

るつもりである。(—未完—)

土のような塑性材料の變形と 破壊についての基礎理論

正 員 工 博 星 和 *

Fundamental Theory on the Deformation and Destruction of
plastic Materials as Soil

By Kazu, Hoshino, Dr. Engr., Member.

要旨 材料力學に廣く適用される弾性理論は土のような塑性材料には全く無力と云つてよく、破壊の現象はまた理論的にうまく説明されてゐない。一方塑性變形並びに破壊の實驗的事實はかなり明かになつてきてゐる。著者は土塊中の歪エネルギー量が變形並びに破壊に密接な關係を持つとの豫想から適當な假定の下に弾性限度を越へた塑性變形及び破壊の新理論を組立て、基本的關係を導き、各種應力條件の下で應力—歪曲線、破壊應力等を求め、モールの圓の包絡線を決定し、粘着力、内部摩擦角の意義を明かにした。

目 次

- I. 土塊の塑性變形及び破壊. II. 假定した條件と基本的諸關係の誘導.
III. 應力又は歪の基本條件が與へられた場合に於ける應力と歪との關係と破壊時の應力と歪の値.
IV. モールの圓の包絡線. V. 要 約

I. 土塊の塑性變形及び破壊

外力が働くと、土塊は少しづつ變形を増し、遂には破壊するようになるが、破壊が起るのは引張り應力又は剪應力が起つてゐる時に限られる。締固められる場合には土塊は漸次固化して緻密となり、變形しにくくなり且破壊強度も大きくなる。従つて土塊はほとんど或ひは全く弾性を示さない塑性材料として取扱はれなければならない。

塑性材料の變形理論についての研究は餘り進んでゐないため、將來發展すべき餘地が廣く殘されており、土質力學に應用するのに適當と認められる理論は未だ組立てられるに至つてゐない。

著者はここに土のような塑性材料の變形並びに破壊を説明する一つの新しい理論を提出する。この理論は材料の塑性變形並びに破壊がその中に蓄えられてゐるエネルギー量に密接な關係を持つてゐるとの豫想から出發したものである。

* 東京大學第二工學部助教授

次の二條件、即ち、應力と歪との間にはそれらの變化が極めて微小である場合に限つて弾性的な關係が成立つものとする。及び兩者を結びつける二つの係數が、壓應力の下では増し引張應力又は剪應力の下では減少するような歪エネルギーに直線的に比例する、と云ふ假定に基づいて一連の結果を導いたが、それには特殊な場合として弾性理論に一致する結果が含まれてゐる。

歪エネルギーと兩係數を表はす新しい合理的な公式は平均直應力と平均剪應力と呼ばれるもの、函數として導かれ、又彈性限界を越えた應力と歪との關係を表はす基本式及び破壊の條件式が導かれた。それ等の諸關係を應用して、基本的な應力條件の場合、例へば純粹剪斷、單純直應力、等應力等の場合に二次元又は三次元の問題として應力と歪との關係並びに破壊時の應力と歪の量とを決定することができる。かようにして求められた關係や計算結果は、既に知られてゐる諸實驗結果の傾向とうまく一致し、又材料力學の重要問題をかなりうまく説明することができる。

終りに平面應力、平面變形、ならびに三軸的對稱應力のような應力條件の場合にモールの圓の包終線を定め、粘着力や内部摩擦角の持つ意義を明かにした。

II. 假定した條件と基本的諸關係の誘導

應力の變化がごく微小な間は弾性理論が充分成立ち得るものと考へてよいから、小さな外力が作用してゐる土塊内の一點に生ずる應力と歪の關係は次式で表はされる。

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_1 &= \{d\sigma_1 - \nu(d\sigma_2 + d\sigma_3)\}/E \\ d\varepsilon_2 &= \{d\sigma_2 - \nu(d\sigma_3 + d\sigma_1)\}/E \\ d\varepsilon_3 &= \{d\sigma_3 - \nu(d\sigma_1 + d\sigma_2)\}/E \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

こゝに $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3 =$ 三主應力,
 $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3 =$ 三主歪
 $E =$ 彈性係數, $\nu =$ ポアソン比.

二つの彈性常數を

$$G = 3E/4(1+\nu), \quad \nu = E/(1-2\nu) \dots\dots\dots (2)$$

とおきかえると、式(1)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_1 &= (d\tau_1 - d\tau_3)/2G + (d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3)/3\nu \\ d\varepsilon_2 &= (d\tau_2 - d\tau_1)/2G + (d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3)/3\nu \\ d\varepsilon_3 &= (d\tau_3 - d\tau_2)/2G + (d\sigma_1 + d\sigma_2 + d\sigma_3)/3\nu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

こゝに $d\tau_1, d\tau_2, d\tau_3 =$ 三主剪應力、即ち

$$d\tau_1 = (d\sigma_1 - d\sigma_2)/2, \quad d\tau_2 = (d\sigma_2 - d\sigma_3)/2, \quad d\tau_3 = (d\sigma_3 - d\sigma_1)/2.$$

これらの應力の微小變化による歪エネルギーの變化は次式の如くなる。

$$dX = dX_g + dX_\nu \dots\dots\dots (4)$$

こゝに $dX_g = 3d(\tau_m^2)/G, \quad dX_\nu = 3d(\sigma_m^2)/\nu,$ そして

$$\left. \begin{aligned} \tau_m &= \sqrt{(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)/3} \\ \sigma_m &= (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

τ_m 及び σ_m はそれぞれ平均剪應力, 平均直應力と名付けられるべきものである。

式(3)及び式(4)より, 各主歪ならびに歪エネルギーは剪應力に伴なふ形状の變化に對するものと直應力に伴なふ容積の變化に對するものとに二分し得ることが分る。

若し二つの係數 G, V を一定とすると, 彈性理論の場合に相當することとなり, 式(4)から, 歪エネルギーは

$$X = X_g + X_v = 3\tau_m^2/G_0 + 3\sigma_m^2/V_0 \dots\dots\dots (6)$$

$\tau_m = 0$ ならば

$$X = 3\sigma_m^2/V_0 \dots\dots\dots (7)$$

となり, 剪應力が生じない場合は, よく知られてゐるように歪エネルギーが平均直應力の二乗に比例して變化する。

著者は二つの係數 G, V を一定とせず, 土塊中に蓄えられてゐる歪エネルギーに直比例するものと假定した。故に g, v を常數とすると

$$G = gX, \quad V = vX \dots\dots\dots (8)$$

歪エネルギーは壓縮應力によつて増すが, 引張應力又は剪應力によつて消費されるものと假定し, 壓縮應力を正に, 引張應力を負にとれば, 土塊中の歪エネルギーの變化は次式で表はされる。

$$dX = dX_v - dX_g \dots\dots\dots (9)$$

こゝに

$$dX_v = 3d(\sigma_m^2/V), \quad dX_g = 3d(\tau_m^2/G)$$

式(8)を代入して式(9)を積分すると

$$X = \sqrt{3(\sigma_m^2/v - \tau_m^2/g)}$$

となり, 初期條件として $\tau_m = 0, \sigma_m = \sigma_0$ に於て $V = V_0$, 且 $G = \mu^2 V$ とおくと,

$$v = (V_0/\sigma_0)^2/3, \quad g = \mu^2 v = \mu^2 (V_0/\sigma_0)^2/3 \dots\dots\dots (10)$$

よつて歪エネルギーは

$$X = 3\sigma_0/V_0 \times \sqrt{\sigma_m^2 - (\tau_m/\mu)^2} \dots\dots\dots (11)$$

式(11)に於て $\tau_m = 0$ ならば

$$X = 3\sigma_0\sigma_m/V_0 \dots\dots\dots (12)$$

式(12)より著者の塑性理論では歪エネルギーが平均直應力に比例し, 彈性理論に於けるようにその二乗に比例することはないことを知る。式(11)及び式(12)による歪エネルギーの表示は彈性理論に比してずつと自然であり且合理的であると思はれる。

式(8)に式(10)及び式(11)を代入して兩係數を求めると, 平均直應力と平均剪應力を含む式が得られる。即ち

$$\left. \begin{aligned} V &= v_0/\sigma_0 \times \sqrt{\sigma_m^2 - (\tau_m/\mu)^2} \\ G &= \mu^2 V = v_0/\sigma_0 \times \sqrt{\sigma_m^2 - (\tau_m/\mu)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

この場合の三主歪は式(3)に G, V のこの値を代入して次のように表はすることができる。

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_1 &= d(\tau_1 - \tau_3)/2\mu^2 v + d(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3v^* \\ d\varepsilon_2 &= d(\tau_2 - \tau_1)/2\mu^2 v + d(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3v^* \\ d\varepsilon_3 &= d(\tau_3 - \tau_2)/2\mu^2 v + d(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3v^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式(2)を参照すると次の諸関係が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \sqrt{G/V} = \sqrt{3(1-2\nu)/4(1+\nu)} \\ \text{又は} \quad E &= 6VG/(3V+2G) = 6\mu^2/(3+2\mu^2) \times V \\ V &= (3V-4G)/2(3V+2G) = (3-4\mu^2)/2(3+2\mu^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

式(15)によれば、 μ は直應力による容積変化に抵抗する度合に対する剪應力による形状変化に抵抗する度合の比を表はす常數であつて、ポアソン比から決定される値は零から $\sqrt{3}/2$ (0.866) の範圍に變化し得る (圖-1)。

土塊が破壊する場合に、土塊中に蓄えられた歪エネルギーは零になる。従つて式(11)に於て $X=0$ とおくと、破壊條件を與へる次式を得る。

$$\tau_m = \mu \sigma_m \dots\dots\dots (16)$$

式(16)によれば、 μ はまた破壊時に於て平均剪應力と平均直應力がとるべき比の値を與へることがわかる。

應力又は歪について基本的條件が與へられれば、式(14)を積分し應力と歪との關係を、又式(16)から破壊時の應力と歪の量を算定することは容易である。

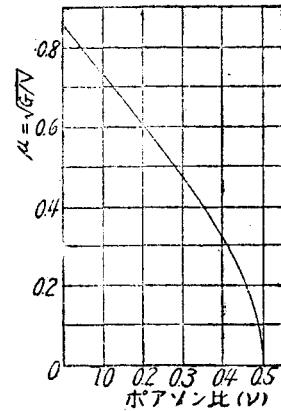


圖-1

III. 應力又は歪の基本條件が與へられた場合に於ける應力と歪との關係と破壊時の應力と歪の値

土塊は初期條件として内部的に一定の靜水壓 σ_0 をうけてその形狀を保つてゐるものとし、その容積彈性係數 (*bulk modulus*) は V_0 であると假定する。

次の場合について計算を試みた。

A. 二次元問題 (平面應力又は平面變形)

1. 純粹剪斷
2. 平面變形に於ける單純直應力
3. 平面應力に於ける等直應力
4. 平面變形に於ける等直應力

B. 三次元問題

1. 純粹剪斷
2. 單純直應力
3. 側方變位を許さない壓密
4. 等直應力 (靜水壓)

A. 二次元問題

1. 純粹剪斷

外力による應力と歪を $\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}$ で表はすことゝすると、純粹剪斷の場合は $\sigma_1 = \sigma_0 + \bar{\sigma}$, $\sigma_2 = \sigma_0$ 且 $\sigma_3 = \sigma_0 - \bar{\sigma}$ とおくと、式 (5) から

$$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 = \sigma_0$$

且
$$\tau_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2 = \bar{\sigma} / 2, \quad \tau_2 = (\sigma_2 - \sigma_3) / 2 = \bar{\sigma} / 2, \quad \tau_3 = (\sigma_3 - \sigma_1) / 2 = -\bar{\sigma}$$

よつて
$$\tau_m = \sqrt{(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)} / 3 = \bar{\sigma} / \sqrt{2}$$

これらの値を式 (13) に代入して

$$V = v_0 / \sigma_0 \times \sqrt{\sigma_m^2 - (\tau_m / \mu)^2} = V_0 \sqrt{1 - (\bar{\sigma} / \sigma_0)^2 / 2\mu^2}$$

よつて式 (14) より

$$d\epsilon = d\epsilon_1 = -d\epsilon_3 = (d\tau_1 - d\tau_3) / 2\mu^2 V = 3/4\mu^2 v_0 \times d\bar{\sigma} / \sqrt{1 - (\bar{\sigma} / \sigma_0)^2 / 2\mu^2}$$

$$d\epsilon_2 = 0$$

本式を積分し且 $\bar{\sigma} = 0$ に於て $\epsilon = 0$ とおけば、應力と歪との關係は次式で表はされる。

$$\epsilon \times v_0 / \sigma_0 = 3/2\sqrt{2}\mu \times \sin^{-1}(1/\sqrt{2}\mu \times \bar{\sigma} / \sigma_0) \dots\dots\dots (17)$$

應力の變化が極めて微小な場合は、上式より

$$\Delta\epsilon = 3/4\mu^2 \times \Delta\bar{\sigma} / V_0 \dots\dots\dots (18)$$

應力-歪曲線の初期接線係数は

$$k = \Delta\bar{\sigma} / \Delta\epsilon = 4\mu^2 / 3 \times V_0 \dots\dots\dots (19)$$

破壊に際しての應力と歪の値は σ_m, τ_m の値を (16) 式に代入して求めると次式のようなになる。

$$\bar{\sigma} / \sigma_0 = \sqrt{2}\mu, \quad \epsilon \times v_0 / \sigma_0 = 3\pi/4\sqrt{2}\mu \dots\dots\dots (20)$$

2. 平面變形に於ける單純直應力

平面變形の場合には、 $d\epsilon_3 = 0$ であるから、式 (14) より次の應力條件を得る。

$$\bar{\sigma}_2 = (3 - 4\mu^2) / 2(3 + 2\mu^2) \times (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3) \dots\dots\dots (21)$$

よつて $\sigma_1 = \sigma_0 + \bar{\sigma}_1$, $\sigma_3 = \sigma_0$ とおくと、前と同様にして應力と歪の關係は次式のようなになる。

$$\epsilon_1 \times V_0 / \sigma_0 = 3(3 + 8\mu^2) / 2\mu \sqrt{2(9 - 6\mu^2 + 16\mu^4)} \times [\sin^{-1}(3/2\mu) \sqrt{9 + 12\mu^2 + 16\mu^4} - \sin^{-1}(3\sqrt{2}\mu / \sqrt{9 + 12\mu^2 + 16\mu^4})] \dots\dots (22)$$

$$\begin{aligned}
 & -(9-6\mu^2+16\mu^4)/2\sqrt{2}\mu(3+2\mu^2)\sqrt{9+12\mu^2+16\mu^4}\times\bar{\sigma}_1/\sigma_0 \} \\
 \bar{\sigma}_3 = & -(3-4\mu^2)/(3+8\mu^2)\times\varepsilon \\
 \Delta\varepsilon_1 = & 3(3+8\mu^2)/8\mu^2(3+2\mu^2)\times\Delta\bar{\sigma}_1/V_0, \quad K=8\mu^2(3+2\mu^2)/3(3+8\mu^2)\times V_0 \dots\dots\dots (23)
 \end{aligned}$$

破壊時に於て

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \bar{\sigma}_1/\sigma_0 = & 2\sqrt{2}\mu(3+2\mu^2)/(\pm\sqrt{9+12\mu^2+16\mu^4}-3\sqrt{2}\mu) \\
 \varepsilon_1\times\nu_0/\sigma_0 = & 3(3+8\mu^2)/2\mu\sqrt{2(9-6\mu^2+16\mu^4)} \\
 & \times\{\sin^{-1}(3\sqrt{2}\mu/\sqrt{9+12\mu^2+16\mu^4}\pm\pi/2)\}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)
 \end{aligned}$$

3. 平面應力に於ける等直應力

平面應力の場合には、 $\sigma_2 = \sigma_0$ であるから、等直應力の場合に $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_0 + \bar{\sigma}$ とおけば、

$$\Delta\varepsilon = (3+8\mu^2)/12\mu^2\times\Delta\bar{\sigma}/V_0, \quad K=12\mu^2/(3+8\mu^2)\times V_0 \dots\dots\dots (25)$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \mu^2 < 3/8; \quad \varepsilon\times V_0/\sigma_0 = & (3+8\mu^2)/2\mu\sqrt{2(3-8\mu^2)}\times[\sin^{-1}(2\sqrt{2}\mu/\sqrt{3}) \\
 & -\sin^{-1}\{2\sqrt{2}\mu/\sqrt{3}-(3-8\mu^2)/3\sqrt{6}\mu\times\bar{\sigma}/\sigma_0\}] \\
 \mu^2 = 3/8; \quad \varepsilon\times V_0/\sigma_0 = & 2(\sqrt{1+4/3\times\bar{\sigma}/\sigma_0}-1) \\
 \mu^2 > 3/8; \quad \varepsilon\times V_0/\sigma_0 = & (3+8\mu^2)/2\mu\sqrt{2(8\mu^2-3)} \\
 & \times[l_n\{\sqrt{1+4/3\times\bar{\sigma}/\sigma_0+(8\mu^2-3)/18\mu^2\times(\bar{\sigma}/\sigma_0)^2} \\
 & -\sqrt{8\mu^2-3}/3\sqrt{2}\mu\times\bar{\sigma}/\sigma_0-2\sqrt{2}\mu/\sqrt{8\mu^2-3} \\
 & -l_n(1+2\sqrt{2}\mu/\sqrt{8\mu^2-3})]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)
 \end{aligned}$$

破壊時に於て

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 \mu^2 < 3/8; \quad \bar{\sigma}/\sigma_0 = & 3\sqrt{2}\mu/(\pm\sqrt{3}-2\sqrt{2}\mu) \\
 \varepsilon\times V_0/\sigma_0 = & (3+8\mu^2)/2\mu\sqrt{2(3-8\mu^2)}\times\sin^{-1}\{(2\sqrt{2}\mu/\sqrt{3})\pm\pi/2\} \\
 \mu^2 = 3/8; \quad \bar{\sigma}/\sigma_0 = & -3/4, \quad \varepsilon\times V_0/\sigma_0 = -2 \\
 \mu^2 > 3/8; \quad \bar{\sigma}/\sigma_0 = & -3\sqrt{2}\mu/(2\sqrt{2}\mu+\sqrt{3}) \\
 \varepsilon\times\nu_0/\sigma_0 = & (8\mu^2+3)/2\mu\sqrt{2(8\mu^2-3)} \\
 & \times l_n(2\sqrt{2}\mu/\sqrt{3}-\sqrt{8\mu^2-3}/\sqrt{3})
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)
 \end{aligned}$$

4. 平面變形に於ける等直應力

$\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_0 + \bar{\sigma}$ とおけば

$$\begin{aligned}
 \varepsilon\times V_0/\sigma_0 = & 3\sqrt{3}/2\sqrt{3-2\mu^2} \\
 & \times[l_n\{\sqrt{1+6/(3+2\mu^2)}\times\bar{\sigma}/\sigma_0+3(3-2\mu^2)/(3+2\mu^2)^2\times(\bar{\sigma}/\sigma_0)^2} \\
 & +\sqrt{3(3-2\mu^2)/(3+2\mu^2)}\times\bar{\sigma}/\sigma_0+\sqrt{3}/\sqrt{3-2\mu^2}\}-l_n(1+\sqrt{3}/\sqrt{3-2\mu^2})\dots\dots\dots (28)
 \end{aligned}$$

$$\Delta\varepsilon = 9/2(3+2\mu^2)\times\Delta\bar{\sigma}/V_0, \quad k=2(3+2\mu^2)/9\times V_0 \dots\dots\dots (29)$$

破壊時に於て

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}/\sigma_0 &= -(3+2\mu^2)/(3+\sqrt{6}\mu) \\ \varepsilon \times V_0/\sigma_0 &= 3\sqrt{3}/2\sqrt{3-2\mu^2} \times l_n(\sqrt{3}/\sqrt{2}\mu - \sqrt{3-2\mu^2}/\sqrt{2}\mu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

B. 三次元問題

1. 純粋剪断

 $\sigma_1 = \sigma_0 + \bar{\sigma}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0 - \bar{\sigma}/2$. とおくと, 應力と歪の関係は次のようになる.

$$\varepsilon \times V_0/\sigma_0 = \sqrt{3}/\sqrt{2}\mu \times \sin^{-1}(\sqrt{3}/2\sqrt{2}\mu \times \bar{\sigma}/\sigma_0) \dots\dots\dots (31)$$

$$\Delta\varepsilon = 3/4\mu^2 \times \Delta\bar{\sigma}/v_0, \quad k = 4\mu^2/3 \times V_0 \dots\dots\dots (32)$$

破壊時に於て

$$\bar{\sigma}/\sigma_0 = 2\sqrt{2}\mu/\sqrt{3}, \quad \bar{\varepsilon} \times V_0/\sigma_0 = \sqrt{3}\pi/2\sqrt{2}\mu \dots\dots\dots (33)$$

2. 單純直應力

 $\sigma_1 = \sigma_0 + \bar{\sigma}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$ とおけば

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 \times V_0/\sigma_0 &= (3+2\mu^2)/\mu\sqrt{2(3-2\mu^2)} \times [\sin^{-1}(\sqrt{2}\mu/\sqrt{3}) \\ &\quad - \sin^{-1}\{\sqrt{2}\mu/\sqrt{3} - (3-2\mu^2)/3\sqrt{6}\mu \times \bar{\sigma}/\sigma_0\}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_3 = -(3-4\mu^2)/2(3+2\mu^2) \times \bar{\varepsilon}_1$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\bar{\varepsilon}_1 &= (3+2\mu^2)/6\mu^2 \times \Delta\bar{\sigma}_1/V_0, \quad \Delta\bar{\varepsilon}_2 = -(3-4\mu^2)/12\mu^2 \times \Delta\bar{\sigma}_1/V_0 \\ k &= \Delta\bar{\sigma}_1/\Delta\bar{\varepsilon}_1 = 6\mu^2/(3+2\mu^2) \times v_0 = E, \quad -\Delta\bar{\varepsilon}_2/\Delta\bar{\varepsilon}_1 = (3-4\mu^2)/2(3+2\mu^2) = \nu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

破壊時に於て

$$\bar{\sigma}_1/\sigma_0 = 3\mu/(\pm\sqrt{3}\sqrt{2-\mu}) \dots\dots\dots (36)$$

$$\bar{\varepsilon}_1 \times V_0/\sigma_0 = (3+2\mu^2)/\mu\sqrt{2(3-2\mu^2)} \times \{\sin^{-1}(\sqrt{3}\mu/\sqrt{3}) \pm \pi/2\}$$

3. 側方への變位を許さない壓密

 $d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3 = 0$ とおけば, 式(14)から

$$\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = (3-4\mu^2)/(3+8\mu^2) \times \bar{\sigma}_1$$

よつて

$$\Delta\bar{\varepsilon}_1 = 9/(3+8\mu^2) \times \Delta\bar{\sigma}_1/V_0, \quad k = (3+8\mu^2)/9 \times V_0 \dots\dots\dots (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu^2 < 3/8; \quad \bar{\varepsilon}_1 \times V_0/\sigma_0 &= 3\sqrt{3}/\sqrt{3-8\mu^2} \\ &\quad \times [l_n\{V_1+6/(3+8\mu^2) \times \bar{\sigma}_1/\sigma_0 + 3(3-8\mu^2)/(3+8\mu^2)^2 \\ &\quad \times (\bar{\sigma}_1/\sigma_0)^2 + \sqrt{3(3-8\mu^2)/(3+8\mu^2)} \times \bar{\sigma}_1/\sigma_0 + \sqrt{3}/\sqrt{3-8\mu^2}\} \\ &\quad - l_n(1 + \sqrt{3}/\sqrt{3-8\mu^2})] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

$$\mu^2 = 3/8; \quad \bar{\varepsilon}_1 \times V_0/\sigma_0 = 3(\sqrt{1+\bar{\sigma}_1/\sigma_0} - 1)$$

$$\mu^2 > 3/8; \quad \bar{\varepsilon}_1 \times V_0/\sigma_0 = 3\sqrt{3}/\sqrt{3\mu^2-3} \times [\sin^{-1}(\sqrt{3}/2\sqrt{2}\mu)$$

$$-\sin^{-1}\{\sqrt{3}/2\sqrt{2}\mu - \sqrt{3}(8\mu^2-3)/2\sqrt{2}\mu(3+8\mu^2) \times \bar{\sigma}_1/\sigma_0\}]$$

破壊時に於て

$$\mu^2 > 3/8; \bar{\sigma}_1/\sigma_0 = (8\mu^2+3)/\sqrt{3}(2\sqrt{2}\mu - \sqrt{3})$$

$$\bar{\epsilon}_1 \times V_0/\sigma_0 = 3\sqrt{3}/\sqrt{8\mu^2-3} \times \{\sin^{-1}(\sqrt{3}/2\sqrt{2}\mu) \pm \pi/2\} \dots\dots\dots (39)$$

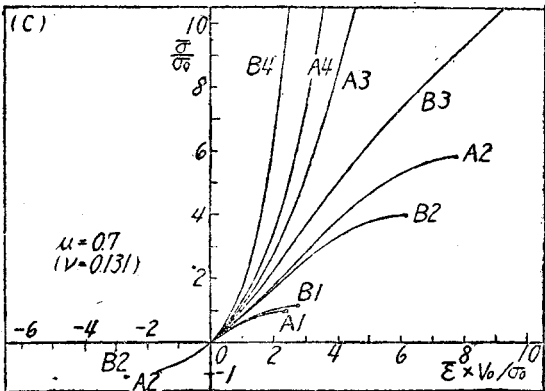
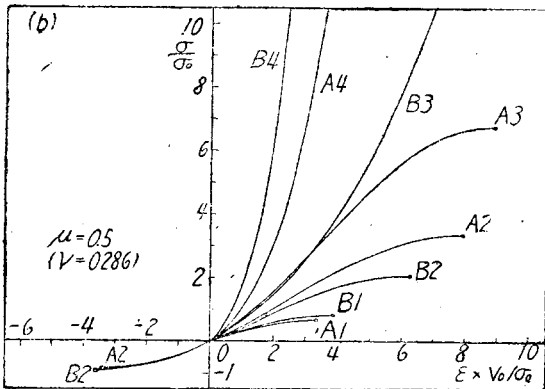
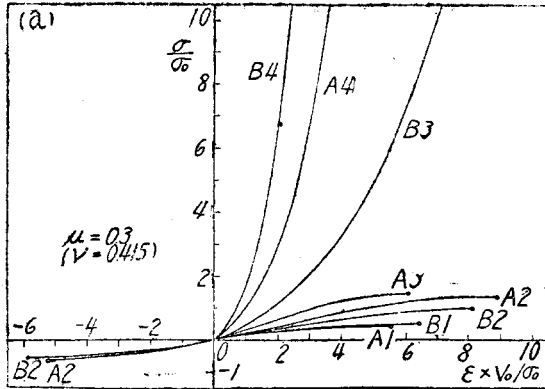


圖-2

4. 等直應力 (静水壓)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0 + \bar{\sigma}_1 \text{ とおけば}$$

$$\bar{\epsilon} \times V_0/\sigma_0 = I_n(1 + \bar{\sigma}/\sigma_0) \dots\dots\dots (40)$$

$$\Delta \bar{\epsilon} = \Delta \bar{\sigma} / V_0, K = V_0 \dots\dots\dots (41)$$

破壊時に於て

$$\bar{\sigma}/\sigma_0 = -1, \bar{\epsilon} \times V_0/\sigma_0 = -\infty \dots (42)$$

$\mu = 0.3, 0.5$ 及び 0.7 (又は $\nu = 0.415, 0.285$ 及び 0.131) の場合について應力-歪曲線を畫くと圖-2 (a), (b) 及び (c) のようになる。 μ が初期接線係數 K の値並びに破壊時の應力 $\bar{\sigma}$ と $\bar{\epsilon}$ 歪の値に及ぼす影響は圖-3 及び 圖-4 (a), (b) に示すようになる。

脆性材料ではポアソン比が小さく、その引張強度に対する剪斷強度又は壓縮強度の比はかなり大きい。延性材料では反對にポアソン比が大きく、それらの強度の比は比較的小さいことはよく知られた事實である。ポアソン比 ν が小さくなると新常數 μ

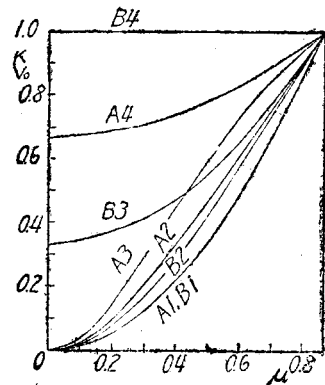


圖-3

が大きくなることを併せ考へると、新理論に於てもこれと全く同様な傾向を示してゐることがわかる。

IV. モールの圓の包絡線

平面應力、平面變形及び三軸的對稱應力のような應力條件の下で破壊の條件からモールの圓の包絡線を求めることができる。

モールの圓は次の如く表はされる。

$$F = \bar{\sigma}^2 - (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3)\bar{\sigma} + \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 - \tau^2 = 0 \dots\dots\dots(43)$$

こゝに $\bar{\sigma}$ = 直應力、 τ = 接面應力

F の包絡線はそれに破壊の條件から得られる $\bar{\sigma}_1$ と $\bar{\sigma}_3$ との關係を代入したものを $\bar{\sigma}_3$ 又は $\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3$ で偏微分した結果を利用して決定することができる。

1. 平面應力

平面應力の場合は、 $\sigma_1 = \sigma_0 + \bar{\sigma}_1$, $\sigma_2 = \sigma_0$, $\sigma_3 = \sigma_0 + \bar{\sigma}_3$

よつて

$$\sigma_m = \sigma_0 + (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3)/3$$

$$\tau_m = \sqrt{(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3)^2 - 3\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3} / \sqrt{6}$$

これらの値を破壊條件 $\tau_m = \mu\sigma_m$ に代入すると次の關係が得られる。

$$\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 = (3 - 2\mu^2)/9 \times (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3)^2 - 4\mu^2/3 \times (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3)\sigma_0 - 2\mu^2\sigma_0^2$$

この値を下に代入し、 $\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3$ で偏微分すると

$$\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3 = 3(3\bar{\sigma} + 4\mu^2\sigma_0)/2(3 - 2\mu^2)$$

これを F に代入して、包絡線の式を求めると

$$\tau^2 = \{-(3 - 8\mu^2)\bar{\sigma}^2 + 24\mu^2\sigma_0\bar{\sigma} + 24\mu^2\sigma_0^2\}/4(3 - 2\mu^2) \dots\dots\dots(44)$$

この場合次のようになる。

$\mu^2 < 3/8$ ならば楕圓、 $\mu^2 = 3/8$ ならば拋物線、 $\mu^2 > 3/8$ ならば双曲線で、もし $\sigma_0 = 0$ ならば直線。

2. 平面變形

平面變形の場合は、 $d\varepsilon_2 = 0$ 。よつて

$$\bar{\sigma}_2 = (3 - 4\mu^2)/2(3 + 2\mu^2) \times (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3)$$

$$\sigma_m = \sigma_0 + 3/2(3 + 2\mu^2) \times (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3)$$

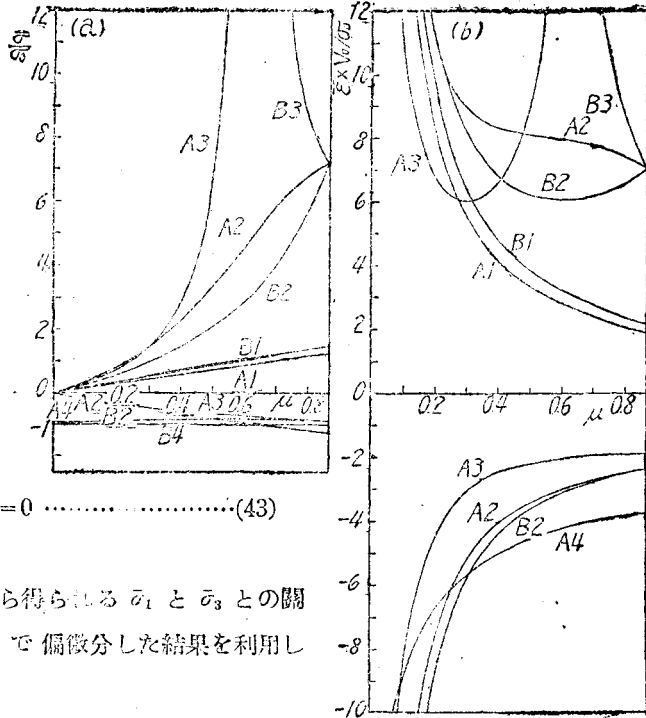


圖-4

$$\tau_m = \sqrt{(9+12\mu^2+16\mu^4)/8(3+2\mu^2) \times (\bar{\sigma}_1+\bar{\sigma}_3)^3 - \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3}/2$$

前同様にして、破壊の條件から

$$\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_3 = (9-6\mu^2+16\mu^4)/4(3+2\mu^2)^2 \times (\bar{\sigma}_1+\bar{\sigma}_3)^2 - 6\mu^2/(3+2\mu^2) \times \sigma_0(\bar{\sigma}_1+\bar{\sigma}_3) - 2\mu^2\sigma_0^2$$

この値を F に代入し、 $\bar{\sigma}_1+\bar{\sigma}_3$ で偏微分すると

$$\bar{\sigma}_1+\bar{\sigma}_3 = (2+2\mu^2)/(9-6\mu^2+16\mu^4) \times \{\bar{\sigma}+6\mu^2/(3+2\mu^2) \times \sigma_0\}$$

よつて包絡線の式は

$$\tau^2 = 2\mu^2/(9-6\mu^2+16\mu^4) \times \{3(3-2\mu^2)\bar{\sigma}^2 + 6(3+2\mu^2)\sigma_0\bar{\sigma} + (9+12\mu^2+16\mu^4)\sigma_0\} \dots \dots (45)$$

この場合は双曲線が得られ、 $\sigma_0=0$ ならば直線となる。

3. 三軸的對稱應力

三軸的な對稱應力では、 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_0+\bar{\sigma}$ 、よつて

$$\sigma_m = \sigma_0 + (\bar{\sigma}_1 + 2\bar{\sigma}_3)/3$$

$$\tau_m = \pm(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)/\sqrt{6}$$

破壊條件から

$$\bar{\sigma}_1 = 1/(\pm 3 - \sqrt{6}\mu) \times \{3\sqrt{6}\mu\sigma_0 + (2\sqrt{6} \pm 3)\bar{\sigma}_3\}$$

この値を F に代入し、 $\bar{\sigma}_3$ で偏微分すると

$$\bar{\sigma}_3 = \{(\pm 6 + \sqrt{6}\mu)\bar{\sigma} - 3\sqrt{6}\mu\sigma_0\}/(\pm 6 + 4\sqrt{6}\mu)$$

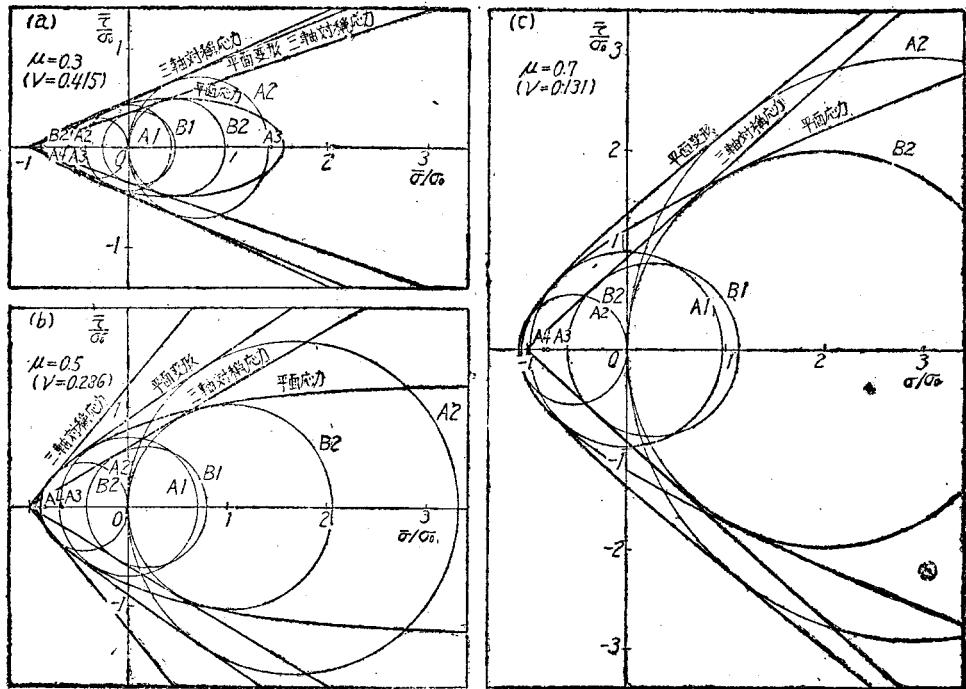


圖-5

$$\bar{\sigma}_1 = \{(\pm 6 + \sqrt{6}\mu)\bar{\sigma} + 3\sqrt{6}\mu\sigma_0\} / 2(\pm 3 - \sqrt{6}\mu)$$

従つて包絡線の式は

$$\tau = \pm 3\sqrt{3}\mu / \sqrt{2} (\pm 3 - \sqrt{6}\mu) (\pm 3 + 2\sqrt{6}\mu) \times (\sigma + \sigma_0) \dots\dots\dots (46)$$

この場合は直線が得られ、従つて粘着力及び内部摩擦係数として次式が求められる、

$$\left. \begin{aligned} C &= 3\sqrt{3}\mu / \sqrt{2(\pm 3 - \sqrt{6}\mu)(\pm 3 + 2\sqrt{6}\mu)} \times \sigma_0 \\ \tan\phi &= 3\sqrt{3}\mu / \sqrt{2(\pm 3 - \sqrt{6}\mu)(\pm 3 + 2\sqrt{6}\mu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

$\mu = 0.3, 0.5$ 及び 0.7 (又は $\nu = 0.415, 0.285$ 及び 0.931) の場合に於ける包絡線は 圖-5 (a), (b) 及び (c) に示すようになる。

V. 要 約

1. 次の如く假定した

- a. 弾性變形の式は應力の變化が極めて微小な場合に限つて成立つ。
- b. 應力と歪との間に存する二つの係数 (一つは剪應力に伴ふ形状變化に對するもの、他は直應力に伴ふ容積變化に對するもの) は共に土塊中に蓄えられた歪エネルギーの量に比例する。
- c. 土塊中の歪エネルギーは壓縮應力によつて蓄えられ引張應力又は剪應力によつて消費される。

2. 上記の假定から得た基本的な關係は次の如くてある。

- a. 歪エネルギーは式 (11) より次の如くなる。

$$X = 3\sigma_0 / \nu_0 \times \sqrt{\sigma_m^2 - (\tau_m / \mu)^2}$$

こゝに $\sigma_0, \nu_0 =$ 初期條件として與へられる常數

$\sigma_m, \tau_m =$ 平均直應力及び平均剪應力

$\mu, \nu =$ ポアソン比 ν より決められる比を表はす係數、即ち式 (15) から

$$\mu = \sqrt{3(1-2\nu)/4(1+\nu)}$$

新理論によれば土塊中の歪エネルギーは剪應力を生じてゐない時平均直應力に比例すると云ふ自然且合理的な關係が得られ、弾性理論に於けるようにその二乗に比例することはない。

- b. 兩係數は平均直應力と平均剪應力を含む式 (13) によつて表はされ、兩者の間に次のような關係がある。

$$V = V_0 / \sigma_0 \times \sqrt{\sigma_w^2 - (\tau_m / \mu)^2}$$

$$G = \mu^2 V = \mu^2 V_0 / \sigma_0 \times \sqrt{\sigma_w^2 - (\tau_m / \mu)^2}$$

- c. G 及び V の値を式 (3) に代入すると、式 (14) で表はされるような塑性材料の應力と歪との關係を示す基本式が得られる。

- d. 土塊が破壊する際には、蓄えられた歪エネルギーが消費されつくして終ふと云ふ條件から、

式(16)のような破壊條件が得られる。即ち

$$\tau_m = \mu \bar{\sigma}_m$$

これから應力又は歪の基本條件が與へられてゐる場合に破壊時の應力及び歪の量を定めることができる。

3. 應力又は歪の基本條件が例へば純粹剪斷、單純直應力、等應力等によつて與へられた場合に二次元又は三次元の問題として、應力と歪の關係を求めた。その結果をまとめると次のようになる。

- a. それ等の得られた諸關係はよく知られてゐる實驗的諸事實の傾向とうまく合致する。
- b. 彈性理論は土塊中の應力變化が當初に存在してゐた應力 σ_0 に比して極めて小さい場合に新理論の特別な場合として成立つ。
- c. 新常數 μ 又はポアソン比 ν が各種の荷重條件の下で起る變形に及ぼす影響をうまく説明できる。
- d. 破壊時の應力と歪の量は純粹剪斷、單純直應力又は等直應力等の場合に決定することができる。新常數 μ が破壊時の應力や歪に及ぼす影響を知ることができるが、その傾向は實驗的諸事實とよく一致する。

單純壓縮試験、單純引張試験、剪斷試験、三軸載荷試験等の各種荷重條件による破壊強度の間の相互關係を明かにすることができた。

4. 平面應力、平面變形、及び三軸對稱荷重のような應力條件の下でモールの圓の包絡線を求めた。それらは常に必ずしも直線ではなく、應力條件が異なると μ の値の如何によつて、橢圓、拋物線或いは双曲線を畫く。

本研究に必要な諸計算には宇田川和子さんの助力を得た。なほ文部省科學研究費並びに日本學術振興會の財政的援助を得た。併せて深謝する次第である。