

# 管内に於ける擴まり流れ及平行な流れの流速分布

准會員 青 松 健 一\*

**要 旨** 本文は混合距離の分布を適當に假定することによつて、管内に於ける2次元の擴まり流れ及平行な流れの中央部の流速分布を求めたものである。

## 目 次

- |             |          |
|-------------|----------|
| 1. 緒 言      | 5. 平行な流れ |
| 2. 混合距離の分布  | 6. 擴まり流れ |
| 3. 運動方程式    | 7. 結 語   |
| 4. 運動方程式の積分 |          |

## 1. 緒 言

現在亂流に關する理論的研究は、統計論を應用し所謂等方性の亂れを解明することに向けられてゐる。併し乍ら未だ實用的な結果を與へるには至つてゐない様である。之に對し從來の Prandtl-v. Kármán の運動量輸送の理論は、之を適當に應用すると、平均流速の分布等に関し實驗とよく一致する結果を與へるので理論的には完全とは云へないにしても、應用上重要な意義をもつものと考へられる。本文は此の運動量輸送の理論に於ける混合距離の分布を適當に假定し、管内に於ける2次元の平行な流れ及擴まり流れの中央部分の流速分布を求めたものである。特に平行な流れに就ては、Darcy が粗い壁面を有する管の實驗から求めた流速分布式と同じになると云ふ興味ある結果が得られた。

## 2. 混合距離の分布

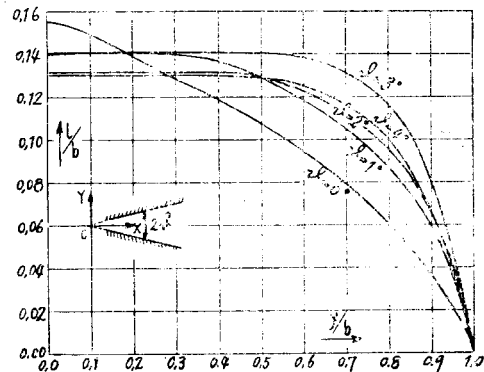
今2次元の亂流を考へ、主運動の方向に  $x$  軸、それに直角に  $y$  軸をとると、亂れによる見掛けの剪断應力  $\tau$  は、Prandtl により次の如く表されてゐる。

$$\tau = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}$$

茲に  $l$  は混合距離、 $u$  は  $x$  軸方向の流速、 $\rho$  は流體の密度である。 $l$  は未知量であるが、その物理的意味又はディメンション解析による考察から、壁面の近くではそれからの距離に比例すると考へられ、又噴流や後流の如き所謂自由な亂れの場合は、断面一様に分布しその幅に比例すると考へられた。實際此の様に假定して計算された流速分布は、實驗結果とよく一致することが確められてゐる。

さて本文に於て取扱ふ、2次元の平行な流れ及擴まり流れに關し、Nikuradse<sup>1)</sup> が實測した混合距離の分布は、

圖-1. Nikuradse による混合距離の分布



\* 滿鐵鐵道技術研究所

1) J. Nikuradse: "Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen", Forsch. Arb., Heft 289 (1929).

圖-1 に示す通りである。圖に於て  $b$  は管中心から壁面までの距離、 $\theta$  は兩側壁の開き角の半分の値である。此の實驗では管中心の近くの僅かの部分に於て、實驗の點が散らばつてゐるが、之は此の部分で  $\partial u/\partial y$  及  $\tau$  が共に 0 に近い値をとり、 $l$  の正確な算定が困難なことによるものと考へ、此の圖では之を無視することにした。此の圖から直ちに看取されることは、管中央の大部分にわたつて  $l$  の値が略々一定してゐることである。この事實は、管中央に於ける亂れが、後流や噴流に於ける如き自由な亂れ<sup>2)</sup> に似てゐるためと考へられ、亂流の一つの特質として注目すべきものと云はねばならない。本文では斯る事實に着目し、管の中央に於ては、自由な亂れに於ける如く、混合距離  $l$  は一定で幅  $b$  に比例すると考へ、

$$l/b = k \dots\dots\dots (2.2)$$

と假定して此の部分の流速分布を求めたのである。

### 3. 運動方程式

圖-1 に示す如く座標原點を兩側壁の延長の交點にとり、 $u$  及  $v$  を夫々  $x$  及  $y$  軸方向の分速度、 $p$  を靜壓、 $\rho$  を流體密度とすれば、 $p$  は斷面上一様に分布すると假定してよいから、運動方程式は次の様に表される。

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

之に (2.1) 及 (2.2) より得られる關係式

$$\tau = -\rho k^2 b^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

を代入すると、

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} - 2\rho k^2 b^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots (3.1)$$

今流速分布が各斷面とも互に相似であると假定すると<sup>1)</sup>、

$$u/u_0 = f(\eta), \dots\dots\dots (3.2)$$

$$\text{但し } \eta = y/b$$

と置いてよい。茲に  $u_0$  は  $y=0$ 、即ち管中心に於ける流速を表し、斷面中最大の値をとるものとする。従つて單位幅の流量を  $q$  とすれば、

$$q = 2 \int_0^b u dy = 2u_0 \int_0^b f(\eta) dy = 2bu_0 \int_0^1 f(\eta) d\eta$$

$$\therefore bu_0 = q/(2\alpha) \dots\dots\dots (3.3)$$

$$\text{但し } \alpha = \int_0^1 f(\eta) d\eta$$

一方連続の條件から、流量は斷面と共に變化しない筈であるから、 $q/(2\alpha)$  従つて  $bu_0$  の値は  $x, y$  に無關係な常數である。

さて (3.2) を考慮し、流函數  $\psi$  を次の如く置く。

$$\psi = u_0 b \varphi(\eta)$$

然らば  $m = \tan \theta$  とするとき  $b = mx$  となることを考へ、

2) H. Schlichting: "Über das ebene Windschattenproblem". Ing. Arch., 1 Bd. (1930).

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y'} = u_0 b \varphi'(\eta) \cdot \frac{1}{b} = u_0 \varphi'(\eta) = u_0 f(\eta) \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -(u_0 b) \varphi''(\eta) \cdot y \cdot \left(-\frac{m}{b^2}\right) \\ &= m u_0 \eta f'(\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.4)$$

次に (3.1) 式に於て  $y \rightarrow 0$  の極限をとると、

$$\rho u_0 \frac{d u_0}{d x} + 2 \rho k^2 b^2 \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -\frac{d p}{d x}$$

然るに (3.4) の関係を用ひると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y'} &= \frac{u_0}{b} f'(\eta), & \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} &= \frac{u_0}{b_0} f''(\eta) \\ \therefore -\frac{d}{d x} \left( p + \frac{\rho u_0^2}{2} \right) &= \frac{\lambda}{b} \frac{\rho u_0^2}{2} \dots\dots\dots (3.5) \\ \text{但し } \lambda &= 4 k^2 \lim_{\eta \rightarrow 0} f'(\eta) f''(\eta) \end{aligned}$$

今 (3.3)~(3.5) の関係を (3.1) に代入して整頓すると、

$$2m(1-f^2) = \lambda - 4k^2 f f'' \dots\dots\dots (3.6)$$

之が求める運動方程式であつて、次の境界条件

$$\begin{aligned} \eta = 0 \quad \text{のとき,} \\ f(\eta) = 1 \quad \text{及} \quad f'(\eta) = 0 \dots\dots\dots (3.7) \end{aligned}$$

のもとに積分すれば、所要の流速分布が得られる筈である。

#### 4. 運動方程式の積分

先づ (3.6) 式を 1 回積分し、(3.7) の境界条件より  $\eta = 0$  にて  $f' = 0$  なることを考慮すると、

$$2k^2 f'^2 = \lambda \eta - 2m \int_0^\eta (1-f^2) d\eta \dots\dots\dots (4.1)$$

今  $f(\eta)$  が  $\eta^{3/2} = Y$  の冪級数に展開されるものとして、

$$f = 1 + c_1 Y + c_2 Y^2 + c_3 Y^3 + \dots$$

と置けば、

$$f' = Y'(c_1 + 2c_2 Y + 3c_3 Y^2 + \dots), \quad Y' = \frac{3}{2} \sqrt{\eta}$$

之等を (4.1) 式に代入し、係数  $c_1, c_2, c_3, \dots$  を決定しよう。其のために必要な計算として、

$$\begin{aligned} f'^2 &= \frac{9}{4} \eta \{ c_1^2 + 4c_1 c_2 Y + (4c_2^2 + 6c_1 c_3) Y^2 + \dots \} \\ f^2 &= 1 + 2c_1 Y + (2c_2 + c_1^2) Y^2 + \dots \\ \int_1^\eta (1-f^2) d\eta &= -2c_1 \cdot \frac{2}{5} \eta^{5/2} - (2c_2 + c_1^2) \frac{1}{4} \eta^2 - \dots = -\eta \left\{ \frac{4}{5} c_1 Y + \frac{1}{4} (2c_2 + c_1^2) Y^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

従つて (4.1) の関係から、

$$\frac{9}{2} k^2 \{ c_1^2 + 4c_1 c_2 Y + (4c_2^2 + 6c_1 c_3) Y^2 + \dots \} = \lambda + 2m \left\{ \frac{4}{5} c_1 Y + \frac{1}{4} (2c_2 + c_1^2) Y^2 + \dots \right\}$$

上式に於ける兩邊の係数を比較することによつて、

$$\frac{9}{2} k^2 c_1^2 = \lambda, \quad \frac{9}{2} k^2 \cdot 4c_1 c_2 = 2m \cdot \frac{4}{5} c_1, \dots$$

$$\therefore c_1 = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{\lambda}}{3k}, \quad c_2 = \frac{4m}{45k^2}, \dots \dots \dots (4.2)$$

茲に  $c_1$  を負にとつたのは、次の理由によるものである。即ち平行な流れにては  $m=0$  なることから、 $c_2=c_3=c_4=\dots=0$  となり、 $f=1+c_1\eta$  となるが、 $f \leq 1$  であるから  $c_1 \leq 0$  とならねばならない。之等の係数を用ひると、

$$f = 1 - \frac{\sqrt{2}\sqrt{\lambda}}{3k} \eta^{3/2} + \frac{5m}{45k^2} \eta^3 + \dots \dots \dots (4.3)$$

ここで  $\eta$  の高次の項を省略すれば、 $f$  は次の如くなり、之を用ひて (3.2) 式から所要の流速分布が計算される。

$$f = 1 - \frac{\sqrt{2}\sqrt{\lambda}}{3k} \eta^{3/2} + \frac{4m}{45k^2} \eta^3 \dots \dots \dots (4.4)$$

### 5. 平行な流れ

断面一樣な矩形管内の 2 次元流は平行な流れに屬する。此の場合には、(4.1) 式にて  $m=0$  と置いて別に解くか、又は (4.4) 式にて  $m=0$  と置けばよく、明かに

$$f = 1 - \frac{\sqrt{2}\sqrt{\lambda}}{3k} \eta^{3/2} \dots \dots \dots (5.1)$$

となるが、之を少しく變形して見よう。簡単な計算から、壁面に働く剪断應力  $\tau_0$  と壓力勾配との間には、次の關係が成立する。

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\tau_0}{b}$$

然るに平行な流れにては  $du_0/dx=0$  であるから、(3.5) 式から

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\lambda \rho u_0^2}{b \cdot 2}$$

$$\therefore \sqrt{\lambda} = \sqrt{2} \frac{v_*}{u_0} \dots \dots \dots (5.2)$$

$$\text{但し } v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

之を (5.1) 式に代入して整頓すれば、

$$\frac{u_0 - u}{v_*} = \frac{2}{3k} \eta^{3/2} \dots \dots \dots (5.3)$$

此の關係は全く類似の状況にある断面一樣な圓管内の流速分布にも適用せられる筈である。事實 Darcy はその粗い圓管の實驗から、上と同形である次の流速分布式<sup>3)</sup>

$$\frac{u_0 - u}{v_*} = 5.08 \eta^{3/2} \dots \dots \dots (5.4)$$

を與へてゐる。(5.3) と (5.4) の兩式を比較し  $k=0.13$  を得るが、之は圖-1 に示す Nikuradse の實測と大體一致してゐる。尙 (5.4) の流速分布式は Nikuradse<sup>4)</sup> の粗い圓管の實驗により、 $\eta < 0.67$  の範圍で實驗とよく一致す

3) Darcy: Mémoires des Savants étrangers., Vol. xv. p. 141 (1858).

4) J. Nikuradse: "Strömungsgesetze in rauhen Röhren", Forsch. Arb., Heft 361 (1933).

ることが確められてゐる。次節の圖-2 には此の場合の流速分布の 1 例を擴まり流れの場合と比較して示して置いた。

## 6. 擴まり流れ

Nikuradse<sup>1)</sup> は矩形断面の管にて側壁を動かすことにより其の夾角  $2\vartheta$  を種々に變へる様にして、擴まり流れ及狹まり流れを實現し、流速分布及管軸に沿ふ壓力分布を測定した。その際矩形断面の 1 邊を他に比して充分長くし、流れを 2 次元の問題として取扱ひ得る様にしたが、茲では擴まり流れの場合のみに就て述べることにする。此の場合には剝離現象を伴ふ關係上、開き角が大きすぎると流れが不安定となるため、流速分布が對稱の形を保つのは  $\vartheta=4^\circ$  までであつた。圖-2 は  $\vartheta=0^\circ, 1^\circ, 3^\circ, 4^\circ$  の各々の場合につき、流量を凡べて同一とした際の流速分布を示したものである。圖中の小圓點は Nikuradse の實測値、曲線は  $k=0.13$  として (4.4) 式から著者が計算した結果である。之より管壁附近を除くと、(4.4) 式は可成りよく實驗と一致することがわかる。

今 1 例として (4.4) 式の計算を  $\vartheta=1^\circ$  の場合に就て示すと次の通りである。

先づ (3.3) 式から、

$$bu_0 = \frac{q}{(2\alpha)}, \quad \frac{du_0}{dx} = -\left(\frac{q}{2\alpha}\right)\frac{m}{b^2}$$

$$\therefore u_0 \frac{du_0}{dx} = -\frac{mu_0^2}{b}$$

此の場合 Nikuradse の實驗にては、 $m = \tan 1^\circ = 0.01746$   $b = 1.1$  cm  $u_0 = 420$  cm/sec であつたから、

$$u_0 \frac{du_0}{dx} = -2800 \text{ cm/sec}^2$$

又實驗から、

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 1730 \text{ cm/sec}^2$$

従つて (3.5) 式から、

$$\lambda = \frac{2b}{u_0^2} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - u_0 \frac{du_0}{dx} \right) = 0.013345,$$

$$\therefore \sqrt{\lambda} = 0.1155$$

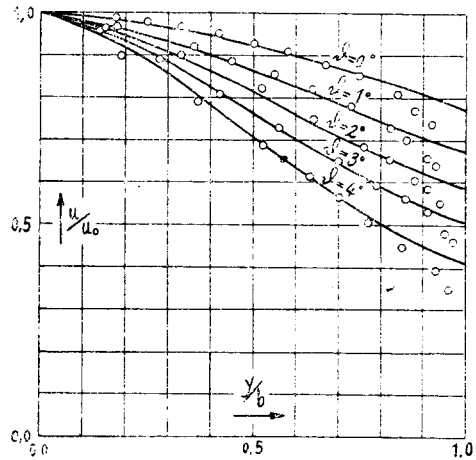
故に (4.4) 式を用ひ、 $\vartheta=1^\circ$  に對する所要の流速分布式として、

$$f(\eta) = \frac{u}{u_0} = 1 - 0.4188 \eta^{3/2} + 0.09184 \eta^3, \quad \eta = y/b$$

同様にして  $\vartheta$  の他の値に對しては、

圖-2. 管内に於ける流速分布

(Nikuradse の實測値と著者の計算結果との比較)



$$\phi = 2^\circ; \quad \frac{u}{u_0} = 1 - 0.5987 \eta^{3/2} + 0.1837 \eta^3$$

$$\phi = 3^\circ; \quad \frac{u}{u_0} = 1 - 0.7698 \eta^{3/2} + 0.2757 \eta^3$$

$$\phi = 4^\circ; \quad \frac{u}{u_0} = 1 - 0.9569 \eta^{3/2} + 0.3678 \eta^3$$

$$\phi = 0^\circ; \quad \frac{u}{u_0} = 1 - 0.2219 \eta^{3/2}$$

## 7. 結 語

混合距離の分布に關する假定により問題を非常に簡單化し、擴まり流れ及平行な流れの中央部分の流速分布を可成りよく表す式が得られた。此の式は假定から直ちに豫想されるやうに、管壁附近には全く實驗と一致しない。この管壁附近に對しては Prandtl の 1/7-乗則<sup>1)</sup>又は對數法則<sup>2)</sup>が成立する様であるが、茲では之に立入らず、唯

$$l/b = k$$

なる一貫した假定により、種々の場合の流速分布が求められることを指摘するに止めたいと思ふ。

**附記** 本研究は著者が京都帝國大學工學部助手として奉職中、同教授石原藤次郎博士の懇切な御指導の下に行つたもので、文部省科學研究費の補助に負ふ所が多い。茲に特記して深く謝意を表する次第である。

(昭. 19. 2. 1. 受付)

5) 藤本武助：“流に及す表面粗さの影響”，機械學會論文集第 6 卷第 23 號第 3 部（昭和 15 年 5 月）