吊橋の捩り振動に對する安定性に就て (IV)

正員　工博　平井　　敦*

On the Stability of Torsional Oscillation in Suspension-bridge (IV)

By Atsushi, Hirai, Dr, Engr. Member.

要　旨　前3篇の結果を綜合し，更に其後の研究により剪斷力の影響，揚力の影響並びに撓み剛性等を考へ其結果，補正及び修正を行つたものである．

目　次

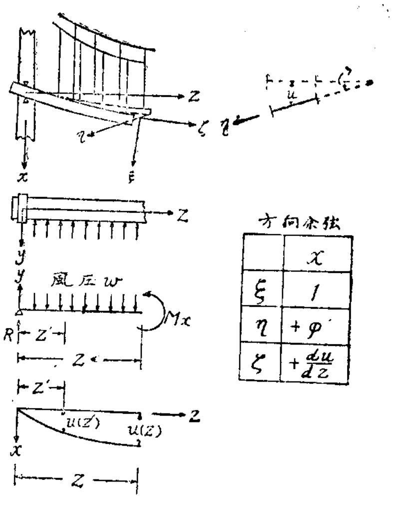
§1. 捩れ振動の基本式

筆者は第1篇[1]に於て吊橋の捩り振動に對する微分方程式を導入し，横方向より水平の風を受けた場合の吊橋の捩り振動狀況の解明に資した．

然し乍ら，其後の實驗的並びに理論的研究の結果猶不完全の所があるので，改めて基本方程式に再考察を加へるが，理論的體系としては本質的には第1篇と同じである．

先づ，風壓に關係ある部分に第2篇[2] $p.50$ に取扱つた樣に，一部補正を行ふが結果に於ては第1篇と同じである．

吊橋の撓度理論の座標系に一致させる爲め，座標系を圖-1 の如く撰定し，第1篇の x, ξ, 及び φ の方向を逆轉させる．



	x
ξ	1
η	$+\varphi$
ζ	$+\frac{du}{dz}$

圖-1

補剛桁に單位長當り w なる風壓が作用する時，其の任意の點 z に於けるこの風壓に基く曲げモーメントを M_x (指標 x は *Vector* としての方向を意味する.) とする圖-1 を參照して

---

* 東大助教授 (一工土木教室勤務)

1) 土木學會誌 (28 卷 9 號; 昭 17, 9 月) P, 769～P. 786. 平井敦: 吊橋の捩り振動に對する安定性に就て.

2) 土木學會論文集 (昭和 21 年度), 平井敦: 吊橋の捩り振動に對する安定性に就て (II)

$$M_x = Rz - \int_0^z w(z) \times (z - z') dz'$$

補剛桁が x 方向に u なる撓みを受けると，この撓みの爲風荷重(風壓) w により z 軸方向 ($Vector$ の方向) の附加的モーメントを生ずる．z 點の撓みを $u(z)$ z' 點の撓みを $u(z')$ とすると，風壓による z 點に於けるこの附加的モーメント M_z は，

$$M_z = -R \cdot u(z) + \int_0^z w(z) \times \{u(z) - u(z')\} dz'$$

之等の風壓のみに關係する曲げモーメントの ζ 軸への斜影を考へると，風壓關係の ζ 軸の廻りの曲げモーメント M_ζ は

$$M_\zeta = M_x \cos(x\xi) + M_z \cos(z\zeta) = \frac{du}{dz} M_x + M_z$$

ζ 軸の廻りのモーメントとしては，之に更に所謂流體力學的モーメントを附加しなければならないが，混雜を避ける爲に暫時この項は後廻しとする．上式より

$$\frac{dM_\zeta}{dz} = \frac{d^2u}{dz^2} M_x + \left[\frac{du}{dz} \frac{dM_x}{dz} + \frac{dM_z}{dz} \right]$$

第1篇に於て筆者は dM_z/dz の項を落し，dM_x/dz の項を影響小なりと見做して省略したが，上式のカツコの内の項は第2篇 $p.$ 50 と同樣なる取扱ひにより零なる事を證明する事が出來る．從つて

$$\frac{dM_\zeta}{dz} = \frac{d^2u}{dz^2} M_x$$

之は第1篇の $p.$ 773 の 15 行目の式である．M_x は風壓に基く單純梁としての曲げモーメントであつて，第1篇と同樣なる記號 $\mathfrak{M}$ になほせば，

$$\frac{dM_\zeta}{dz} = \frac{d^2 z}{dz^2} \mathfrak{M} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

單位長當りの流體力學的モーメントによる補剛桁の中心點に關する"トルク"を T とすれば之は第1篇の記號により

$$T = C_m p b^2, \quad 但し \quad p = \frac{1}{2} \rho V^2$$

本篇に於ては風の相對迎角の影響は考へない事とし，次の機會に論ずる事とする．流體力學的モーメントは角 φ を增加せしめる如き，即ち非復原性の性格を有するモーメントを正方向とする．且簡單の爲に

$$C_m = \alpha \varphi \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

と考へる．

次に補剛桁の單位要素に關する吊橋としての復原性を考へるに當り，剪斷力の影響をも近似的に算入する事とする．この影響は通常微小で省略し得るがこの項を考へた方が後記の如く最後の式の形が第1篇より簡單になるので取上げる事とする．

撓度理論の式に於て，水平張力の變化を無視すると，(この實驗的檢討は目下準備中である) 吊

橋補剛桁を構成する左右の主桁に關する剪斷力の項は $-(EI/2)\times d^3u_i/dz_i$, ($i=1$ 又は 2) であり，ケーブルの效果は $H du_i/dz$ である．即ち吊橋としての剪斷力 S_i は

$$S_i=-\frac{EI}{2}\frac{d^3u_i}{dz^3}+H\frac{du_i}{dz},\quad (i=1 \text{ 又は } 2)$$ 圖-2 參照.

從つて補剛桁の中心點に關する"トルク"は

$$C_{\text{トルク}}=(S_2-S_1)\frac{b}{2}=-\frac{EI}{2}\frac{b^2}{2}\frac{d^3\varphi}{dz^3}+\frac{Hb^2}{2}\frac{d\varphi}{dz}$$

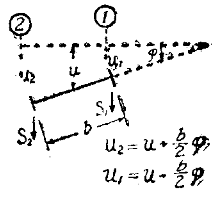


圖-2

茲に EI は補剛桁（左右の主桁）のみの撓み剛性である．この式の第2項は第1篇で考へた項であるが，第1項は新に挿入した項である（影響は小さいが）.

吊橋の補剛桁の捩れ剛性を KG とすれば，捩り振動の基本式として

$$\frac{\Theta}{l}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\left(KG+\frac{Hb^2}{2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{EI\cdot b^2}{4}\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^4}-\mathfrak{M}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\alpha p b^2\varphi \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

本式には $\partial^2u/\partial z^2$ の項（風壓の項）を含む故この撓み u を消去しなければならない．第1篇に於ては I を簡單に補剛桁を構成する主桁の慣性モーメントの2倍と考へて式を立てたが，この考へを實驗的に檢討せる所之では一般性を有しない事がわかつた．（この結果は更に實驗を行つた上で改めて報告する事とし，本篇では述べない.）

從つて當面の問題に於けるが如き荷重狀況を對象とする時の吊橋構造全體としての所謂換算撓み剛性を算出しなければならない．之に對し筆者は近似計算として次の如く吊橋の撓みより之を求めた．

撓度理論の基本式[3] は，左右何れかの主桁に對し

$$\frac{EI}{2}\frac{d^4u}{dz^4}-(H+\varDelta H)\frac{d^2u}{dz^2}-\varDelta H\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{p}{2}$$

茲に p は死荷重以外に新に補剛桁に載荷せられる荷重であり，この荷重に基く水平張力の變化が $\varDelta H$ である．今主桁が何等かの荷重に基き，徑間の中央に節點を有する次の如き撓みをしたときを考へる．

$$u=A\sin\frac{2\pi}{l}z,$$

この時 $\varDelta H=0$ と考へても近似的に差支へない樣である．然るとき前式より，

$$\left(EI+\frac{l^2}{2\pi^2}H\right)\frac{d^4u}{dz^4}=p.$$

本式を通常の桁の基本式，$EI\frac{d^4u}{dz^4}=p$ と比較すれば吊橋構造としての撓み剛性は中央に節點を有する時は $(EI+l^2H/2\pi^2)$ なる事がわかる．從つて之を換算撓み剛性と稱し EJ と記號する[4].

3) The Bridge over the Delaware River: Final Report of the Board of Engineers to the Delaware Bridge Joint Commission, P. 97.

4) 第3篇 P. 85 脚註參照．又，林氏の「吊橋補剛桁の上下振動と捩り振動との間に生ずる一聯成現象」參照.

即ち

$$EJ \doteqdot EI + \frac{l^2}{2\pi^2} H \quad \cdots\cdots (4)$$

風壓に基く曲げモーメント $\mathfrak{M} \equiv M_x$ の η 軸への成分は圖-1 の座標系に對しては $+\mathfrak{M}\varphi$ であるが，かかるモーメントが吊橋系に作用したときは[5]

$$\left(EI + \frac{l^2}{2\pi^2} H\right) \frac{d^2 u}{dz^2} = EJ \frac{d^2 u}{dz^2} = -\mathfrak{M}\varphi \quad \cdots\cdots (5)$$

(5) を (3) に代入すれば

$$\frac{\Theta}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left(KG + \frac{Hb^2}{2}\right) - \frac{EI \cdot b^2}{4} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} + \frac{\mathfrak{M}^2}{EJ} \varphi + \alpha p b^2 \varphi$$

φ は近似的に次の條件を滿足すると考へて，(6) を得.

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} \doteqdot -\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$\frac{\Theta}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left[KG + \frac{Hb^2}{2} + \pi^2 \frac{b^2}{l^2} EI\right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\mathfrak{M}^2}{EJ} \varphi + \alpha p b^2 \varphi \quad \cdots\cdots (6)$$

6) 式の第一項の中のカッコの中の第3項は剪斷力の影響を更に考へた爲導入せられた項であるが，長徑間吊橋の如く l が b に比し非常に長い補剛桁に對しては，本項を省略してもよい．しかしこの項を算入した方が，KG を省略する時，式の形が簡單になる．即ち (4) を考慮すれば，

$$\left[KG + \frac{Hb^2}{2} + \pi^2 \frac{b^2}{l^2} EI\right] = KG + \pi^2 \frac{b^2}{l^2} \cdot EJ$$

或る場合には KG の效果を省略する事が出來ないが，長徑間吊橋では通常之を省略し得る．上式で與へられる量は，この式の導入に內包せられてる樣な變形狀態を對象とする場合の吊橋の換算捩り剛性である故，式を簡單にする爲之を $\underline{KG}$ とおく．

$$\underline{KG} \equiv KG + \pi^2 \frac{b^2}{l^2} EJ \quad \cdots\cdots (7)$$

然るとき (6) は次の形となる．

$$\frac{\Theta}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \underline{KG} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \alpha p b^2 \varphi + \frac{\mathfrak{M}^2}{EJ} \varphi \quad \cdots\cdots (8)$$

之が吊橋の捩り振動の基本式である．但し風の相對迎角の影響は改めて取扱ふ事とし今の場合考へてない．上記の (8) 式は第1篇の (8) 式と同じものであるが唯吊橋の撓み剛性として，補剛桁を構成する左右の主桁の EI の代りに (4) 式で與へられる EJ を用ひてる點が異り之點ここに修正させて頂く．林泰造氏は本篇で云へば (3) 及び (5) 式に相當する式を聯立させて所謂聯成形態の問題として取扱ひ，この結論を支持する一資料を與へて居る．(脚註 4 參照).

(8) 式より，第1篇と同樣にして，主として風壓による限界風速 V は次式[6]で與へられる．之

5) 實はこの (5) 式を稱用する事に色々疑義があつたが，(第 3 篇 P. 85 脚註參照)．今の所實驗的には之で差支へない樣である．

6) (8) 式の $\mathfrak{M}$ に對し，$\mathfrak{M} \doteqdot \frac{wl^2}{8} \sin\frac{\pi z}{l}$ とおき Mathieu 函數の助けをかり (9), (10) を得.

は第1篇の式(22)に相當する．

$$\frac{(k\rho s)^2 l^6}{128\pi^2 EJ\cdot \underline{KG}}V^4+\frac{\alpha\rho b^2 l^2}{2\pi^2\cdot\underline{KG}}V^2 \fallingdotseq 4 \quad \cdots\cdots (9)$$

但し，　EJ……吊橋の換算撓み剛性；式(4).

$\underline{KG}$……吊橋の換算捩り剛性；式(7).

風壓による捩れ挫屈を對象とするならば，吊橋の具備すべき條件の一として(9)式の第1項より次式[6]を得．

$$V^2=\frac{2\pi\sqrt{128}}{(k\rho s)l^3}\sqrt{EJ\cdot\underline{KG}} \quad \cdots\cdots (10)$$

風壓係數 k の代りに，流體力學で用ひらるる抵抗係數 C_d を用ふる時は，k の代りに $k=C_d b/2S$ を代入する．

$$V^2=\frac{\pi\sqrt{128}}{(C_d\rho b)l^3}\sqrt{EJ\cdot\underline{KG}} \quad \cdots\cdots (10')$$

單位長當りの風壓 w に對しては

$$\underline{KG}\cdot EJ\geqq\frac{w^2 l^6}{128\times4\pi^2} \quad \cdots\cdots (11)$$

今(7)の KG が省略し得らるる場合を取上げると，

$$\frac{EJ}{l^4}\geqq\frac{1}{2\pi^2\sqrt{128}}\left(\frac{w}{b}\right) \quad \cdots\cdots (12)$$

§2.　捩れ挫屈に對する揚力の影響

前節に於ては混雜を避ける爲に揚力 L の捩れ挫屈に及ぼす影響を考へなかつたが，吊橋に於ても第2篇に取扱つたと同樣に，補剛桁が僅か捩れる時は風が水平に吹いてる時でも所謂迎角が與へられる事となり通常の場合揚力を生じ，この爲撓みが變化する事となる故，この影響を考へなくてはならない．今簡單の爲に次の如く考へる．

$$C_l\fallingdotseq\gamma'\varphi \quad \cdots\cdots (13)$$

z' 點に於ける補剛桁に働く揚力を $L(z')$ とすれば，揚力に關する z 點の曲げモーメント M_y は圖-3 を參照すれば

$$M_y=R'z-\int_0^z L(z')(z-z')dz'$$

又，

$$L=C_l pb=\gamma' pb\varphi$$

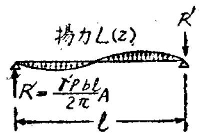


圖-3

左支點反力 R'は，$\varphi=A\sin\frac{2\pi}{l}z$ と考へると簡單な計算により

$$R'=\frac{\gamma' pbl}{2\pi}A.$$

となる故，之等を M_y の式に代入すれば結局，

$$M_y=\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2(\gamma' pb)\varphi$$

となる.

從つて η 軸の廻りのモーメントとしては前節の $\mathfrak{M}\varphi$ の他に更に M_y の η 軸への斜影を考へなければならない. $\cos(y\eta)\doteqdot 1$ 故

$$M\eta=\mathfrak{M}\varphi\left[1+\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{\gamma' pb}{\mathfrak{M}}\right]$$

從つて (5) 式に相當する式はこの場合

$$EJ\frac{d^2u}{dz^2}=-\mu^2\mathfrak{M}\varphi \quad\cdots\cdots(5')$$

但し
$$\mu^2=1+\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{\gamma' pb}{\mathfrak{M}}$$

故に (8) 式は次の形となる.

$$\frac{\Theta}{l}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\underline{KG}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\alpha pb^2\varphi+\mu^2\frac{\mathfrak{M}^2}{EJ}\varphi \quad\cdots\cdots(8')$$

即ち (8) 式の $\mathfrak{M}$ の代りに $\mu\mathfrak{M}$ とおけばよい事を知る. 例へ (11), (12) 式は夫々;

$$\underline{KG}\cdot EJ\geqq\mu^2\times\frac{w^2l^6}{128\times 4\pi^2} \quad\cdots\cdots(11')$$

$$\frac{EJ}{l^4}\geqq\frac{\mu}{2\pi^2\sqrt{128}}\left(\frac{w}{b}\right) \quad\cdots\cdots(12')$$

しかして μ^2 の式を更に書きなほすと, $\mathfrak{M}=(128)^{-1/2}\cdot wl^2=(128)^{-1/2}\cdot C_a pbl^2$ なる事に着目すれば

$$\mu^2=1+\frac{\sqrt{128}}{4\pi^2}\frac{\gamma'}{C_a} \quad\cdots\cdots(14)$$

本項が第2篇に於て未解決のまま殘した吊橋の場合の一應の修正係數 μ であるが, これだけでは猶不完全の樣である. 此點の吟味は將來の研究に讓る.

§3. 結　　語

吊橋の單なる撓み振動に就いては從來種々の研究が行はれてゐたが, 吊橋補剛桁の捩り振動に關してはあまり研究が行はれなかつた樣に見受けられるので, 筆者は吊橋の安定性を一般的に取扱ふに先きだち, 先づ順序として初にこの方面の研究を行ひ, 水平方向の風を受ける吊橋補剛桁の捩り振動に關し, 一, 二の多少從來かへりみられなかつた點の解明に資した.

風壓に基く所謂捩れ挫屈の項を導入した結果, 補剛桁の捩り振動週期が風速の函數となり, 捩り振動に對し限界風速が存在する事を明かにしたが, この點は興味ある點である.

元來靜力學的には捩れ挫屈の現象は周知の事實であるにも拘らず, 一般に航空機翼等の構造物にはこの項を考慮に入れない樣であるが, これは之等構造物の既長が比較的小で, 且撓み剛性及び捩り剛性が大である反面又現狀程度の速度ではその必要を認めないからであるらしい事は第2篇に述べた所である. 然し乍ら筆者の見解に從へば, この種構造物の安定性は又この捩れ挫屈の影響を受くべき筈のものである. この場合, 高速の場合の不安定性を *Negative damping* として

て解釋し之に滿足してゐる文獻が一，二見受けられるが，この現象はこの捩れ挫屈の項の挿入により或程度說明がつく筈である．

長徑間吊橋の如き，支間が相當大であり且つ比較的撓み剛性及び捩り剛性の小なる構造物に對しては航空機の翼の場合同じ算法ですませる事は出來ない樣に感ぜられるが，捩れ挫屈の現象を吊橋の捩り振動現象に取入れたのは筆者が最初であると信ぜられる．

本篇に於ては，第1篇の結果に剪斷力の影響を考へ，又或程度揚力の影響を算入すると共に，補剛桁の撓み剛性に對し實驗結果を參照し修正を行つた．

第1篇に於ては，吊橋の撓み剛性として，とりあへず，補剛桁を構成する左右の主桁の剛性の和であると考へたが，之では不備であつて，式 (4) の如き修正を行はなければ實驗と合はない事が判明し，この訂正を行つた．この修正は結局第1篇の EI の代りに，所謂換算撓み剛性（筆者はかく名付けたが）EJ を用ふればよいのであつて，捩れ挫屈を主張する理論の本質には變りはない．猶實驗結果の報告は別の機會に行ひたい．

以上の結果を綜合すれば，吊橋の具備すべき必要條件の一として，捩れ挫屈のみを對象とするならば支間の中央に節點がある場合，單位長當りの風壓 w に對し次式が與へられる．

$$\underline{KG}\cdot EJ \geqq \frac{w^2 l^6}{128\times 4\pi^2}\left[1+\frac{\sqrt{128}}{4\pi^2}\,\frac{\gamma'}{C_d}\right] \qquad \cdots\cdots (15)$$

但し，

$$\left.\begin{aligned} EJ &= EI+\frac{l^2}{2\pi^2}H \\ KG &= KG+\pi^2\frac{b^2}{l^2}EJ \\ \gamma' &= \left[\frac{dC_l}{d\varphi}\right]_{\varphi=0} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (16)$$

この式を書き替へれば，設計上便利な形のものとなるが，紙面の節約上省略する．

(9)，(15) 式により，捩り振動の安定性を支配する流體力學的諸係數の影響は，

i) 橋床斷面の抵抗係數

ii) 〃 揚力係數の迎角 φ に關する微係數

iii) 〃 流體力學的モーメント係數の迎角 φ に關する微係數

である事が窺はれる．從つて各種橋床斷面の流體力學的特性を實驗的に研究する事の重要なる事がわかる．

全4篇にわたり筆者は吊橋の捩り振動の安定性に就いて研究を行ひ，吊橋の具備すべき必要條件の一と見られる上式を得た．然し乍ら之は充分條件ではない事は第3篇の終りにも述べた所である．第2篇の終りに於て，自勵振動の條件に相當すべき條件が現はれたが，次に愈々この方面の研究を行ふべき段階に達した．又揚力の影響は或程度本篇及び第2篇に於て考慮に入れたが之ではまだ不充分の樣に感ぜられる．しかし乍ら之等の領域に立入るには，單に捩り振動の範圍で取扱ふ事は不充分である．從つて「捩り振動の安定性」に關しては，以上を以て一應終る事とす

る.

本稿の終りに臨み，御繁用中にも拘らず種々御教示を賜つた恩師東大教授田中　豊博士に厚く御禮申上ぐる次第である.　—— 完 ——

吊橋補剛桁の上下振動と捩り振動との間に生ずる一聯成現象

准員 林　泰　造*

A coupling Phenomenon that yield between vertical and torsional oscillations in Stiffner of suspension-bridge

By Taizo, Hayashi, Assoc. Member

梗　概　吊橋に對して，水平方向の風力が橋軸に垂直に作用する場合に，補剛桁の上下振動と中心軸の廻りの捩り振動とを聯成現象として取扱ひ，此の聯成振動の安定性及び安定性の限界に就て論じたものである．其の得られた結果は捩れ挫屈の條件に他ならない．

目　次

1. 基本式の考察

吊橋に對して，水平方向の風力が橋軸に垂直に作用する場合の補剛桁の捩り振動に關しては，既に東大平井助教授の御研究[1]がある．假定及び記號は總て同氏のものを使用する．

捩り振動の基本式は前記文献によれば，

$$\frac{\Theta}{l}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\left(KG+\frac{Hb^2}{2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+apb^2\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathfrak{M}_x. \quad \cdots\cdots(1)$$

但し，塔方向に x 軸を，補剛桁の中心軸方向に z 軸を採り，又

φ: 補剛桁の回轉角

t: 時　間

Θ: 補剛桁の中心軸廻りの慣性モーメント

l: 支　間

K: 補剛桁全斷面の捩り係數

---

* 工學士，東京大學第一工學部研究囑託

1) 平井敦助教授: "吊橋の捩り振動に對する安定性に就て," 土木學會誌第 28 卷 9 號. p. 769.