傳達率は 1/2 としてある.

α は分配率であり云ふ迄もなく

$$\alpha_{a0}+\alpha_{a1}+\alpha_{a2}+\alpha_{a8}=\alpha_{b0}+\alpha_{b2}+\alpha_{b3}+\alpha_{b4}=\alpha_{c0}+\alpha_{c4}+\alpha_{c5}+\alpha_{c6}$$
$$=\alpha_{d0}+\alpha_{d6}+\alpha_{d7}+\alpha_{d8}=\alpha_{0a}+\alpha_{0b}+\alpha_{0d}=1$$

である．格點 $0, a, b$, 等に於ける初期不均モーメントを x_0, x_a, x_b, 等とすれば次の如き關係式が得られる．即ち

$$P_0=x_0-1/2(P_a\alpha_{a0}+P_b\alpha_{b0}+P_c\alpha_{c0}+P_d\alpha_{d0})$$
$$P_a=x_a-1/2(P_0\alpha_{0a}+P_8\alpha_{8a}+P_1\alpha_{1a}+P_2\alpha_{2a})$$
$$P_b=x_b-1/2(P_0\alpha_{0b}+P_2\alpha_{2b}+P_3\alpha_{3b}+P_4\alpha_{4b})$$
$$P_c=x_c-1/2(P_0\alpha_{0c}+P_4\alpha_{4c}+P_5\alpha_{5c}+P_6\alpha_{6c})$$
$$P_d=x_d-1/2(P_0\alpha_{0d}+P_6\alpha_{6d}+P_7\alpha_{7d}+P_8\alpha_{8d})$$

なる關係式が得られるのである．此の關係式から a の組の格點子は 0 の組の格點子に依り又 0 の組の格點子は a の組の格點子に依り夫々一次的關係に表はされることが判る.

更に以上の五式より a の組の格點子 P_a, P_b, P_c, P_d を消去する．之には P_a の式に $-\frac{1}{2}\alpha_{a0}$, P_b の式に $-\frac{1}{2}\alpha_{b0}$ 等を夫々乘じて和を作ればよく之に依り次式を得る.

$$P_0\left\{1-\frac{1}{4}(\alpha_{a0}\alpha_{0a}+\alpha_{0b}\alpha_{b0}+\alpha_{0c}\alpha_{c0}+\alpha_{0d}\alpha_{d0})\right\}-\frac{1}{4}P_2(\alpha_{2a}\alpha_{a0}+\alpha_{2b}\alpha_{b0})-\frac{1}{4}P_4(\alpha_{4b}\alpha_{b0}+\alpha_{4c}\alpha_{c0})$$
$$-\frac{1}{4}P_6(\alpha_{6c}\alpha_{c0}+\alpha_{6d}\alpha_{d0})-\frac{1}{4}P_8(\alpha_{8d}\alpha_{d0}+\alpha_{8a}\alpha_{a0})-\frac{1}{4}P_1\alpha_{1a}\alpha_{a0}-\frac{1}{4}P_3\alpha_{3b}\alpha_{b0}$$
$$-\frac{1}{4}P_5\alpha_{5c}\alpha_{c0}-\frac{1}{4}P_7\alpha_{7d}\alpha_{d0}=x_0-\frac{1}{2}(x_a\alpha_{a0}+x_b\alpha_{b0}+x_c\alpha_{c0}+x_d\alpha_{d0})$$

此の式は極めて規則的であり P_0 乃至 P_8 の九個の格點子を含んだ式である．基より a 組の格點子は消去されてゐるから 0 組のみの格點子しか含んで居らない．以下前式を五格點子の式，後式を九格點子の式と云ふことにする．

之等の格點子に依り部材の端モーメントを表はすと

$$(0A)=x_{0a}-P_0\alpha_{0a}-\frac{1}{2}P_a\alpha_{a0}$$

$$(0B)=x_{0b}-P_0\alpha_{0b}-\frac{1}{2}P_b\alpha_{b0}$$

$$(0C)=x_{0c}-P_0\alpha_{0c}-\frac{1}{2}P_c\alpha_{c0}$$

$$(0D)=x_{0d}-P_0\alpha_{0d}-\frac{1}{2}P_d\alpha_{d0}$$

なる極めて簡單な式になる．茲に x_{0a} は部材 $0A$ の 0 端に於ける初期材端モーメント即ち $0A$ なる完全固定梁に荷重が作用した時に 0 の側に生ずる材端の內力性モーメントである．

總ての場合さうであるが常に符號の問題に相當頭を惱まされるのであるが，私の取扱ふモーメントは總て內力性のものであり，從つて外力を考へれば之と反對の向きとなる．而して時計廻りを以て正の向きとして取扱ふこととする．

此の方針は撓角撓度法に於ける觀點と云ふが如きややこしいものを考へる必要をなくしてゐることは理解されると思ふ．

次に例題に依り具體的説明を試み度いと思ふ．

2. 例　　題（1）連續梁への應用

今圖-2 の如き四徑間連續梁に就て考へると，連續梁に於ては九格點子の式は三格點子の式と化するのである．此の組は P_b 及 P_a, P_c である．

即ち P_b を未知量に選べば即座に解けることが判る．此の操作を行ふには先づ構造物の端に自由端があれば之を自由にして置く．

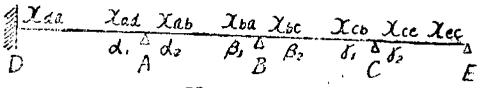


圖 —— 2

此の場合は E が自由端であるから E を自由にして C に於ける初期不均モーメントを

$$x_c=x_{cb}+x_{ce}-\frac{1}{2}x_{ec}$$

として置くのである．

B に於て九格點子の式を立てると

$$P_b\left(1-\frac{1}{4}\alpha_2\beta_1-\frac{1}{4}\beta_2\gamma_1\right)=x_b-\frac{1}{2}\alpha_2x_a-\frac{1}{2}\gamma_1x_c$$

之から

$$P_b=\frac{x_b-\frac{1}{2}\alpha_2x_a-\frac{1}{2}\gamma_1x_c}{1-\frac{1}{4}\alpha_2\beta_1-\frac{1}{4}\beta_2\gamma_1}$$

又五格點子式を A, C に就て立てれば

$$P_a = x_a - \frac{1}{2}\beta_1 P_b$$

$$P_c = x_c - \frac{1}{2}\beta_2 P_b$$

之から

$$(DA) = x_{da} - \frac{1}{2}\alpha_1 P_a$$

$$(AD) = x_{ad} - \alpha_1 P_a$$

$$(BA) = x_{ba} - \beta_1 P_b - \frac{1}{2}\alpha_2 P_a$$

$$(CE) = x_{ce} - \frac{1}{2}x_{ec} - \gamma_2 P_c$$

として簡單に端モーメントが求められる.

連續梁に於ては未知數が必ず半減するのは本解の特色の一つであつて, 五徑間に至りはじめて未知數が二個となるのである. 而も端の支承條件は分配率として考慮せらるべきもので式の形式には無關係である. 之は撓角法に於て C, H を用ふるのと對比して一つの特筆すべき事柄と思ふ.

更に次の様にすると一寸級數的考慮を拂ふことに依り8徑間の連續梁が苦もなく解けるのも興味あることである.

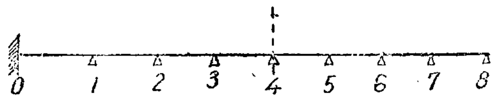


圖 —— 3

此の場合4なる格點を固定して他の格點を自由にすれば夫々未知量が一つで濟むことになり, 簡單に解が得られる譯である. 從つて格點4に於ける不均モーメントが求められる. 之を x_4 としてやる. 次に4のみを自由にして他を固定すると不均モーメントは3及5に生ずる. 之は明に $-\frac{1}{2}\alpha_{43}x_4$ 及 $-\frac{1}{2}\alpha_{45}x_4$ である. 即ち次に4のみを固定して得る格點4に於ける不均モーメントは x_4 に比例した或る値である. 之を δx_4 と表はす.

同様なことを繰返せば $\delta^2 x_4, \delta^3 x_4, \cdots\cdots$ と云ふ風に次々に不均モーメントが出る筈である. 從つて4に於ける不均モーメントの總和は $\frac{x_4}{1-\delta}$ として與へられることになるのである. 之が得られれば 3, 5 等に於けるものも求められる譯で從つて割合に簡單に解が得られることになるのである.

連續梁としては實際に出て來るものを考へても八徑間迄はないから此の法は連續梁には極めて實用的であると云へやう.

3. 例　　題 (2)

問 圖-4 の如き二層二徑間の對稱ラーメンに其の上層には強度 q_1, 其の下層には強度 q_2 なる等布荷重を作用せしむるときの各部材端モーメントを求む.

對稱の原理から $P_d=P_e=0$, $P_c'=-P_c$, $P_b'=-P_b$ である.

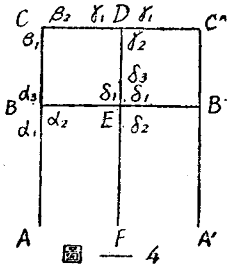
今格點 B に於て九格點子の式を立てると

$$P_b\left(1-\frac{1}{4}\alpha_3\beta_1-\frac{1}{4}\alpha_2\delta_1\right)+P_b\frac{1}{4}\alpha_2\delta_1=x_b-\frac{1}{2}\beta_1x_c$$

$$\therefore\qquad P_b=\frac{x_b-\frac{1}{2}\beta_1x_c}{1-\frac{1}{4}\alpha_3\beta_1}$$

従つて

$$P_c=\frac{x_c-\frac{1}{2}x_b\alpha_3}{1-\frac{1}{4}\alpha_3\beta_1}$$



圖—4

初期不均モーメントとしては內力モーメントの時計廻りを正と考へれば

$$x_b=\frac{1}{12}q_2l^2,\qquad x_c=\frac{1}{12}q_1l^2$$

従つて

$$(BA)=-\alpha_1P_b=-\frac{l^2}{12}\,\frac{q_2-\frac{1}{2}\beta_1q_1}{1-\frac{1}{4}\alpha_3\beta_1}\,\alpha_1$$

$$(AB)=-\frac{1}{2}\alpha_1P_b=-\frac{l^2}{24}\,\frac{q_2-\frac{1}{2}\beta_1q_1}{1-\frac{1}{4}\alpha_3\beta_1}\,\alpha_1$$

$$(BE)=\frac{1}{12}q_2l^2-\alpha_2P_b$$

$$=\frac{l^2}{12}\,\frac{\left(\alpha_1+\alpha_3-\frac{1}{4}\alpha_3\beta_1\right)q_2+\frac{1}{2}\alpha_2\beta_1q_1}{1-\frac{1}{4}\alpha_3\beta_1}$$

$$(CB)=-\beta_1P_c-\frac{1}{2}\alpha_3P_b$$

$$=-\frac{l^2}{12}\,\frac{\frac{1}{2}\alpha_3\beta_2q_2+\beta_1\left(1-\frac{\alpha_3}{4}\right)q_1}{1-\frac{1}{4}\alpha_3\beta_1}$$

參考の爲分配率は

$$\alpha_3=\frac{k_2}{k_1+k_2+k_3},\quad \alpha_1=\frac{k_1}{k_1+k_2+k_3},\quad \beta_1=\frac{k_2}{k_2+k_4},\quad \beta_2=\frac{k_4}{k_2+k_4}$$

である. 但し $k=I/$部材長 とする.

解說 此の例題は偶徑間の對稱ラーメンに對稱荷重の作用する場合であつて

1) 各支點に移動のないこと

2) 對稱軸上の格點子が零となること

3)　對稱二格點に於ける格點子は夫々絶對値が等しいこと

の三つの事由から未知數が減少した例であり解法には都合よい例である.

然し乍ら撓角法では未知數が二個となることを免れないのであるから本法の方が有利であらう. 對稱ラーメンに任意荷重が作用する場合は對稱荷重と逆對稱荷重の二つの荷重が同時に作用するとして解けばよい. このとき後者の荷重に於ては格點の移動を假定し之が層方程式を滿足する樣に格點の移動に依り生ずる曲げモーメントを考へるのである.

逆對稱荷重では對稱に格點に於ける格點子は相等しいので未知量が對稱荷重同樣に減少されるが對稱軸上の格點子は零とはならないのが通常である.

次に圖-5 の如き奇數徑間の對稱構に對稱荷重が作用する場合を考へて見る.

此の場合は對稱軸線上には格點なく, 從つて格點の二組は $A.B'C, A'C'B$ の如く何れも A, B, C の三格點に就て考へなければならない. 從つて此の場合は五格點子の式を用ふる方がよいことがわかる.

$$P_a+\frac{1}{2}\beta_1P_b=x_a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$P_b\left(1-\frac{1}{2}\beta_3\right)+\frac{1}{2}\alpha_2P_a+\frac{1}{2}\gamma_1P_c=x_b\cdots\cdots(2)$$

$$P_c\left(1-\frac{1}{2}\gamma_2\right)+\frac{1}{2}\beta_4P_b=x_c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

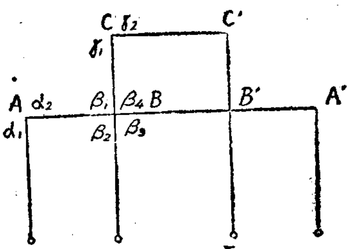


圖 —— 5

(1) より　　$P_a=x_a-\frac{1}{2}\beta_1P_b$

(3) より　　$P_c=\dfrac{x_c}{1-\frac{1}{2}\gamma_2}-\frac{1}{2}\beta_4\dfrac{P_b}{1-\frac{1}{2}\gamma_2}$

之を (2) に代入すれば

$$P_b\left(1-\frac{1}{2}\beta_3\right)+\frac{1}{2}\alpha_2\left(x_a-\frac{1}{2}\beta_1P_b\right)+\frac{1}{2}\gamma_1\left(\frac{x_c}{1-\frac{1}{2}\gamma_2}-\frac{1}{2}\beta_4\frac{P_b}{1-\frac{1}{2}\gamma_2}\right)=x_b$$

$$\therefore\quad P_b\left(1-\frac{1}{2}\beta_3-\frac{1}{4}\alpha_2\beta_1-\frac{1}{4}\frac{\gamma_1\beta_4}{1-\frac{1}{2}\gamma_2}\right)=x_b-\frac{1}{2}\alpha_2x_a-\frac{1}{2}\frac{\gamma_1x_3}{1-\frac{1}{2}\gamma_2}$$

$$\therefore\quad P_b=\frac{x_b-\frac{1}{2}\alpha_2x_a-\frac{1}{2}\dfrac{\gamma_1xc}{1-\frac{1}{2}\gamma_2}}{1-\frac{1}{2}\beta_3-\frac{1}{4}\alpha_2\beta_1-\frac{1}{4}\dfrac{\gamma_1\beta_4}{1-\frac{1}{2}\gamma_2}}$$

として求めることが出來る.

此の場合は別として一般には聯立方程式は三元以上では數値計算はよいとしても代數的計算は厄介なことが多いので別法を考へて見やう.

之には第一段として BB' を固定して他を自由にする．

すると構造物は下の如く三つの部分に分たれる．

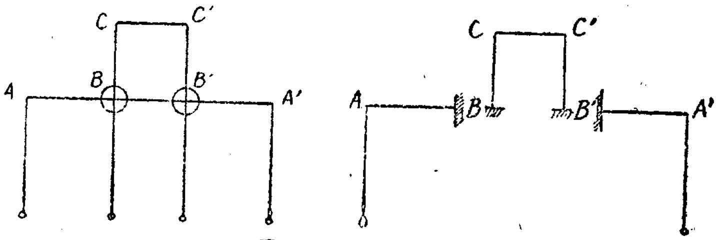


圖 ——— 6

そこで夫々に於て解くと $BCC'B'$ なる單純門型ラーメンに於ては

$$P_c\left(1-\frac{1}{2}\gamma_2\right)=x_c$$

となり

$$P_c=\frac{x_c}{1-\frac{1}{2}\gamma_2}$$

を得る．即ち

$$x_b-\frac{1}{2}\alpha_2 x_a-\frac{\gamma_1}{2}\,\frac{x_c}{1-\frac{1}{2}\gamma_2}=x_b'$$

と置く．第二段に於て B, B' 以外を固定すれば A には $-\frac{1}{2}P_b\beta_1$，C には $-\frac{1}{2}P_b\beta_4$ の不均モーメントを生ずる．玆に P_b は

$$P_b=\frac{x_b'}{1-\frac{1}{2}\beta_3}$$

であることは云ふ迄もない．次に第三段は第一段同樣 BB' のみを固定すると

x_c' の代りに $-\frac{1}{2}\,\frac{x_b'}{1-\frac{1}{2}\beta_3}$ を用ふれば

x_b' の代りとして不均モーメント

$$\frac{1}{4}\alpha_2\beta_1\frac{x_b'}{1-\frac{1}{2}\beta_3}+\frac{\gamma_1\beta_4}{4}\,\frac{x_b'}{\left(1-\frac{1}{2}\beta_3\right)\left(1-\frac{1}{2}\gamma_2\right)}=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha_2\beta_1}{1-\frac{1}{2}\beta_3}+\frac{\gamma_1\beta_4}{\left(1-\frac{1}{2}\beta_3\right)\left(1-\frac{1}{2}\gamma_2\right)}\right)x_b'$$

を得る．之を $\delta x_b'$ と置けば同樣にして第五段に於ける B の不均モーメントは $\delta^2 x_b'$ となる．即ち B に於ける不均モーメントの總和は $\frac{x_b'}{1-\delta}$ を與へられ

從つて吾人は $P_b=\dfrac{x_b'}{\left(1-\frac{1}{2}\beta_3\right)(1-\delta)}$ を得るのである．

之が出來ると次には圖-7 の如き場合も解けることになる．何となれば左の構造物に於て B, B'

を固定すれば前の構造物と全く同様に解ける．

従つて此の場合の B, B' に於ける不均モーメントを x_0', $-x_0'$ とすれば前と同様 δ 様な一定値を生じ B に於ける不均モーメンのト總和は $\frac{x_0'}{1-\delta}$ で與へられる．かやうにして順次複雑な構造物が解けるのも本法の一特色である．

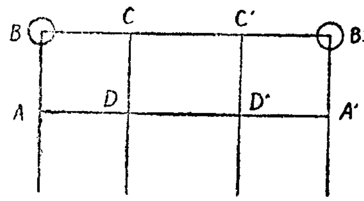


圖 — 7

結　　言

以上簡單乍ら格點子法を例解したのであるが本法の使用上の利點は次の如きものと思はれる，

1. 他の方法を用ふるより未知量を少くし得ること．
2. 格點子の式は規則的であり暗記の要なきこと．
3. 特に連續梁に於ては三連モーメントの式を用ふより遙かに勞少なきこと．
4. 逐次的解法を厭はなければ正解が得らるること．

本法の缺點とも云ふべきものは

1. 格點に移動ある場合は他法と同様多少錯雑することを免れないこと．
2. 格點子の式は機械的繰返試法に依り解くには收斂性が撓角法に比し劣ること．

等であらう．

即ち本法は格點の移動なき連續梁，對稱構造物に對稱荷重が作用する場合若くは對稱構造物に逆對稱荷重のみが作用する場合に有效であり，特に其の特色を發揮するものである．

吊橋索條の固有振動に就て

正員　森　口　繁　一*

On the Natural Oscillation of Suspension Cables

By Sigeiti-Moriguti, C. E., Member

要　旨　吊橋の固有振動の中，主索が自已の平面内で振動するものに就て計算する．そのさい風壓などの影響は考えない．また補剛桁の復原性への寄與を無視し，且つ通常許し得る程度の近似を用ひて，基本方程式 (5) を導く．これをノーマル函數についての方程式 (8) になおす．垂比の小さいことを利用して攝動の方法を用い，第一近似を求める．荷重などの分布が一様で，且つ對稱性をもつている場合をやゝくわしくしらべて見る．結論として最も注目すべきは最低次の振動は通常逆對稱曲げ型に屬することである．その速さは垂距 D だけから定まる (31 式)．對稱型の振動は，主索の張力，剛性，及び垂比を含む一つのパラメタ α に關係する．(對稱型の最低次の振動の速さを求めるための係數 β_1，を α に對して圖點したグラフを添える．) なお振動の實測にさいして振動計をどこに置くべきかという問題に觸れる．最後に補剛桁曲げ剛性の影響を Rayleigh の方法によつて計算する．

* 東京大學助教授　工學士