

# 滲透性基礎の地下水流と揚壓力に就て

正會員 工學博士 本 間 仁\*  
濱 田 徳 一\*\*

**要 旨** 砂礫地盤上に設けられた低堰堤の下を流れる地下水流の問題の中で、未だ解かれてゐない幾つかの問題を複素ポテンシャル理論によつて解き、底面への揚壓力分布の比較、検討を試みたものである。

尙本論文は濱田徳一君が東京帝國大學第一工學部在學中に卒業論文として纏めたものの中から、筆者が要點を抜萃したものである。従つて第 2 章以下の數學的取扱ひ及び數値計算は總て濱田君によるものである。

(本間 仁記)

## 目 次

第 1 章 序 説	第 4 章 下部不滲透層の影響
第 2 章 2 列の矢板を有する場合	第 5 章 短形縦断面を持つ基礎の周りの地下水流
第 3 章 揚壓力の分布	第 6 章 雜 論

## 第 1 章 序 説

複素ポテンシャル函數の理論を應用して地下水流の問題を取扱つたものは甚だ多い。堰堤基礎の滲透流の問題に就て 2, 3 の例を擧げて見ると、圖-1 の様な場合に就ては W. Weaner の解がある<sup>1)</sup>。その方法を簡単に述べれば

圖-1 の様に堰堤の底幅を  $2c$  とし、矢板の長さを  $d$  とし、圖-1 の様に  $Z$  面の座標を取れば、Schwarz-Christoffel の定理を應用して  $Z$  面の下半分が次の寫像函數によつて  $Z_1$  面の下半分に寫像され、 $Z$  面での BCDEF は  $Z_1$  面では B'C'D'E'F' に移る。

$$z = c_1 \int \frac{z_1 dz_1}{\sqrt{z_1^2 - 1}} + c_2 = c_1 \sqrt{z_1^2 - 1} + c_2 \dots \dots \dots (1)$$

但し E' を  $z_1 = 1$  に、D' を  $z_1 = 0$  に、C' を  $z_1 = -1$  に、A' を  $z_1 = -\infty$  に擇んだ。従つて  $b = c_2$ 、 $d = -c_1$  である。B' と F' を  $m$  と  $n$  とすれば

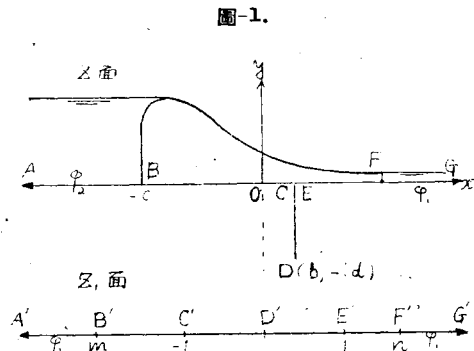
$$m = -\sqrt{1 + \frac{(c+b)^2}{d^2}}, \quad n = \sqrt{1 + \frac{(c-b)^2}{d^2}} \dots \dots \dots (2)$$

そこで原點を  $mn$  の中點に移し、 $\sqrt{mn} = 2$  となる様に長さを變へれば

$$z_1' = \frac{z_1 - \frac{(m+n)}{2}}{(m-n)/2} \dots \dots \dots (3)$$

$w = \varphi + i\psi$  の面と  $Z_1'$  面との關係は

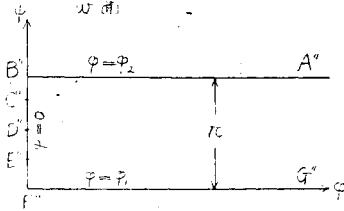
$$\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\pi} \cos^{-1} x_1' + \varphi_1 \dots \dots \dots (4)$$



\* 東京帝國大學教授  
\*\* 工學士 海軍中尉

1) Weaner: Journal of Math. and Physics, 11, 114, 1932 又は  
Muskat: The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media, (1937), p. 195.

圖-2.



但し  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$  である。更に  $\alpha = 2c/d$ ,  $\beta = \frac{b+c}{d}$ ,  $x' = x+c$  と書けば, (4) 式から底面の揚壓力分布が次の様に表はされる。

$$p = \frac{\Delta p}{\pi} \cos^{-1} \left[ \frac{2\sqrt{1 + \left(\frac{x'}{d} - \beta\right)^2} - \sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2} + \sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2} + \sqrt{1 + \beta^2}} \right] + p_1 \dots (5)$$

但し  $p_2$  及び  $p_1$  は上流側及び下流側水底面の壓力で,  $\Delta p = p_2 - p_1$  である。圖-3 は  $d=2c$  の時の矢板の位置と壓力分布との關係を示したものであつて, 矢板の位置が  $x'/2c = 0, 1, 2, \dots, 10$  の 11 種の場合を示してゐる。之から見ると揚壓力の分布は普通に行はれてゐる直線的分布の假定とはかなり違つてゐる。

圖-4 は矢板の位置と全揚壓力及び揚壓力モーメントとの關係を示したものであつて,  $d=2c$  及び  $d=c/2$  の二つの場合の曲線を與へてゐる。

含水層の厚さが  $h$  で, その下に水平の不滲透層のある場合に上と同じく一つの矢板のある問題の解は Muskat によつて求められてゐる<sup>2)</sup>。この時の  $Z$  面と  $Z_1$  面との關係は  $A'$  を  $z_1 = -1$ ,  $B'$  を  $z_1 = 0$ ,  $C'$  を  $z_1 = 1$ ,  $F'$  を  $z_1 = -a$ ,  $G'$  を  $z_1 = b$ ,  $E'$  を  $-m$ ,  $D'$  を  $m$  に移せば

$$z = c_1 \int \frac{z_1 dz_1}{(z_1^2 - m^2)\sqrt{z_1^2 - 1}} + c_2$$

$$= \frac{c_1}{2\sqrt{m^2 - 1}} \log \frac{\sqrt{m^2 - 1} - \sqrt{z_1^2 - 1}}{\sqrt{m^2 - 1} + \sqrt{z_1^2 - 1}} + c_2 \dots (6)$$

$\sqrt{z_1^2 - 1}$  の符號は  $z_1 < -1$  の時は-,  $z_1 > 1$  の時は+,  $-1 \leq z_1 \leq 1$  の時は正の虚數である。 $C'$  に於ける條件から  $c_2 = 0$  であり, 又  $B'$  に於ける條件及び  $z_1 = \pm m$  に於て  $z$  が  $z + ih$  に移る事から

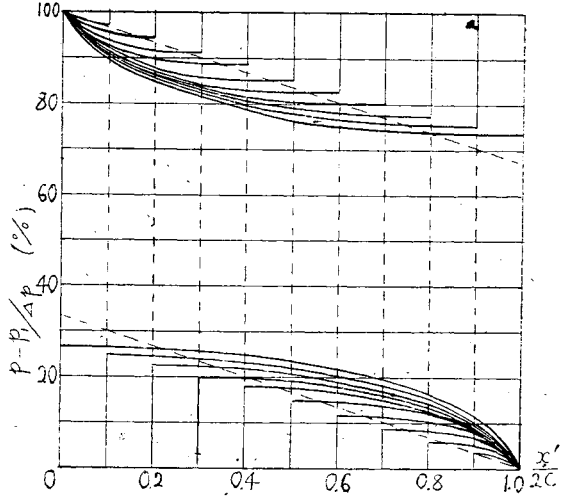
$$c_1 = -\left(\frac{2h}{\pi}\right) \cot \frac{\pi d}{2h}, \quad m = \operatorname{cosec} \frac{\pi d}{2h}$$

従つて (6) 式は次の形になる。

$$z_1^2 = 1 + \cot^2 \frac{\pi d}{2h} \tanh^2 \frac{\pi z}{2h} \dots (7)$$

$z_1$  面を  $w$  面に移すと  $E'F'$  が  $\phi = \phi_1$ ,  $F'G'$  が  $\psi = 0$ ,  $G'D'$  が  $\phi = \phi_2$ ,  $D'E'$  が  $\psi = \psi_2$  となつて,  $Z_1$  面の實軸

圖-3.



2) M. Muskat: Physics, 7, 116, 121 及び 122, 1936. 又は Muskat 前掲の本の p. 215.

圖-4.

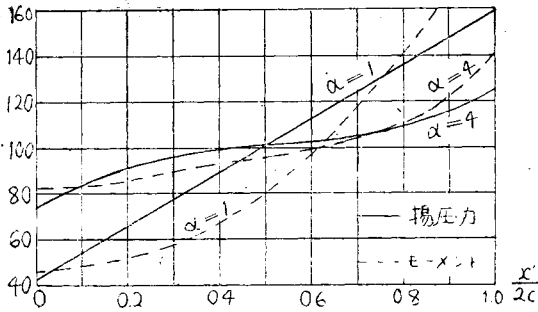
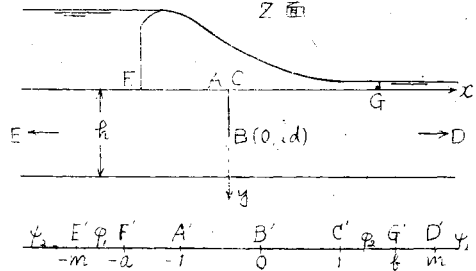


圖-5.



上部が  $w$  面では矩形の内部に寫される。寫像函数は

$$w = \varphi + i\psi = \int \frac{dz_1}{\sqrt{(z_1-r)(z_1-p)(z_1-q)(z_1-s)}}$$

の形であるが、 $\lambda = (Dz_1 - B)/(A - Cz_1)$  と置いて常数を適當に擇べば

$$w = \varphi + i\psi = G \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^*\lambda^2)}} \dots\dots\dots (8)$$

矩形の 4 隅の座標を (8) 式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + i\psi_2 &= -G(K - iK') \\ \varphi_1 &= -GK \\ \varphi_2 &= GK \\ \varphi_2 + i\psi_2 &= G(K + iK') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

但し  $K$  及び  $K'$  は  $k^*$  及び  $\sqrt{1-k^{*2}}$  を modulus とする完全楕圓積分である。之から

$$\frac{\psi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{K'}{2K} \dots\dots\dots (10)$$

$k^*$  は A, B, C, D を決める時の關係式から

$$\left. \begin{aligned} k^* &= \frac{ab + m^2 - \sqrt{(m^2 - b^2)(m^2 - a^2)}}{m(a+b)} \\ \text{但し} \\ b^2 &= 1 + \cot^2 \frac{\pi d}{2h} \tanh^2 \frac{\pi c}{h} \left(1 - \frac{b+c}{2c}\right), \\ a^2 &= 1 + \cot^2 \frac{\pi d}{2h} \tanh^2 \frac{\pi(b+c)}{2h} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

圖-6 は矢板が底邊の中央にある時の  $Q/\Delta\varphi$  と  $d/h$  の關係を示したものであつて、同時に  $2c/h$  の影響も表はしてゐる。

第 2 章 2 列の矢板を有する場合

表-7 の様な等しい長さ  $l$  の矢板のある場合を考へる。 $Z$  面は次の様な Schwarz-Christofel の變換によつて

圖-6.

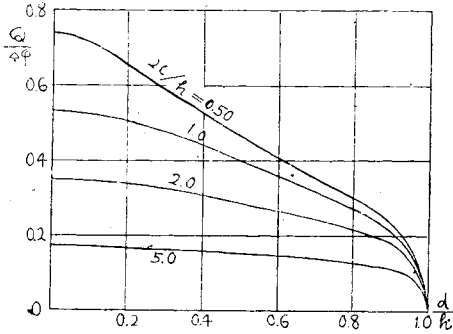
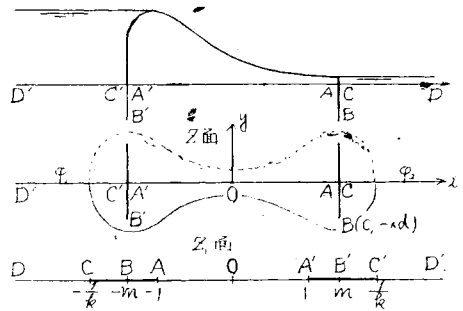


圖-7.



$Z_1$  面に對應される。

$$\frac{dz}{dz_1} = A_1 k \frac{z_1^2 - m^2}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2 z_1^2)}} \dots \dots \dots (12)$$

この場合は  $A_1$  は實數であるから、 $A_1 = 1$  と置く。従つて

$$z = k \int_0^{z_1} \frac{z_1^2 - m^2}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2 z_1^2)}} dz_1 = k \int_0^{z_1} f(z_1, m, k) dz_1 \dots \dots \dots (13)$$

$Z_1$  面は Riemann 面であるからその上葉を  $x_1$  軸の上側に沿つて迎つて見る。但し  $1$  と  $1/k$ 、 $-1$  と  $-1/k$  の間には夫々切斷がある。又  $0$  點は兩面で互に對應してゐる。

$1 > z_1 > 0$ ,  $\arg z_1 = 0$  の間は  $f(z_1, m, k)$  は分母が正、分子が負であるから  $z < 0$ 、即ち  $z_1$  が  $0$  から  $1$  まで増す間に  $z$  は  $0$  から或る値 ( $-c$  とする) まで連續的に減少して行く。 $1/k > z_1 > 1$ ,  $\arg z_1 = 0$  の間は (13) 式の被積分が實數値になる様書き直せば

$$z = ik \int_1^{z_1} \frac{(z_1^2 - m^2)}{\sqrt{(z_1^2 - 1)(1 - k^2 z_1^2)}} dz_1 + k \int_0^1 \frac{(z_1^2 - m^2)}{\sqrt{(1 - z_1^2)(1 - k^2 z_1^2)}} dz_1$$

この第二項は  $-c$  に等しい。従つて  $z_1$  が  $1$  から  $1/k$  に向つて進めば  $z$  は  $-c$  から  $-i$  の方向に進み、 $z_1 = m$  まで來れば  $z_1^2 - m^2$  が符號をかへて正になるから  $z$  は同じ徑路を  $+i$  の方向に戻る。又  $z_1 > 1/k$ ,  $\arg z_1 = 0$  の間は (13) 式の  $f(z_1, m, k)$  の分母は負で、分子は正であるから  $z$  は負で、 $x$  軸を負の方向に進む。同様にして  $z_1$  が  $x_1$  軸の上側に沿つて Riemann 面上葉を負の方向に進む時は、 $z$  は  $x$  軸に沿つて正の方向に進む。

$Z_1$  面の下半面を考へて  $z_1$  が  $x_1$  軸の下側に沿つて進む時を考へれば、切斷以外の箇所では前と同じであり、 $1 \sim 1/k$  の切斷箇所では  $z_1$  が Riemann 面の下葉の値を取り  $\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2 z_1^2)}$  の符號が上葉とは反對になるから、 $z$  は  $1 < z_1 < m$  の間は  $+i$  の方向に進み、 $m < z_1 < 1/k$  の間は  $-i$  の方向に進む。即ち  $Z$  面の上半分が  $Z_1$  面の下半分に寫像されるのである。故に圖-7 の様な  $Z$  面の循環流は  $Z_1$  面では線分  $CC'$  の周りの循環流に對應する。然るにこの循環流の複素ポテンシャルを  $w = \varphi + i\psi$  とすれば一般には次の形で書かれる。

$$z_1 = \frac{1}{k} \cos w \dots \dots \dots (14)$$

$$1/k < x_1 < \infty, \quad y_1 = 0 \quad \text{で} \quad \varphi = \varphi_1$$

$$-1/k > x_1 > -\infty, \quad y_1 = 0 \quad \text{で} \quad \varphi = \varphi_2$$

且つ  $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$  と書けば (14) 式は次の形になる。

$$z_1 = \frac{1}{k} \cos w \frac{\pi}{\Delta\varphi} \dots\dots\dots (15)$$

そこで数値計算を行ふ爲には (13) 式を既知の楕圓積分に分解せねばならない。(13) 式を變形すると

$$z = k \int_0^{z_1} \frac{z_1^2}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2z_1^2)}} dz_1 - k \int_0^{z_1} \frac{m^2}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2z_1^2)}} dz_1$$

$$\therefore z = \left(\frac{1}{k} - km^2\right) \int_0^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2z_1^2)}} - \frac{1}{k} \int_0^{z_1} \sqrt{\frac{1-k^2z_1^2}{1-z_1^2}} dz_1 \dots\dots\dots (16)$$

即ち第 1 種及び第 2 種の楕圓積分に分解された。Jacobi の楕圓函数を用ひて  $z_1 = \text{sn}(u, k)$  と置けば

$$z = \left(\frac{1}{k} - km^2\right) u - \frac{1}{k} \int_0^u \text{dn}^2 u du$$

$$\therefore z = \left(\frac{1}{k} - km^2\right) u - \frac{1}{k} E(u) \dots\dots\dots (17)$$

又 (15) 式から (第 3 章に説明する様に  $k = \rho g(\Delta\varphi/\Delta p) = \Delta\varphi/\pi$ )

$$w = \frac{\Delta\varphi}{\pi} \cos^{-1}[k \text{sn}(u, k)] \dots\dots\dots (18)$$

(17) 式と (18) 式から  $w$  と  $z$  の関係を知る事が出来るのである。然し實際には  $z_1$  を實數の場合に限るとしても (13) 式又は (17) 式の數値計算に當つて、楕圓積分の數値表は  $1 > z_1 > 0$  に對する數値に限られてゐる。従つて更に次の様な書き換へが必要である。

i)  $1 \geq z_1 \geq 0$  ( $z_1$  は實數), この時は  $z_1 = \sin \omega$  と置き

$$z = \left(\frac{1}{k} - km^2\right) \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \omega}} - \frac{1}{k} \int_0^\omega \sqrt{1-k^2 \sin^2 \omega} d\omega \dots\dots\dots (19)$$

之に楕圓積分の函数表を使用する<sup>3)</sup>。

ii)  $1/k \geq z_1 \geq 1$  ( $z_1$  は實數), この時は完全楕圓積分  $K(k), E(k)$  を用ひて (13) 式を書き直せば

$$z = \left(\frac{1}{k} - km^2\right) K(k) - \frac{1}{k} E(k) + \left(\frac{1}{k} - km^2\right) \int_1^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2z_1^2)}} - \frac{1}{k} \int_1^{z_1} \sqrt{\frac{1-k^2z_1^2}{1-z_1^2}} dz_1$$

そこで  $1-k^2z_1^2 = k'^2t^2$ ,  $1-k^2 = k'^2$  と置き,  $k'$  を modulus とする完全楕圓積分を  $K', E'$  等と書けば

$$z = \left(\frac{1}{k} - km^2\right) K - \frac{1}{k} E + i \left(\frac{1}{k} - km^2\right) \left\{ K' - \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} \right\}$$

$$- \frac{1}{k} \left\{ i \int_0^t \sqrt{\frac{1-k'^2t^2}{1-t^2}} dt - iE' + iK' - i \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{k} - km^2\right) K - \frac{1}{k} E - i \left[ km^2 K' - \frac{1}{k} E' \right] + ikm^2 \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$$

$$- \frac{i}{k} \int_0^t \sqrt{\frac{1-k'^2t^2}{1-t^2}} dt \dots\dots\dots (20)$$

$t = \sin \alpha$  と置けば

$$z = \left(\frac{1}{k} - km^2\right) K - \frac{1}{k} E - i \left[ km^2 K' - \frac{1}{k} E' \right] + ikm^2 \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \alpha}}$$

$$- \frac{i}{k} \int_0^\alpha \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$$

3) 例へば, 林 桂一: 「高等函数表」。

然るに  $m$  の値は  $km^2K' - \frac{1}{k}E' = 0$  から定められるから

$$z = \left(\frac{1}{k} - km^2\right)K - \frac{1}{k}E + ikm^2 \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \alpha}} - \frac{i}{k} \int_0^\alpha \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \quad \dots\dots\dots (21)$$

尙  $z_1 > 1/k$  の部分は今の場合あまり必要でないから暫く省略する。又上に用いた  $m$  の決定式は次の様にして導入される。 $A'$  及び  $C'$  の  $z$  の値は一致するから

$$\int_0^1 \frac{z_1^2 - m^2}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2 z_1^2)}} dz_1 = \int_0^{1/k} \frac{z_1^2 - m^2}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2 z_1^2)}} dz_1$$

$$\therefore m^2 \int_1^{1/k} \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2 z_1^2)}} = \int_1^{1/k} \frac{-z_1^2 dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2 z_1^2)}}$$

$1-k^2 z_1^2 = k'^2 t^2$  と置いて計算すれば左邊は  $im^2K$ 、右邊は  $\frac{i}{k^2}E'$  になる。従つて

$$m^2 K' - \frac{1}{k^2} E' = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

故に  $k$  の値を適當に擇べば、それに對する  $Z$  面の流線圖を畫き得る筈であるが、一般に  $z$  及び  $z_1$  が複素變數である爲にその數値計算は甚だ困難である。よつて今の場合  $1/k > z_1 > 0$  の間の  $z$  と  $w$  の關係を求める事に止める。然し堤體への揚壓力の計算には之だけの數値計算で充分である。

先づ  $OA/AB (= c/l)$  と  $k$  との關係を求める。(19) 式に於て  $z_1 = \sin \varphi$  であるから、 $z_1 = 1$  に於て  $\varphi = \pi/2$  である。

$$c = (z)_0 - (z)_1 = \frac{1}{k} E(k) - \left(\frac{1}{k} - km^2\right) K(k) \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$l = \left(\frac{1}{k} - km^2\right) \int_1^m \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2 z_1^2)}} - \frac{1}{k} \int_1^m \sqrt{\frac{1-k^2 z_1^2}{1-z_1^2}} dz_1 \quad \dots\dots\dots (24)$$

従つて  $k$  を與へれば (22), (23), (24) 式から  $m, c, l$  が定まる。然し  $l$  は次の式から定めた方が簡單である。即ち (21) 式から  $z_1$  が實數で  $1/k \geq z_1 \geq 1$  の時に  $z$  の虚數部は  $\alpha$  の函數であつて、その極小値が  $B'$  の  $z$  の値になつてゐる。従つて

$$I(z) = km^2 \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{k} \int_0^\alpha \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \alpha} d\alpha = f(\alpha)$$

と書けば、 $\alpha$  は次の式から定まる。

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \frac{km^2}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{k} \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \alpha} = 0$$

$$\therefore k^2 m^2 - (1-k'^2 \sin^2 \alpha) = 0 \quad (1 > k'^2 \sin^2 \alpha)$$

之から定まる  $\alpha$  を  $\alpha_1$  で表はせば、 $\alpha_1 = \sin^{-1}(\sqrt{1-k^2 m^2}/k')$  であつて、 $l$  は

$$l = \frac{1}{k} \int_0^{\alpha_1} \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \alpha} d\alpha - km^2 \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \alpha}} \quad \dots\dots\dots (25)$$

この様に  $k$  を與へれば  $c, l, m$  が定まるのであるが、初めに (12) 式の  $A$  を 1 と置いてゐるから、一般的に  $A$  を未知實數とすれば  $l/c$  が定まる事になる。表-1 に  $A=1$  の場合の  $c, l$  及び一般に適用出来る  $l/c$  の値を與へた。

次に圖-7 の場合の矢板の位置が對稱に少し動かされて圖-8 の様になつた場合を考へる。この時  $Z$  面では圖の様な循環流と考へると  $E, E'$  附近で速度が甚だ大きい事になつて實際とやゝ違つたものになるが、近似的には充分である。 $Z_1$  面は前と同じであるから (13) 式が用ひられ、只  $Z_1$  面での循環流が  $EE'$  (長さ  $2n$ ) の線分の周り

$k$ ( $=\sin \theta$ )	$\theta$	$m^2$	$K(h)$	$M(h)$	$c$	$k'$	$\alpha_1$	$\frac{1}{k} \int_0^{\alpha_1} \sqrt{-t/c}$	$-km^2 \int_0^{\alpha_1} \frac{dt}{\sqrt{-t/c}}$	$l$	$l/c$
0.0000	0°		1.5708 0	1.5708 0		1.0000	90°00'				$\infty$
0.1736	10°	10.943	1.5828 4	1.5388 9	2.8689	0.9848	56°14'	4.8202 7	-2.2452 5	2.5750 2	0.8975 6
0.3420	20°	3.8163	1.6200 3	1.5238 0	1.8331	0.9397	52°21'	2.8618 9	-1.3671 0	0.9947 9	0.5426 8
0.5000	30°	2.2467	1.6857 5	1.4674 6	1.4570	0.8660	49°52'	1.5872 6	-1.0800 5	0.5072 1	0.3481 1
0.6428	40°	1.6328	1.7867 7	1.3931 4	1.2628	0.7660	48°07'	1.2236 3	-0.9442 8	0.2733 5	0.2212 1
0.7660	50°	1.3287	1.9355 8	1.3455 4	1.1475	0.6428	46°55'	1.0238 7	-0.8707 6	0.1531 1	0.1334 2
0.8660	60°	1.1607	2.1565 2	1.2110 6	1.0758	0.5000	46°02'	0.9052 8	-0.8273 4	0.0779 4	0.0724 4
0.9397	70°	1.0651	2.5045 5	1.1183 8	1.03178	0.3420	45°29'	0.8357 1	-0.8036 7	0.0320 4	0.0310 5
0.9848	80°	1.0154	3.1533 9	1.0401 1	1.00757	0.1736	45°10'	0.7982 4	-0.7908 0	0.0074 4	0.0073 8
1.0000	90°	1.0000	$\infty$	1.0000 0	1.00000	0.0000	45°00'	0.7854 0	-0.7854 0	0.0000 0	0.0000 0

表-1.

の流れになる。 $OA=c_1$  と書けば  $c_1/l$  と  $k$  の関係は (23) 式から與へられる。 $z_1$  と  $w$  の関係は

$$z_1 = n \cos w \frac{\pi}{\Delta\varphi}, \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \dots\dots\dots(26)$$

そこで  $z_1 = \text{sn}(u, k)$  なる  $u$  を媒介複素變數として

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\Delta\varphi}{\pi} \cos^{-1} \left[ \frac{1}{n} \text{sn}(u, k) \right] \\ z &= \left( \frac{1}{k} - km^2 \right) u - \frac{1}{k} E(u) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

$n$  は  $AE/OA$  から定められるのであるが、その爲には  $z_1$  が實數で  $z_1 \geq 1/k$  の時に (13) 式を計算せねばならない。この計算には次の様な變形が必要である。(16) 式から

$$z = \left( \frac{1}{k} - km^2 \right) K(k) - \frac{1}{k} E(k) + \left( \frac{1}{k} - km^2 \right) \int_{1/k}^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2z_1^2)}} - \frac{1}{k} \int_{1/k}^{z_1} \sqrt{\frac{1-k^2z_1^2}{1-z_1^2}} dz_1$$

そこで  $z_1 = 1/kv$  と置けば

$$\begin{aligned} \int_{1/k}^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2z_1^2)}} &= - \left[ K(k) - \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \right] \\ \int_{1/k}^{z_1} \sqrt{\frac{1-k^2z_1^2}{1-z_1^2}} dz_1 &= \int_0^1 \frac{dv}{v^2 \sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} - \int_v^1 \frac{dv}{v \sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \\ &= \int_0^1 \frac{dv}{v^2 \sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} - \int_0^v \frac{dv}{v^2 \sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} - K(k) + \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \\ \therefore z &= \frac{1}{k} \int_0^v \frac{dv}{v^2 \sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} + \frac{1}{k} K(k) - km^2 \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \\ &\quad - \frac{1}{k} E(k) - \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{dv}{v^2 \sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

従つて  $0 \leq v \leq 1$  の間の積分に變換されたが、數値表のない第三種楕圓積分が入つて來たので實際の計算はやはり困難である。そこで (28) 式の代りに

$$z = \left( \frac{1}{k} - km^2 \right) \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} - \frac{1}{k} E(k) - \frac{1}{k} \int_{1/k}^{z_1} \sqrt{\frac{1-k^2z_1^2}{1-z_1^2}} dz_1 \dots\dots\dots(29)$$

を用ひる事とし、之から  $z$  と  $z_1$  の關係を實軸上で數值的に求めて、 $Z$  面の  $E'$  に對應する  $z_1$  の値から  $n$  を定めねばならない。

### 第 3 章 揚壓力の分布

地下水の流れでは速度が小さいから慣性項が省略されて、定常運動では次の様に書かれる<sup>4)</sup>。

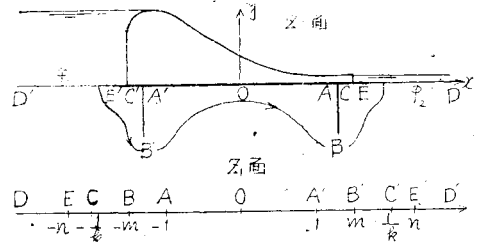
$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{g}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial s} - g \frac{\partial y}{\partial s} = 0 \dots\dots\dots(30)$$

但し  $\varphi$  は速度ポテンシャルで、 $s$  は流れの方向に、 $y$  は鉛直上向きに測る。(30) 式を積分すれば次の様な  $p$  を與へる式が得られる。

$$\left( \frac{p}{\rho g} + y \right) - \left( \frac{p_1}{\rho g} + y_1 \right) = \frac{1}{k} (\varphi - \varphi_1) \dots\dots\dots(31)$$

4) 本間 仁：「高等水理學」168 頁

圖-8.





$p_1, y_1, \varphi_1$  は與へられた點に於ける値である。この式から等ポテンシャル面上では  $p/\rho g + y$  が等しい値を持つ事がわかる。尚  $k = \rho g(\varphi_2 - \varphi_1)/(p_2 - p_1) = \rho g(\Delta\varphi/\Delta p)$  である。

先づ圖-7 の場合の底面に沿ふ揚壓力を計算する。この時は  $z_1$  が實數で、 $1 \geq |z_1| \geq 0$  であり、 $y=0$  である。

$$z = \left(\frac{1}{k} - km^2\right) \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \omega}} - \frac{1}{k} \int_0^\omega \sqrt{1-k^2 \sin^2 \omega} d\omega$$

$$z_1 = \frac{1}{k} \cos \omega, \quad z_1 = \sin \omega$$

底面に沿つて  $\psi=0$  とすれば  $w=\varphi$  であるから  $z_1 = \frac{1}{k} \cos \varphi$  である。又矢板面に沿つては  $1/k \geq |z_1| \geq 1$  であるから

$$z = \left(\frac{1}{k} - km^2\right) K - \frac{1}{k} E + ikm^2 \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \alpha}} - \frac{i}{k} \int_0^\alpha \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$$

$$z_1 = \frac{1}{k} \cos u, \quad 1 - k^2 z_1^2 = k'^2 \sin^2 \alpha$$

矢板面上でも  $\varphi=0$  であるから  $z_1 = \frac{1}{k} \cos \varphi$  になる。

例 1,  $p_1=1, p_2=0$  とすれば  $\Delta\varphi$  は必ず  $\pi$  であるから、滲透係数は  $\rho g\pi$  で與へられる。modulus  $k$  を  $1/2$  とすれば  $\theta = \sin^{-1} k = 10^\circ$ , 従つて表-1 により  $1/c = 0.34811$  である。計算の結果は表-2 a, b の様になる。

表-2 a.

$z_1$ ( $= \sin \omega$ )	$\omega$	$\sin \alpha$	$\alpha$	$\left(\frac{1}{k} - km^2\right) \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{\quad}}$	$-\frac{1}{k} \int_0^\omega \sqrt{\quad} d\omega$	$ikm^2 \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\quad}}$	$-\frac{i}{k} \int_0^\alpha \sqrt{\quad} d\alpha$
0.0000	0°			0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000
0.1736	10°			0.1531	-0.3486	"	
0.3420	20°			0.3075	-0.6946	"	
0.5000	30°			0.4640	-1.0356	"	
0.6428	40°			0.6237	-1.3700	"	
0.7660	50°			0.7873	-1.6966	"	
0.8660	60°			0.9550	-2.0150	"	
0.9397	70°			1.1266	-2.3262	"	
0.9848	80°			1.3013	-2.6320	"	
1.0000	90°	1.0000	90°	1.4776	-2.9348	2.4221 <i>i</i>	-2.4221 <i>i</i>
1.0442		0.9848	80°	1.4776	-2.9348	2.0358 <i>i</i>	-2.2449 <i>i</i>
1.1622		0.9397	70°	"	"	1.6785 <i>i</i>	-2.0532 <i>i</i>
1.3239		0.8660	60°	"	"	1.3619 <i>i</i>	-1.8367 <i>i</i>
1.4965		0.7660	50°	"	"	1.0834 <i>i</i>	-1.5907 <i>i</i>
1.6614		0.6428	40°	"	"	0.8351 <i>i</i>	-1.3149 <i>i</i>
1.8027		0.5000	30°	"	"	0.6090 <i>i</i>	-1.0121 <i>i</i>
1.9102		0.3420	20°	"	"	0.3981 <i>i</i>	-0.6876 <i>i</i>
1.9772		0.1736	10°	"	"	0.1967 <i>i</i>	-0.3477 <i>i</i>
2.0000		0.0000	0°	"	"	0.0000	-0.0000

表-2 b.

$z_1$	$z$	$\varphi$	$p/\rho g$	$z_1$	$z$	$\varphi$	$p/\rho g$
2.0000	-1.4571-0.0000 i	-0.0000	1.0000	-0.1736	0.1955	-1.6577	0.4723
1.9772	" -0.1509 i	-0.1511	1.1027	-0.3420	0.3871	-1.7427	0.4452
1.9102	" -0.2894 i	-0.3008	1.1936	-0.5000	0.5715	-1.8235	0.4195
1.8027	" -0.4031 i	-0.4478	1.2605	-0.6428	0.7462	-1.8980	0.3958
1.6614	" -0.4797 i	-0.5904	1.2917	-0.7660	0.9092	-1.9639	0.3748
1.4965	" -0.5072 i	-0.7254	1.2762	-0.8660	1.0600	-2.0187	0.3574
1.3239	" -0.4748 i	-0.8473	1.2050	-0.9397	1.1995	-2.0600	0.3442
1.1622	" -0.3747 i	-0.9507	1.0720	-0.9848	1.3307	-2.0857	0.3360
1.0442	" -0.2091 i	-1.0215	0.8839	-1.0000	1.4571-0.0000 i	-2.0944	0.3333
1.0000	" -0.0000 i	-1.0472	0.6666	-1.0442	" -0.2091 i	-2.1201	0.5342
0.9848	-1.3307	-1.0559	0.6638	-1.1622	" -0.3747 i	-2.1909	0.6773
0.9397	-1.1995	-1.0816	0.6556	-1.3239	" -0.4748 i	-2.2943	0.7444
0.8660	-1.0600	-1.1229	0.6425	-1.4965	" -0.5072 i	-2.4162	0.7880
0.7660	-0.9092	-1.1777	0.6251	-1.6614	" -0.4797 i	-2.5512	0.6676
0.6428	-0.7462	-1.2436	0.6041	-1.8027	" -0.4031 i	-2.6938	0.5456
0.5000	-0.5715	-1.3181	0.5804	-1.9102	" -0.2894 i	-2.8408	0.3851
0.3420	-0.3871	-1.3989	0.5547	-1.9772	" -0.1509 i	-2.9905	0.1989
0.1736	-0.1955	-1.4839	0.5276	-2.0000	" -0.0000 i	-3.1416	0.0000
0.0000	-0.0000	-1.5708	0.4999				

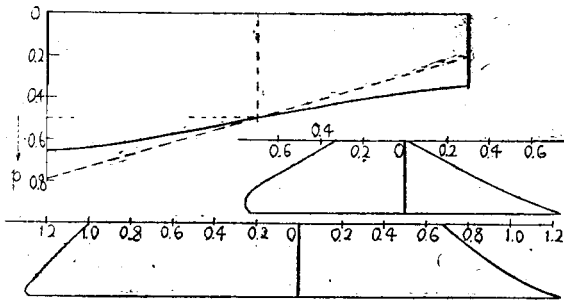
この結果から揚壓力の分布を圖-9 に實線を以て示した。點線は一般に行はれる様に速度を一定と考へて求めた直線的の揚壓力分布である。

例 2.  $k=0.3420$ ,  $\theta = \sin^{-1}k = 20^\circ$ ,  $l/c=0.54268$ ,  $p_1=1, p_2=0$ ,  $\Delta\varphi=\pi$  として底面揚壓力のみを求める。

表-3.

$z_1$ (= $\sin \omega$ )	$\left(\frac{1}{k} - km^2\right) \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{\quad}}$	$-\frac{1}{k} \int_0^\omega \sqrt{\quad} d\omega$	$z$	$p_z/\rho g$	$p_{-z}/\rho g$
0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.5000	0.5000
0.1736	0.2826	-0.5100	-0.2274	0.5189	0.4810
0.3420	0.5662	-1.0182	-0.4520	0.5373	0.4626
0.5000	0.8516	-1.5231	-0.6715	0.5546	0.4453
0.6428	1.1397	-2.0235	-0.8837	0.5705	0.4294
0.7660	1.4308	-2.5187	-1.0878	0.5843	0.4156
0.8660	1.7250	-3.0086	-1.2835	0.5967	0.4042
0.9397	2.0221	-3.4938	-1.4717	0.6041	0.3958
0.9848	2.3213	-3.9755	-1.6542	0.6093	0.3906
1.0000	2.6216	-4.4554	-1.8337	0.6111	0.3888
2.9239			-1.8337	1.0000	0.0000

圖-9.



例 3.  $k=0.1736$ ,  $\theta = \sin^{-1} k = 10^\circ$ ,  $l/c = 0.89756$ ,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 0$ ,  $\Delta\varphi = \pi$  として底面壓力の計算値のみを示す。  
 例 2 及び例 3 の揚壓力分布は圖-10 及び圖-11 に示してある。全揚壓力は一般に行はれる近似計算と等しくな

圖-10.

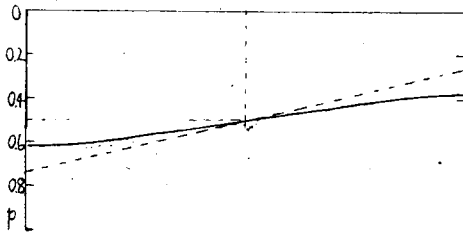
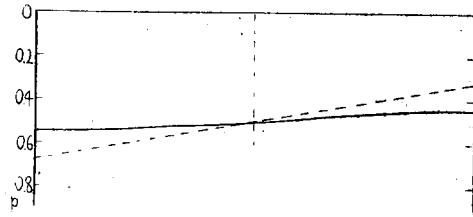


圖-11.



るが、その作用点は常に堤體の中央に近く、特に  $l/c$  が大きくなる程その傾向は著しい。

表-4.

$z_1$ ( $= \sin \omega$ )	$\left(\frac{1}{k} - km^2\right) \int_0^\omega \frac{d\omega}{V}$	$-\frac{1}{k} \int_0^\omega V^- d\omega$	$z$	$p_z/\rho g$	$p - z/\rho g$
0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.5000	0.5000
0.1736	0.6738	-1.0052	-0.3313	0.5097	0.4903
0.3420	1.3483	-2.0095	-0.6611	0.5190	0.4810
0.5000	2.0239	-3.0121	-0.9881	0.5277	0.4723
0.6428	2.7011	-4.0125	-1.3113	0.5357	0.4643
0.7660	3.3800	-5.0103	-1.6301	0.5425	0.4575
0.8660	4.0607	-6.0054	-1.9446	0.5481	0.4519
0.9397	4.7430	-6.9982	-2.2552	0.5522	0.4478
0.9848	5.4265	-7.9894	-2.5629	0.5548	0.4452
1.0000	6.1105	-8.9796	-2.8691	0.5556	0.4444
5.7603			-2.8691	1.0000	0.0000

次に圖-8 の場合の揚壓力分布を計算する。 $z_1$  が實數で  $n > 1/k$  の時に (19), (21) 及び (29) 式から

i)  $1 \geq |z_1| \geq 0$

$$z = \left(\frac{1}{k} - km^2\right) F(\omega, k) - \frac{1}{k} E(\omega, k)$$

$$z_1 = n \cos \omega, \quad z_1 = \sin \omega$$

ii)  $1/k \geq |z_1| \geq 1$

$$z = \left(\frac{1}{k} - km^2\right)K - \frac{1}{k}E + ikm^2F(\alpha, k') - \frac{i}{k}E(\alpha, k')$$

$$z_1 = n \cos \omega, \quad 1 - k^2 z_1^2 = k'^2 \sin^2 \alpha$$

iii)  $|z_1| \geq 1/k$

$$z = \left(\frac{1}{k} - km^2\right) \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} - \frac{1}{k}E(k) - \frac{1}{k} \int_{1/k}^{z_1} \sqrt{\frac{1-k^2z_1^2}{1-z_1^2}} dz_1$$

$$z_1 = n \cos \omega, \quad v = 1/kz_1$$

但し iii) の最後の積分は数値積分によつて計算する。

例 4.  $k=0.1736$ ,  $\theta = \sin^{-1}k = 10^\circ$ ,  $l/c=0.89756$ ,  $p_1=1$ ,  $p_2=0$ ,  $\Delta\varphi=\pi$ ,  $n=6.0000$  とする。

$z$  面と  $z_1$  面の関係は例 3 と同じである。然し  $z_1 \geq 1/k$  の計算を行はねばならない。 $\int_{1/k}^{z_1} \sqrt{\frac{1-k^2z_1^2}{1-z_1^2}} dz_1$  の数値積分には simpson 則即ち  $\int_{z_1}^{z_2} y dx = (y_1 + 4y_2 + y_3) h/3$  を用ひて  $x_n$  から  $x_{n+2}$  までの積分を求めて、順次之を加へたのである。表-5 には  $z$  の實数値に對する計算値のみを示した。

表-5 a.

$z_1$	$\int_{1/k}^{z_1} \sqrt{\quad} dz_1$	$v \left( = \frac{1}{kz_1} \right)$	$\omega \left( = \sin^{-1}v \right)$	$\left( \frac{1}{k} - km^2 \right) \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\quad}}$	$-\frac{1}{k} E(k)$	$-\frac{1}{k} \int_{1/k}^{z_1} \sqrt{\quad} dz_1$	$z$
5.7603	0.0000 00	1.0000	90°	6.1105	-8.9797	-0.0000	-2.8691
5.8000	0.0005 20	0.9931	83°18'	5.6517	"	-0.0030	-3.3309
5.9000	0.0035 45	0.9731	77°30'	5.2555	"	-0.0204	-3.7445
6.0000	0.0079 41	0.9600	73°45'	4.9992	"	-0.0457	-4.0261

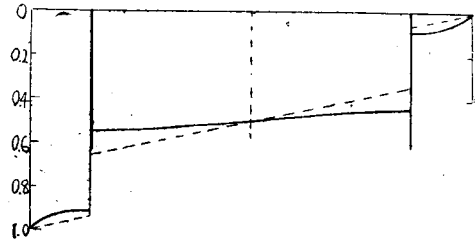
表-5 b.

$z_1$	$z$	$\varphi \left( = \cos^{-1} \frac{z_1}{6} \right)$	$p/\rho g$	$z_1$	$z$	$\varphi \left( = \cos^{-1} \frac{z_1}{6} \right)$	$p/\rho g$
6.0000	-4.0261	-0.0000	1.0000	-0.1736	0.3313	-1.5997	0.4908
5.9000	-3.7445	-0.1828	0.9418	-0.3420	0.6611	-1.6278	0.4818
5.8000	-3.3309	-0.2589	0.9176	-0.5000	0.9881	-1.6542	0.4734
5.7603	-2.8691	-0.2836	0.9097	-0.6428	1.3113	-1.6781	0.4658
0.9848	-2.5629	-1.4059	0.5525	-0.7660	1.6301	-1.6988	0.4592
0.9397	-2.2552	-1.4135	0.5500	-0.8660	1.9446	-1.7157	0.4538
0.8660	-1.9446	-1.4259	0.5461	-0.9397	2.2552	-1.7281	0.4499
0.7660	-1.6301	-1.4428	0.5407	-0.9848	2.5629	-1.7357	0.4474
0.6428	-1.3113	-1.4635	0.5341	-1.0000	2.8691	-1.7383	0.4466
0.5000	-0.9881	-1.4874	0.5265	-5.7603	2.8691	-2.8580	0.0902
0.3420	-0.6611	-1.5138	0.5181	-5.8000	3.3309	-2.8827	0.0824
0.1736	-0.3313	-1.5419	0.5092	-5.9000	3.7445	-2.9588	0.0581
0.0000	-0.0000	-1.5708	0.5000	-6.0000	4.0261	-3.1416	0.0000

この結果を圖-12 に示した (圖には矢板上の値も示す)。この場合は堤底中央から 前後の端までの距離を夫々  $c'$  とすれば、 $l/c' = 0.6395$  になつてゐる。

矢板が不對稱に置かれてゐる場合に就ても一つの例を計算してゐるが之は省略する。只この場合でも例 5 の場合でも全揚壓力が普通の近似計算法によるものよりも小さくなつてゐる。矢板の長さが等しくない場合に就ても  $z$  面と  $w$  面の關係を表示する事は出来る<sup>5)</sup>。然しこの場合は  $z_1$  を實數に限つても表示式を簡單な楕圓積分に分解する事は不可能であり、従つてこの制限内でも數値積分のみに依らねばならない。

圖-12.



第 4 章 下部不滲透層の影響

圖-13 の様に深さ  $h$  の處に不滲透層のある場合を考へる。圖の様な  $z$  面と  $t$  面との間の寫像函數は Schwarz-Christoffel の定理により

$$z = Ak \int_0^t \frac{t^2 - m^2}{(t^2 - n^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} dt + B \dots\dots\dots (32)$$

$z=0$  に對して  $t=0$  であるから  $B=0$  である。切斷は  $t=1-1/k$  及び  $-1-1/k$  の間にある。そこで  $\xi=kt$  なる  $\xi$  面を考へて、 $\xi$  面と  $w$  面との關係を調べる。兩者の對應は CD 上で  $\varphi=\varphi_1$ 、 $\eta$  軸上で  $\varphi=0$ 、 $C'D'$  上で

圖-13.

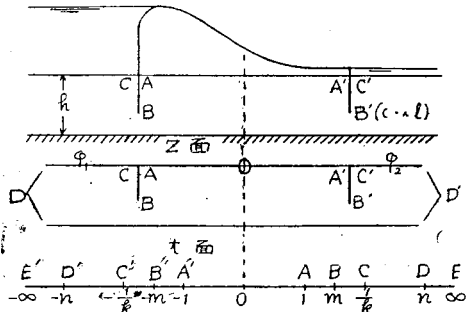
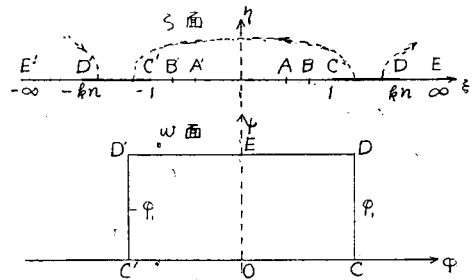


圖-14.



$\varphi=-\varphi_1$ 、流線  $COC'$  で  $\varphi=0$ 、流線  $DEB'$  で  $\varphi=\varphi_1$  である。そこで  $w$  面の矩形  $CC'D'D$  の内部を  $z$  面の上半面に寫像して圖-14 の様に關係をつければ

$$w = A' \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{但し} \\ h = 1/kn \end{array} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

$\xi=1$  に於て  $w=\varphi_1$  であるから  $\varphi_1 = A'K(h)$  になる。更に  $\varphi_c - \varphi_{c'} = 2\varphi_1 = \Delta\varphi$  と書けば  $A' = \Delta\varphi/(2K(h))$  になつて

5) 佐々木達次郎：「等角寫像の應用」, p. 227~230 に類似の問題がある。

$$w = \frac{\Delta\varphi}{2K(h)} \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} \dots\dots\dots(34)$$

$$\therefore kt = \operatorname{sn}\left(w \cdot \frac{2K(h)}{\Delta\varphi}, \frac{1}{k_n}\right), t = \operatorname{sn}(u, k) \dots\dots\dots(35)$$

(32), (35) 式から  $z$  と  $w$  の関係を求めるのであるが, (32) 式は更に数値計算をなし得る様に變形せねばならない。即ち  $t = \operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{sn} u$  と置けば (32) 式は

$$\begin{aligned} z &= Ak \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u - m^2}{(\operatorname{sn}^2 u - n^2) \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} \frac{d \operatorname{sn} u}{du} du = Ak \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u - m^2}{\operatorname{sn}^2 u - n^2} du \\ &= Ak \int_0^u du + (m^2 - n^2) Ak \int_0^u \frac{du}{n^2 - \operatorname{sn}^2 u} \end{aligned}$$

$1/n^2 = k^2 \operatorname{sn}^2 a$  と置いて第二項を變形すれば

$$\begin{aligned} &(m^2 - n^2) Ak \cdot k^2 \operatorname{sn}^2 a \int_0^u \frac{du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} \\ &= (m^2 - n^2) Ak^3 \operatorname{sn}^2 a \int_0^u \left( \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} + 1 \right) du \\ &= (m^2 - n^2) Ak^3 \frac{\operatorname{sn}^3 a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \Pi(u, a) + Ak(m^2 k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1)u \\ \therefore z &= Ak \left( m^2 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a} \right) \frac{k^2 \operatorname{sn}^3 a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \Pi(u, a) + Am^2 k^3 \operatorname{sn}^2 a \cdot u \dots\dots\dots(36) \end{aligned}$$

$$k \operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{sn}\left(w \frac{2K(\operatorname{sn} a)}{\Delta\varphi}, \operatorname{sn} a\right) \dots\dots\dots(37)$$

$k$  と  $a$  は  $d$  面の形から定まり,  $m$  は後に述べる様に  $k, a$  から定められる。 $A$  は兩圖形の間の倍率を定める常数であるから 1 と置いてもよい。

i)  $A$  では  $t=1, u=K(k), z=-c$ , 之を (36) 式に代入すれば

$$-c = A \left( m^2 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a} \right) \frac{k^3 \operatorname{sn}^3 a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \Pi(K, a) + Am^2 k^3 \operatorname{sn}^2 a K \dots\dots\dots(38)$$

ii)  $C$  では  $t=1/k, u=K+iK', z=-c$

$$\therefore -c = A \left( m^2 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a} \right) \frac{k^3 \operatorname{sn}^3 a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \Pi(K+iK', a) + Am^2 k^3 \operatorname{sn}^2 a (K+iK') \dots\dots\dots(39)$$

iii)  $E$  では  $t=\infty, u=iK', z=-ih$ ,

$$-ih = A \left( m^2 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a} \right) \frac{k^3 \operatorname{sn}^3 a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \Pi(iK', a) + Am^2 k^3 \operatorname{sn}^2 a \cdot iK' \dots\dots\dots(40)$$

iv)  $B$  では  $t=m, u=u_m, z=-c-il$

$$-c-il = A \left( m^2 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a} \right) \frac{k^3 \operatorname{sn}^3 a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \Pi(u_m, a) + Am^2 k^3 \operatorname{sn}^2 a \cdot u_m \dots\dots\dots(41)$$

今楕圓積分  $E(u)$  を Theta 函数  $\theta(u) = \vartheta_4\left(\frac{u}{2K} \middle| \tau\right)$  を用ひて

$$E(u) = \frac{\theta'(u)}{\theta(u)} + \frac{E}{K} u = Z(u) + \frac{E}{K} u$$

と書けば  $Z(u)$  は  $2K$  を週期とする單週期函数で  $\vartheta_4$  の三角級數展開を利用して計算が出来る。而も  $\Pi(u, a)$  と  $Z(u)$  の間の關係式から次の式が得られる。

$$H(K, a) = KZ(a), \quad H(K + iK', a) = \frac{a}{2K} \pi i + KZ(a) + iK'Z(a)$$

(38), (39) 式から  $c$  を消去して更に  $Z(a)$  を導入すれば

$$m^2 = \frac{\frac{a}{2K} \pi + K'Z(a)}{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \left\{ \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \left( \frac{a}{2K} \pi + K'Z(a) \right) + K' \right\}} \dots \dots \dots (42)$$

又 (38), (41) 式から

$$il = A \left( m^2 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a} \right) \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \{ H(K, a) - H(u_m, a) \} + Am^2 k^2 \operatorname{sn}^2 a (K - um) \dots \dots \dots (43)$$

従つてあらゆる  $A$  に対して  $m, h/l, l/c$  等が定められる。

更に流速分布を計算するには

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= Ak \frac{t^2 - m^2}{(t^2 - n^2) \sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\Delta \varphi}{2K(\operatorname{sn} a)} \cdot \frac{k}{\sqrt{(1 - k^2 t^2) \left( 1 - \frac{t^2}{n^2} \right)}} \\ \therefore \frac{dw}{dz} &= \frac{-\Delta \varphi}{2K(\operatorname{sn} a)A} \cdot n \cdot \frac{\sqrt{(n^2 - t^2)(1 - t^2)}}{t^2 - m^2} = -u + iv \dots \dots \dots (44) \end{aligned}$$

例 5.  $A = -1$  とし,  $a = 1.3, 2.0$ ;  $k^2 = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  に対する  $m^2, l, c, h$ , を夫々に計算する。但し

$$q = e^{-(K'/K)\pi} \quad \text{と書いて}$$

$$\begin{aligned} Z(a) &= \frac{2\pi q}{K} \frac{\sin \frac{\pi a}{K} - 2q^2 \sin \frac{2\pi a}{K} + \dots}{1 - 2q \cos \frac{\pi a}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi a}{K} - \dots} \\ H(u, a) &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 - 2q \cos \frac{\pi}{K}(u-a) + 2q^4 \cos \frac{2\pi}{K}(u-a) - \dots}{1 - 2q \cos \frac{\pi}{K}(u+a) + 2q^4 \cos \frac{2\pi}{K}(u+a) - \dots} \right) + uZ(a) \end{aligned}$$

又  $l$  の計算には  $um = K + iy$  と書いて

$$\begin{aligned} l = i \left( m^2 - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a} \right) \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \left\{ -\frac{1}{2} \log \left( \frac{1 - 2q \cos \frac{\pi}{K}(um-a) + 2q^4 \cos \frac{2\pi}{K}(um-a) - \dots}{1 - 2q \cos \frac{\pi}{K}(um+a) + 2q^4 \cos \frac{2\pi}{K}(um+a) - \dots} \right) \right. \\ \left. - iyZ(a) \right\} + m^2 k^2 \operatorname{sn}^2 a \cdot y \dots \dots \dots (45) \end{aligned}$$

を用ひ,  $y$  は  $\operatorname{sn}(K + iy, k) = \frac{\operatorname{cn}(iy, k)}{\operatorname{dn}(iy, k)} = \frac{1}{\operatorname{dn}(y, k')}$  から

$$\operatorname{sn}(y, k') = \sqrt{\frac{1}{k'^2} \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right)} \dots \dots \dots (46)$$

として求められる。又  $\cos \frac{\pi}{K}(um \pm a)$  は

$$\cos \frac{\pi}{K}(u_m \mp a) = \cos \frac{\pi}{K}(K \mp a) \cosh \frac{\pi}{K} y - i \sin \frac{\pi}{K}(K \mp a) \sinh \frac{\pi}{K} y$$

から計算される。  $a=1.3, 2.0$  の場合を次の表-6, 7 に示す。

表-6 a.

 $a=1.3$ 

$k^2$	$\operatorname{sn} a$	$\operatorname{cn} a$	$\operatorname{dn} a$	$K$	$K'$	$q$	$Z(a)$
0.1	0.9562 5	0.2925 4	0.9531 3	1.6124 4	2.5780 9	0.0065 8	0.0145 2
0.2	0.9482 8	0.3174 3	0.9056 2	1.6596 2	2.2572 0	0.0139 4	0.0325 4
0.3	0.9396 5	0.3421 3	0.8573 9	1.7138 8	2.0753 6	0.0222 8	0.0544 8
0.4	0.9303 7	0.3666 2	0.8085 6	1.7775 1	1.9495 6	0.0318 8	0.0797 8
0.5	0.9204 5	0.3908 7	0.7592 0	1.8540 7	1.8540 7	0.0432 1	0.1124 8
0.6	0.9099 0	0.4148 4	0.7094 0	1.9495 6	1.7775 1	0.0570 2	0.1505 9
0.7	0.8987 3	0.4385 0	0.6592 4	2.0753 6	1.7138 8	0.0746 9	0.1973 2
0.8	0.8869 7	0.4618 3	0.6087 9	2.2572 0	1.6596 2	0.0992 7	0.2566 1
0.9	0.8746 3	0.4848 0	0.5581 5	2.5780 9	1.6124 4	0.1401 7	0.3402 9

表-6 b.

$k^2$	$\Pi(K, a)$	$\Pi(iK', a)$	$m^2$	$u_m = K + iy$	$2q \cos \frac{\pi}{K}(K - a + iy)$
0.1	0.0234 1	-0.2669 4 $i$	6.9365 6	1.6124 4 + 1.917 $i$	0.2260 6 - 0.1574 1 $i$
0.2	0.0540 0	-0.2669 3 $i$	3.6465 7	1.6596 2 + 1.602 $i$	0.2253 2 - 0.1821 2 $i$
0.3	0.0933 7	-0.2662 7 $i$	2.5225 6	1.7138 8 + 1.415 $i$	0.2173 9 - 0.2047 4 $i$
0.4	0.1418 0	-0.2654 5 $i$	1.9564 8	1.7775 5 + 1.276 $i$	0.2042 5 - 0.2247 0 $i$
0.5	0.2085 4	-0.2608 8 $i$	1.6210 3	1.8540 7 + 1.167 $i$	0.1879 1 - 0.2469 7 $i$
0.6	0.2935 8	-0.2556 9 $i$	1.4007 4	1.9495 6 + 1.073 $i$	0.1658 2 - 0.2693 1 $i$
0.7	0.4095 1	-0.2486 7 $i$	1.2481 5	2.0753 6 + 0.990 $i$	0.1356 9 - 0.2927 9 $i$
0.8	0.5792 2	-0.2402 5 $i$	1.1386 7	2.2572 0 + 0.947 $i$	0.0906 0 - 0.3187 0 $i$
0.9	0.8772 9	-0.2300 4 $i$	1.0585 9	2.5780 9 + 0.848 $i$	0.0059 4 - 0.3439 4 $i$

表-6 c.

$k^2$	$2q^4 \cos \frac{2\pi}{K}(K - a + iy)$	$\frac{1}{2} \log \frac{\theta(u_m - a)}{\theta(u_m + a)}$	$l$	$c$	$h$	$l/c$	$h/l$
0.1	-0.0000 0 $i$	0.2007 $i$	0.2938 0	0.3140 6	0.6228 2	0.9354	2.119
0.2	-0.0000 1 $i$	0.2309 $i$	0.3260 9	0.4592 8	0.7974 4	0.7100	2.445
0.3	-0.0000 4 $i$	0.2546 $i$	0.3246 9	0.5728 1	0.9144 7	0.5668	2.816
0.4	-0.0000 1 - 0.0000 8 $i$	0.2751 $i$	0.3052 7	0.6706 6	1.0051 6	0.4551	3.292
0.5	-0.0000 4 - 0.0001 5 $i$	0.2950 $i$	0.2736 9	0.7569 1	1.0752 0	0.3615	3.944
0.6	-0.0001 2 - 0.0002 2 $i$	0.3121 $i$	0.2332 8	0.8369 1	1.1442 6	0.2787	4.905
0.7	-0.0004 2 - 0.0004 2 $i$	0.3264 $i$	0.1851 3	0.9118 6	1.2022 5	0.2030	6.494
0.8	-0.0010 8 - 0.0006 0 $i$	0.3369 $i$	0.1302 6	0.9836 6	1.2558 4	0.1324	9.641
0.9	-0.0032 0 - 0.0000 8 $i$	0.3341 $i$	0.0686 3	1.0531 1	1.3060 6	0.0651	19.030



表-7 a. (a=2.0, a ≤ K(k))

$k^2$	$\Pi(K, a)$	$\Pi(iK', a)$	$m^2$	$u_m = K + iy$	$2q \cos \frac{\pi}{K} (K - a + iy)$
0.7	0.04615	-0.01892i	1.39608	2.07536 + 1.436i	0.66072 - 0.07372i
0.8	0.18457	-0.04329i	1.19742	2.25720 + 1.180i	0.49840 - 0.17296i
0.9	0.47001	-0.05827i	1.07214	2.57809 + 0.975i	0.38295 - 0.27014i

表-7 b.

$k^2$	$2q^4 \cos \frac{2\pi}{K} (K - a + iy)$	$\frac{1}{2} \log \frac{\theta(u_m - a)}{\theta(u_m + a)}$	$l$	$c$	$h$	$l/c$	$h/l$
0.7	0.00233 - 0.00059i	0.2109	0.95335	1.65236	1.41592	0.5769	1.4852
0.8	0.00194 - 0.00169i	0.3279	0.60788	1.73856	1.44259	0.3496	2.3731
0.9	0.00067 - 0.00408i	0.4067	0.31046	1.83205	1.47701	0.1694	4.7574

圖-15 はこの兩表の結果から、支へられた  $k^2, a$  の値に對する  $h/l$  と  $l/c$  の關係、即ち與へられた  $h/l$  と  $l/c$  及び  $a$  との關係から  $k$  の値を定める曲線を作つたものである。

以上の計算を利用して揚圧力分布を求めて、之を不滲透層のない場合の計算結果と比較して見る。不滲透層の影響の大きい場合を取る爲に、 $a=2.0, k^2=0.7$  の場合を考へれば  $l/c=0.5769, h/l=1.4852$  である。

計算には (36), (37) の兩式を使用するのであるが、この場合は  $2K(\text{sn } a)/\Delta\phi=1$  でよい。

$$\frac{1}{k^2 \text{sn}^2 a} - m^2 = 0.03494, \quad \frac{k^2 \text{sn}^2 a}{\text{cn} a \text{dn} a} = 25.7790, \quad m^2 k^2 \text{sn}^2 a = 0.81621$$

計算した數値表を簡単に表-8 に示す。又この結果として得られた揚圧力分布は圖-16 に實線を以て示した。之を  $h=\infty$  の場合と比較する爲に堰堤底面上流端の揚圧力の強さを  $p_{20}$  と書いて、第3章の計算から

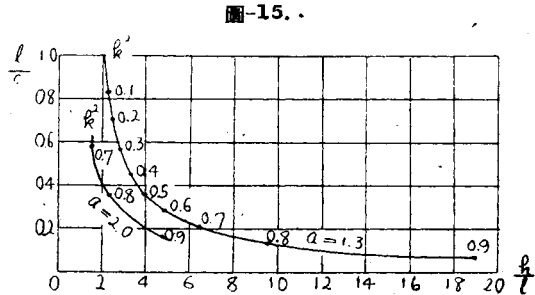


圖-16.

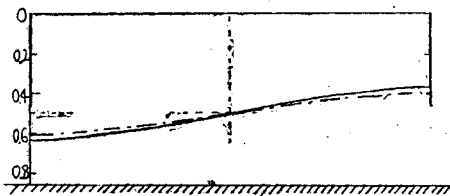


圖-17.

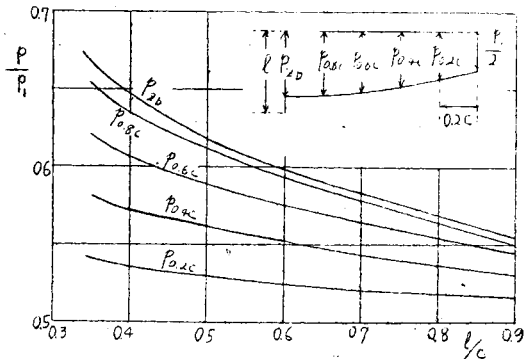


表-8.

$u$	$\frac{1}{2} \log \frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)}$	$uZ(a)$	$\Pi(u, a)$	$z$	$k \operatorname{sn}(u, k)$	$w (= \varphi)$	$p_z$	$p_{-z}$
0.0	0.0000 0	0.0000 0	0.0000 0	0.0000 0	0.0000 0	0.0000 0	0.5000	0.5000
0.2	-0.0044 5	0.0044 5	0.0000 0	-0.1632 4	0.1654 5	0.1668 8	0.5181	0.4819
0.4	-0.0086 4	0.0088 9	0.0002 5	-0.3262 6	0.3202 5	0.3319 9	0.5361	0.4639
0.6	-0.0123 0	0.0133 4	0.0010 4	-0.4887 9	0.4562 3	0.4926 0	0.5535	0.4465
0.8	-0.0151 3	0.0177 9	0.0026 6	-0.6505 7	0.5691 2	0.6459 5	0.5702	0.4298
1.0	-0.0168 3	0.0222 4	0.0054 1	-0.8113 4	0.6582 5	0.7894 5	0.5858	0.4142
1.2	-0.0171 2	0.0266 8	0.0095 6	-0.9708 4	0.7255 3	0.9198 5	0.6000	0.4000
1.4	-0.0157 1	0.0311 3	0.0154 2	-1.1288 1	0.7740 4	1.0295 4	0.6120	0.3880
1.6	-0.0126 0	0.0355 8	0.0229 8	-1.2852 4	0.8069 7	1.1171 9	0.6215	0.3785
1.8	-0.0079 6	0.0400 3	0.0320 7	-1.4402 9	0.8269 9	1.1770 5	0.6280	0.3720
2.0	-0.0022 7	0.0444 8	0.0422 1	-1.5944 1	0.8359 4	1.2063 2	0.6312	0.6688
5.36	-0.0000 0	0.0461 5	0.0461 5	-1.6523 6	0.8366 6	1.2084 3	0.6314	0.3686

表-9 から  $l/c-p_{zb}$  曲線を畫いて、 $l/c=0.5769$  に對する  $p_{zb}=0.6050$  を得る。圖-17 は底面上の各點に對してこの様な曲線を作つたものであつて、之から  $h=\infty$  の場合に  $l/c=0.5769$  に對する揚壓力分布曲線を畫けば圖-16 中の鎖線の様になり、下部不滲透層の影響の甚だ小さい事がわかる。

表-9.

$\theta$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$
$l/c$	0.8975	0.5426	0.3481
$p_{zb}$	0.5556	0.6111	0.6666

第 5 章 矩形縦断面を持つ基礎の周りの地下水流

圖-18 の場合に  $z$  面から  $z_1$  面に移す寫像函数は

$$z = Ak \int_0^{z_1} \sqrt{\frac{1-z_1^2}{1-k^2 z_1^2}} dz_1 + B$$

$z=-il$  を  $z_1=0$  に移すから  $B=-il$  である。

$$\therefore z = Ak \int_0^{z_1} \sqrt{\frac{1-z_1^2}{1-k^2 z_1^2}} dz_1 - il \dots\dots\dots(47)$$

之を第 1 種及び第 2 種の楕圓積分に分解すれば

$$z = A \left( k - \frac{1}{k} \right) \int_0^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2 z_1^2)}} + \frac{A}{k} \int_0^{z_1} \sqrt{\frac{1-k^2 z_1^2}{1-z_1^2}} dz_1 - il \dots\dots\dots(48)$$

此處で  $A < 0$  とすると圖の様な寫像關係となり、 $z$  面での  $EABO_1CDF$  の下側が  $z_1$  面の上半分に移される。そこで  $A=-1$  と置く事にする。又  $z_1$  と  $w$  との關係は

$$z_1 = \frac{1}{k} \cos \left( w \frac{\pi}{\Delta\varphi} \right) \dots\dots\dots(49)$$

であつて  $z_1 = \operatorname{sn}(u, k)$  と置けば (48), (49) 式の代りに

$$\left. \begin{aligned} z &= \left(\frac{1}{k} - k\right)u - \frac{1}{k} E(u) - il \\ w &= \frac{\Delta\phi}{\pi} \cos^{-1}[k \operatorname{sn}(u, k)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(50)$$

前と同じ様に之を函数表を引き得る形に改める。

i)  $z_1$  は實數,  $1 \geq z_1 \geq 0$  ならば (48) 式又は (50) 式のまゝでよい。

ii)  $z_1$  は實數,  $1/k \geq z_1 \geq 1$  ならば

$$z = \left(\frac{1}{k} - k\right)K(k) - \frac{1}{k} E(k) + \left(\frac{1}{k} - k\right) \int_0^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2z_1^2)}} - \frac{1}{k} \int_1^{z_1} \sqrt{\frac{1-k^2z_1^2}{1-z_1^2}} dz_1 - il$$

こゝで  $1-k^2z_1^2 = k'^2t^2$ ,  $1-k^2 = k'^2$  と置き, 完全楕圓積分  $K', E'$  を用ひて書き直せば

$$z = \left(\frac{1}{k} - k\right)K - \frac{1}{k} E + \frac{i}{k} E' - ikK' + ik \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} - \frac{i}{k} \int_0^t \sqrt{\frac{1-k'^2t^2}{1-t^2}} dt - il \dots\dots\dots(51)$$

$k$  を與へて  $l/c$  を定めるには (50) 式及び (51) 式から

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{k} - k\right)K - \frac{1}{k} E &= -c \\ \frac{1}{k} E' - kK' &= l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(52)$$

圖-18.

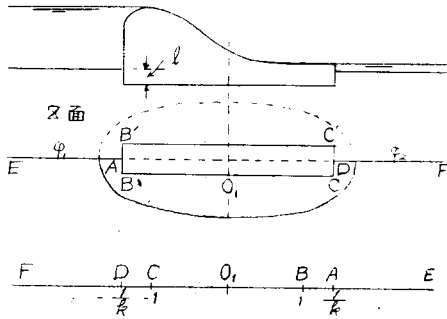


圖-19.

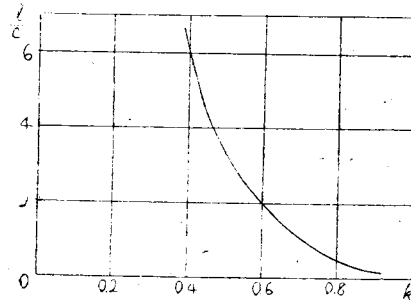


表-10.

$k$	$\left(\frac{1}{k} - k\right)K$	$-\frac{1}{k} E$	$c$	$\frac{1}{k} E'$	$-kK'$	$l$	$l/c$
0.40	3.4439	-3.7648	0.3209	2.8766	-0.9437	1.9329	6.0233
0.45	2.9446	-3.3078	0.3632	2.6233	-1.0133	1.6100	4.4328
0.50	2.5286	-2.9349	0.4063	2.4221	-1.0782	1.3439	3.3076
0.55	2.1767	-2.6270	0.4503	2.2612	-1.1386	1.1226	2.4930
0.60	1.8630	-2.3639	0.4954	2.1276	-1.1972	0.9304	1.8761
0.65	1.5943	-2.1372	0.5429	2.0168	-1.2519	0.7649	1.4089
0.70	1.3436	-1.9359	0.5923	1.9215	-1.3038	0.6177	1.0422
0.75	1.1141	-1.7575	0.6434	1.8415	-1.3533	0.4882	0.7587
0.80	0.8979	-1.5954	0.6975	1.7726	-1.4006	0.3720	0.5333
0.85	0.6879	-1.4442	0.7563	1.7114	-1.4458	0.2656	0.3511
0.90	0.4812	-1.3017	0.8205	1.6590	-1.4891	0.1699	0.2070

之から  $c$  及び  $l$  を  $k$  の函数として求める事が出来、従つて  $l/c$  と  $k$  の曲線を描く事が出来る。表-10 に  $A=-1$  の時の  $c, l, l/c$  を與へた。 $l/c$  は  $A$  に無關係の大きさを持つてゐる。又その曲線は圖-19 に與へる。

揚壓力の分布を求めるには、(31) 式に於て  $y=-l, y_1=0$  ( $k=\rho g \Delta\varphi/\Delta p$ ) として計算する。この場合も底面に沿つて  $\psi=0$  とする。

例 6.  $k=0.7660, \theta=\sin^{-1} k=50^\circ, l/c=0.6817, p_1=1, p_2=0, \Delta\varphi=\pi$  とする。(50), (51) を用ひて  $\varphi$  及び  $p$  を計算した結果を表-11 に示す。又壓力分布曲線は圖-20 に示した。

表-11.

$z_1$ ( $=\sin \omega$ )	$\omega$	$\left(\frac{1}{k}-k\right)u$	$-\frac{1}{k}E(u)$	$z$	$\varphi_z$	$\varphi-z$	$p_z/\rho g$	$p-z/\rho g$
1.0000	90°	1.0442	-1.7043	-0.6601-0.4500 <i>i</i>	-0.6981	-2.4435	1.2278	0.6722
0.9848	80°	0.8987	-1.5568	-0.6581- " <i>i</i>	-0.7158	-2.4258	1.2222	0.6778
0.9397	70°	0.7589	-1.4033	-0.6444- " <i>i</i>	-0.7672	-2.3744	1.2058	0.6942
0.8660	60°	0.6281	-1.2392	-0.6111- " <i>i</i>	-0.8455	-2.2961	1.1809	0.7191
0.7660	50°	0.5071	-1.0618	-0.5547- " <i>i</i>	-0.9437	-2.1979	1.1497	0.7503
0.6428	40°	0.3950	-0.8703	-0.4753- " <i>i</i>	-1.0559	-2.0857	1.1139	0.7861
0.5000	30°	0.2901	-0.6657	-0.3756- " <i>i</i>	-1.1778	-1.9638	1.0751	0.8249
0.3420	20°	0.1905	-0.4503	-0.2597- " <i>i</i>	-1.3058	-1.8358	1.0344	0.8656
0.1736	10°	0.0944	-0.2271	-0.1327- " <i>i</i>	-1.4374	-1.7042	0.9925	0.9075
0.0000	0°	0.0000	-0.0000	-0.0000- " <i>i</i>	-1.5708		0.9500	

表-12.

$z_1$	$\omega$	$\left(\frac{1}{k}-k\right)u$	$-\frac{1}{k}E(u)$	$z$	$\varphi_z$	$p_z/\rho g$
1.4395				-0.5859	0.0000	1.0000
1.0000	90°	1.3705	-1.9564	-0.5859-0.6337 <i>i</i>	-0.8028	1.3782
0.9848	80°	1.1908	-1.7750	-0.5842- " <i>i</i>	-0.8176	1.3735
0.9397	70°	1.0154	-1.5886	-0.5732- " <i>i</i>	-0.8595	1.3602
0.8660	60°	0.8480	-1.3934	-0.5454- " <i>i</i>	-0.9253	1.3392
0.7660	50°	0.6899	-1.1868	-0.4969- " <i>i</i>	-1.0096	1.3124
0.6428	40°	0.5404	-0.9680	-0.4276- " <i>i</i>	-1.1079	1.2811
0.5000	30°	0.3986	-0.7376	-0.3390- " <i>i</i>	-1.2160	1.2467
0.3420	20°	0.2625	-0.4976	-0.2351- " <i>i</i>	-1.3309	1.2101
0.1736	10°	0.1565	-0.2506	-0.0941- " <i>i</i>	-1.4498	1.1723
0.0000	0°	0.0000	-0.0000	-0.0000- " <i>i</i>	-1.5708	1.1337

例 7.  $k=0.6946, \theta=\sin^{-1} k=44^\circ, l/c=1.081, l=0.6337, c=0.5859, p_1=1, p_2=0, \Delta\varphi=\pi$  とする。本例では底面の壓力のみを計算した。數値及び曲線は表-12 及び圖-21 に示す。

この二つの例から見ると一般に行はれてゐる直線的な揚壓力分布の假定は甚だしい誤差を與へるものでない事がわかる。

次に  $\psi=0$  の流線上での速度分布を求める。先づ一般の  $dw/dz=-u+iv$  を計算すれば

$$\frac{dw}{dz_1} = \frac{\Delta\phi}{\pi} \frac{k}{\sqrt{1-k^2z_1^2}}$$

$$\frac{dz}{dz_1} = \left(\frac{1}{k} - k\right) \frac{1}{\sqrt{(1-z_1^2)(1-k^2z_1^2)}} - \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1-k^2z_1^2}{1-z_1^2}}$$

$$\therefore \left(\frac{dw}{dz}\right)_{\psi=0} = -n + iv = -\frac{1}{\sqrt{1-z_1^2}} \frac{\Delta\phi}{\pi} \dots\dots\dots (33)$$

圖-20.

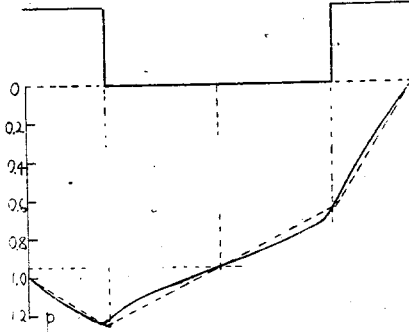
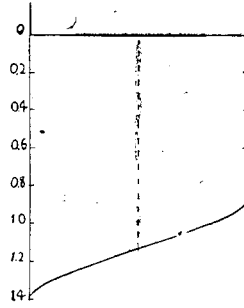


圖-21.



例 6 に於ける底面の速度分布を、堤底中央での流速を 1 として計算すれば表-13 及び圖-22 を得る。

表-13.

$z_1$	$z$	$-1/\sqrt{1-z_1^2}$	$u$ 又は $v$
0.0000	-0.0000-0.4500 $i$	-1.0000	$u = 1.0000 \cdot$
0.1736	-0.1327- " $i$	-1.0154	1.0154
0.5000	-0.3756- " $i$	-1.1546	1.1546
0.7660	-0.5547- " $i$	-1.5557	1.5557
0.9397	-0.6444- " $i$	-2.9235	2.9235
1.0000	-0.6601- " $i$	$-\infty$	$\infty$
1.0404	- " -0.4481 $i$	3.4831 $i$	$v = -3.4831$
1.1362	- " -0.3831 $i$	1.8539 $i$	1.8539
1.2362	- " -0.2625 $i$	1.3760 $i$	1.3760
1.2973	- " -0.0934 $i$	1.2100 $i$	1.2100
1.3054	- " -0.0000 $i$	1.1918 $i$	1.1918

圖-22.

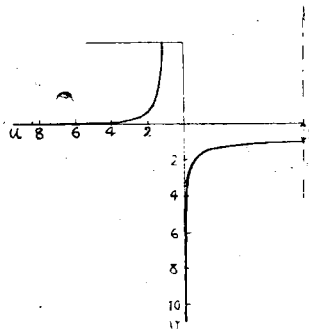
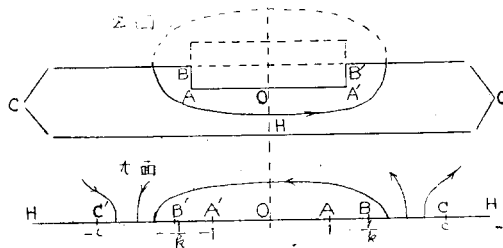


圖-23.



この問題に對しても第 4 章に於けると同様にして下部不滲透層の影響を考へる事が出来る。圖-13 の場合と同様に  $y = -h$  の所に不滲透層があるものとして、 $z$  面から  $t$  面へは

$$z = Ak \int_0^t \frac{1}{t^2 - c^2} \sqrt{\frac{1-t^2}{1-k^2t^2}} dt - il \dots\dots\dots(54)$$

によつて寫される。又面  $v$  の考へてある領域は  $t$  面の上半面に移つて、洗線の形は  $t$  面では圖-23 の様になる。そこで  $\zeta = kt$  の  $\zeta$  面を考へれば、之と  $w$  面との關係は (34) 式で與へられる。但しこの場合  $h = 1/ke$  ( $0 < h < 1$ ) と書く。従つて (35) 式の形が成り立ち、結局次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} kt &= \operatorname{sn}\left(w \frac{2K(h)}{\Delta\phi}, \frac{1}{ke}\right) \\ z &= Ak \int_0^t \frac{1}{t^2 - c^2} \sqrt{\frac{1-t^2}{1-k^2t^2}} dt - il \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(55)$$

(55) 式の第 2 式を數値計算の可能な形に改めるには、 $t = \operatorname{sn}(u, k) = \operatorname{sn} u$  とおき

$$z = Ak \int_0^u \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u - c^2} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \frac{d \operatorname{sn} u}{du} du - il$$

$$\therefore z + il = Ak \int_0^u \frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u - c^2} du = Ak \int_0^u \frac{1 - \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u - c^2} du$$

$$\therefore z + il = Ak(e^2 - 1) \int_0^u \frac{du}{e^2 - \operatorname{sn}^2 u} - Aku \dots\dots\dots(56)$$

此處で積分  $I = \int_0^u \frac{du}{e^2 - \operatorname{sn}^2 u}$  を計算する。  $-1/e^2 = n$  と置けば

$$e^2 I = \int_0^u \frac{du}{1 + n \operatorname{sn}^2 u}$$

$$\therefore e^2 I - u = \int_0^u \frac{-n \operatorname{sn}^2 u}{1 + n \operatorname{sn}^2 u} du$$

更に  $n = -k^2 \operatorname{sn}^2(a, k)$  と置けば

$$(e^2 I - u) \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} = \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} \int_0^u \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} du$$

$$= k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 a du}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \Pi(u, a)$$

$$\therefore e^2 I = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \Pi(u, a) + u, \quad 1/e^2 = k^2 \operatorname{sn}^2 a$$

$$\therefore z + il = Ak(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a) \left[ \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \Pi(u, a) + u \right] - Aku$$

$$= Ak \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a} \Pi(u, a) - Ak^3 \operatorname{sn}^2 a \cdot u \dots\dots\dots(57)$$

之と (55) の第 1 式から計算するのである。但し  $e = 1/(k \operatorname{sn} a)$ ,  $h = 1/ke = \operatorname{sn}(a, k)$  である。

與へられた  $z$  面の形から  $k, a$  (又は  $e$ ) を定める爲に、前と同様に先づ  $k, a$  を與へてそれに対する  $c, l, h$  を求める。 $z, t, u$  の 3 つの面の對應は次の様になつてゐる。

i)  $H$  では  $t \rightarrow \infty, z = -ih, u = iK'$

$$\therefore -ih + il = Ak \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a} \Pi(iK', a) - Ak^3 \operatorname{sn}^2 a \cdot iK' \dots\dots\dots(58)$$

ii) A では  $t \rightarrow 1, z = -c - il, u = K$

$$\therefore -c = Ak \frac{dn a \operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a} \Pi(K, a) - Ak^2 \operatorname{sn}^2 a \cdot K \dots\dots\dots (59)$$

iii) B では  $t = 1/k, z = -c, u = K + iK'$

$$\therefore -c + il = Ak \frac{dn a \operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a} \Pi(K + iK', a) - Ak^2 \operatorname{sn}^2 a \cdot (K + iK') \dots\dots\dots (60)$$

$\Pi$  は前に與へた式によつて計算する事が出来るのであるが、特定なものは次の式で計算される。

$$\Pi(K, a) = K \frac{\theta'(a)}{\theta(a)}, \quad \Pi(K + iK', a) = \frac{a}{2K} \pi i + K \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + iK' \frac{\theta'(a)}{\theta(a)}$$

$$\Pi(iK', a) = \left( \frac{a}{2K} - \frac{1}{2} \right) \pi i + iK' \frac{\theta'(a)}{\theta(a)}, \quad \Pi(0, a) = 0$$

従つて (58), (59), (60) 式から  $l, c, h$  が  $A, k, a$  によつて表はされるが、 $A$  を除けば

$$\frac{h}{l} = \frac{\frac{dn a}{\operatorname{cn} a} \cdot \frac{1}{2} \pi}{\frac{dn a}{\operatorname{cn} a} \left( \frac{a}{2K} \pi + K' \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} \right) - k^2 \operatorname{sn}^2 a \cdot K'} \dots\dots\dots (61)$$

表-14 a.  $a = 0.8$

$k^2$	$\operatorname{sn} a$	$\operatorname{cn} a$	$dn a$	$K$	$K'$	$q$	$Z(a)$
0.1	0.7121 2	0.7020 6	0.9743 1	1.6124 4	2.5780 9	0.0065 8	0.0256 4
0.2	0.7068 5	0.7073 6	0.9487 2	1.6596 2	2.2572 0	0.0139 4	0.0527 7
0.3	0.7015 7	0.7126 0	0.9232 2	1.7138 8	2.0753 6	0.0222 8	0.0816 7
0.4	0.6962 6	0.7177 9	0.8978 2	1.7775 1	1.9495 6	0.0318 8	0.1124 1
0.5	0.6909 3	0.7229 2	0.8725 3	1.8540 7	1.8540 7	0.0432 1	0.1457 2
0.6	0.6855 9	0.7279 9	0.8473 4	1.9495 6	1.7775 1	0.0570 2	0.1822 8
0.7	0.6802 3	0.7330 0	0.8222 6	2.0753 6	1.7138 8	0.0746 9	0.2243 4
0.8	0.6748 5	0.7379 6	0.7972 9	2.2572 0	1.6596 2	0.0992 7	0.2716 8
0.9	0.6694 5	0.7428 6	0.7724 3	2.5780 9	1.6124 4	0.1401 7	0.3355 0

表-14 b.  $a = 0.8$

$k^2$	$h/Ak \operatorname{sn} a$	$l/Ak \operatorname{sn} a$	$c/Ak \operatorname{sn} a$	$h/l$	$l/c$
0.1	2.1797	0.9896	0.0574	2.2025	17.2220
0.2	2.1067	0.8561	0.1171	2.4605	7.3065
0.3	2.0349	0.7326	0.1793	2.7776	4.0838
0.4	1.9647	0.6154	0.2451	3.1925	2.5108
0.5	1.8957	0.5035	0.3145	3.7650	1.6009
0.6	1.8282	0.3961	0.3883	4.6150	1.0200
0.7	1.7619	0.2944	0.4659	5.9847	0.6318
0.8	1.6969	0.1925	0.5561	8.8150	0.3461
0.9	1.6333	0.0978	0.6539	16.6950	0.1496

$$\frac{l}{c} = \frac{\frac{dn a}{cn a} \left( \frac{a}{2K} \pi + K' \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} \right) - k^2 \operatorname{sn} a \cdot K'}{k^2 \operatorname{sn} a \cdot K - \frac{dn a}{cn a} K' \frac{\theta'(a)}{\theta(a)}} \dots (62)$$

但し  $\theta'(a)/\theta(a)$  は  $Z(a)$  として計算される。又母数は總て  $k$  である。

先づ  $k=0.8$  の場合を計算すれば次の表-14 を得る。

以下  $a=1.0, 1.3, 2.0$  の場合を順次に表-15, 16, 17 に示した。

表-15.  $a=1.0$

$k^2$	$Z(a)$	$h/Ak \operatorname{sn} a$	$l/Ak \operatorname{sn} a$	$c/Ak \operatorname{sn} a$	$h/l$	$l/c$
0.1	0.0237 1	2.7462	1.5949	0.0676	1.7217	23.5760
0.2	0.0496 2	2.5924	1.3738	0.1384	1.8870	9.9256
0.3	0.0779 8	2.4454	1.1689	0.2129	2.0918	5.4900
0.4	0.1091 5	2.3045	0.9762	0.2919	2.3605	3.3439
0.5	0.1437 7	2.1694	0.7938	0.3762	2.7329	2.1095
0.6	0.1827 6	2.0399	0.6204	0.4671	3.2876	1.3281
0.7	0.2276 4	1.9156	0.4548	0.5668	4.2111	0.8025
0.8	0.2816 6	1.7962	0.2966	0.6787	6.0540	0.4371
0.9	0.3535 1	1.6812	0.1446	0.8113	11.6230	0.1782

表-16.  $a=1.3$

$k^2$	$Z(a)$	$h/Ak \operatorname{sn} a$	$l/Ak \operatorname{sn} a$	$c/Ak \operatorname{sn} a$	$h/l$	$l/c$
0.3	0.0544 8	3.9364	2.6841	0.2491	1.466	10.773
0.4	0.0797 8	3.4642	2.1510	0.3487	1.610	6.167
0.5	0.1124 8	3.0509	1.6909	0.4482	1.804	3.772
0.6	0.1505 9	2.6860	1.2784	0.5623	2.101	2.273
0.7	0.1973 2	2.3613	0.9093	0.6900	2.596	1.317
0.8	0.2566 1	2.0706	0.5763	0.8381	3.592	0.687
0.9	0.3402 9	1.8083	0.2742	1.0184	6.594	0.269

表-17.  $a=2.0$

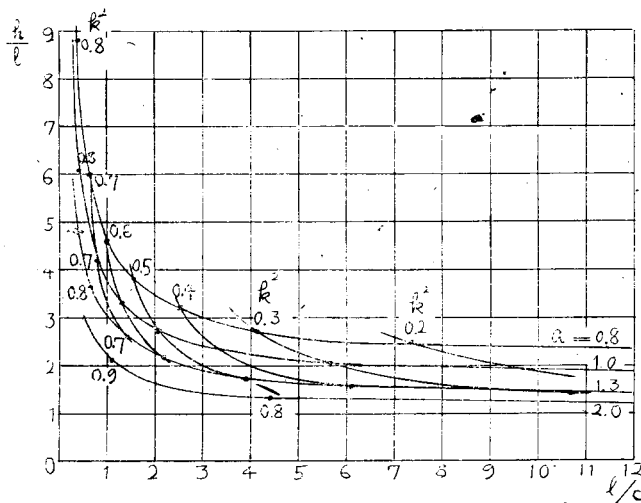
$k^2$	$Z(a)$	$h/Ak \operatorname{sn} a$	$l/Ak \operatorname{sn} a$	$c/Ak \operatorname{sn} a$	$h/l$	$l/c$
0.7	0.0222 4	20.8775	19.4272	0.8381	1.0746	23.1800
0.8	0.0817 7	6.2279	4.7374	1.0618	1.3146	4.4616
0.9	0.1823 1	2.9988	1.4630	1.3803	2.0497	1.0599

$k$  を一定にして  $\operatorname{sn} a=1/(kc)$  を考へると  $t$  面で  $1/(kc)$  は Riemann 面上葉の横軸の上側に沿ひ  $0 \sim 1$  の間にある。従つて  $t=\operatorname{sn}(u, k)$  で  $t$  を Riemann 面上葉に取つた時の寫像から  $a$  が  $0 \sim K$  の實數値をとる事は明らかである。即ち表-17 の  $k^2=0.1 \sim 0.6$  は Riemann 面下葉の状態を示してゐる。以上の計算から、與へられた  $a$  及び  $k$  によつて、 $l/c$  及び  $h/l$  を與へる曲線を作れば圖-24 の様になる。



この場合の揚壓力分布を求めるには、(55) の第 1 式及び (57) 式から計算するのであるが、 $H(u, a)$  の計算を實數の  $u$  の場合に限つたので底面での揚壓力しか求められてゐない。

圖-24.



例 8.  $a=1.3, k^2=0.8, l/c=0.687, h/l=3.592$  とする。諸函數値は表-16 にあるから、 $p_1=1, p_2=0, \Delta\varphi=2K$  ( $\text{sn } a$ ),  $\text{sn } a=0.88697$  として表-18 を得る。

表-18.

$u$	$H(u, a)$	$-k^2 \text{sn } a \cdot u$	$k \text{sn}(u, k)$	$z/Ak \text{sn } a$	$\varphi$	$p/\rho g$
0.0	0.0000 0	-0.0000 0	0.0000 0	-0.0000-0.5763 $i$	0.0000	0.5000+ $l$
0.2	0.0006 2	-0.1419 1	0.1778 4	-0.1411- " $i$	0.1796	0.5403+ $l$
0.4	0.0042 4	-0.2838 2	0.3436 1	-0.2782- " $i$	0.3565	0.5800+ $l$
0.6	0.0144 6	-0.4257 4	0.4882 4	-0.4066- " $i$	0.5286	0.6186+ $l$
0.8	0.0340 8	-0.5676 5	0.6072 9	-0.5227- " $i$	0.6916	0.6552+ $l$
1.0	0.0661 1	-0.7095 7	0.7005 5	-0.6224- " $i$	0.8439	0.6893+ $l$
1.2	0.1126 3	-0.8514 8	0.7706 3	-0.7030- " $i$	0.9801	0.7199+ $l$
1.4	0.1747 4	-0.9933 9	0.8214 1	-0.7630- " $i$	1.0999	0.7468+ $l$
1.6	0.2519 7	-1.1353 1	0.8567 7	-0.8031- " $i$	1.1967	0.7685+ $l$
1.8	0.3422 9	-1.2772 2	0.8801 0	-0.8260- " $i$	1.2710	0.7852+ $l$
2.0	0.4423 2	-1.4191 4	0.8938 4	-0.8360- " $i$	1.3184	0.7958+ $l$
2.2	0.5484 4	-1.5610 5	0.8996 0	-0.8381- " $i$	1.3404	0.8008+ $l$
2.2572 0	0.5792 2	-1.6016 4	0.8999 0	- " - " $i$	1.3418	0.8011+ $l$
2.2572 0 + 1.6596 2 $i$				-0.8381	2.2278	1.0000

表-18 には左半分のみを示してゐるが、圖形の對稱性によつて右半分の値を知る事が出来て、圖-25 の曲線を得る。

例 9.  $a=2.0, k^2=0.9, l/c=1.0599, h/l=2.0497, p_1=1, p_2=0, \Delta\varphi=2K(\operatorname{sn} a), \operatorname{sn} a=0.98162$  とし、表-17 を参照して計算すれば次の表-19 及び圖-26 を得る。

之等の結果を  $h=\infty$  の場合と比較する爲には、先づ前の圖-17 と同様な  $l/c$  と  $p_2$  の曲線群を作り、之を利用して例 8 及び例 9 に相當する  $h=\infty$  の場合の揚圧力を求めれば、圖-26 及び圖-27 に點線で示した分布曲線が得られる。之か

圖-25.

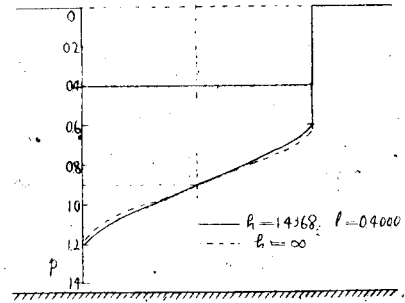


表-19.

$u$	$H(u, a)$	$-k^2 \operatorname{sn} a \cdot u$	$k \operatorname{sn}(u, k)$	$Z/Ak \operatorname{sn} a$	$\varphi$	$p/\rho g$
0.0	0.0000 0	-0.0000 0	0.0000 0	-0.0000 0 - 1.4630 i	0.0000	0.5000 + l
0.2	0.0012 6	-0.1766 9	0.1873 4	-0.1742 9 - " i	0.1895	0.5309 + l
0.4	0.0013 2	-0.3533 8	0.3613 1	-0.3508 6 - " i	0.3765	0.5615 + l
0.6	0.0043 8	-0.5300 7	0.5120 5	-0.5217 1 - " i	0.5643	0.5921 + l
0.8	0.0104 8	-0.7067 6	0.6350 4	-0.6860 7 - " i	0.7475	0.6221 + l
1.0	0.0222 1	-0.8834 5	0.7305 0	-0.8410 5 - " i	0.9255	0.6511 + l
1.2	0.0405 7	-1.0601 4	0.8017 3	-0.9826 9 - " i	1.0933	0.6786 + l
1.4	0.0679 3	-1.2368 3	0.8532 6	-1.1071 5 - " i	1.2502	0.7042 + l
1.6	0.1064 9	-1.4135 2	0.8895 8	-1.2102.2 - " i	1.3953	0.7279 + l
1.8	0.1580 5	-1.5902 1	0.9145 6	-1.2884 8 - " i	1.5208	0.7484 + l
2.0	0.2232 2	-1.7669 0	0.9311 6	-1.3407 6 - " i	1.6191	0.7645 + l
2.2	0.3009 8	-1.9435 9	0.9415 3	-1.3689 9 - " i	1.6981	0.7774 + l
2.4	0.3881 4	-2.1202 8	0.9470 8	-1.3792 9 - " i	1.7433	0.7847 + l
2.5780 9	0.4700 1	-2.2776 1	0.9486 0	-1.3803 2 - " i	1.7638	0.7865 + l
2.5780 9 + } 1.6124 4 i }				-1.3803 2	3.0606	1.0000

圖-26.

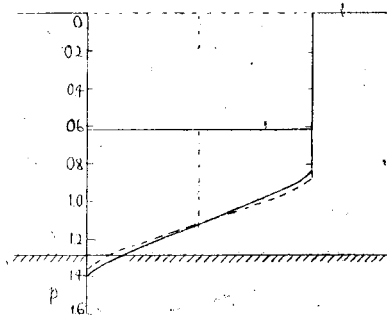
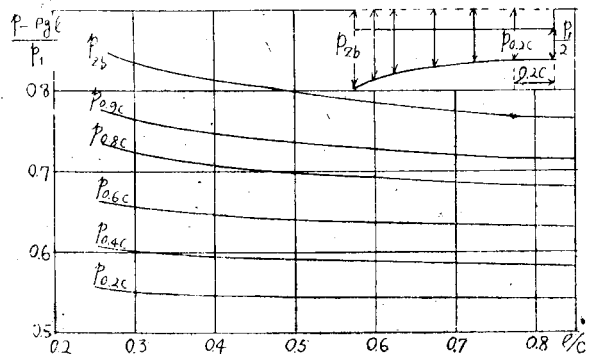


圖 27.



ら見れば下部不滲透層の影響はこの場合にも甚だ小さい事がわかる。

## 第 6 章 雑 論

以上に述べた複素ポテンシアルによる解が正しい結果を與へるか否かを調べる爲に粗砂を用ひて簡単な實驗を試みた。實驗では下部不滲透層の外に兩側にも壁を持つから、その影響を考へると極めて簡単な場合でなければ解析的な解が得られない。そこで圖-28 の様な唯一つの矢板のある場合の解を求め、A, B の 2 點の關係位置及び矢板の下を通る流量に就て數値計算と實驗結果との比較を試みたが（流量は絶対値によらず、落差の變化に對する變化の割合で測る）、兩者は極めてよい一致を示した。

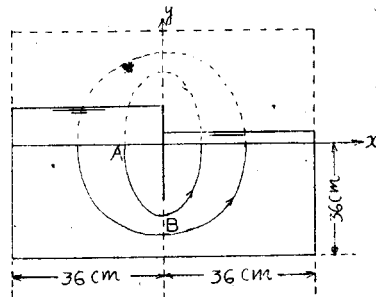
砂を填めた圓筒の兩端面に水位差を與へ、その時の抵抗係数を

$$\xi = \frac{dI}{2\rho v^2}, \quad d = \text{砂の平均徑}, \quad I = \text{動水勾配}$$

の形で表はした時に、 $\xi$  と Reynolds 數  $vd/\nu$  との關係は、つき固めない砂に對しては  $Re < 8$  の間では  $Re$  は  $\xi$  に逆比例<sup>6)</sup>、運動は層流状態にある。そこで矢板の長さ 19.4 cm（砂層の深さ 36 cm）の場合に就て矢板先端附近での  $Re$  を計算した所、先端から上に 0.65 cm、下に 0.50 cm の間が  $Re > 8$  であつた。即ちこの範圍内では Darcy の法則が完全に成り立つてゐないのであるが、その範圍は全體から見れば極めて小部分である爲に、上に述べた實驗に於ても計算値との間に差違が見られなかつたものと思はれる。

砂は軽く填めて放置すれば下の方から締め固まり、一時  $\xi$  の値が不均一になる。この様な状態で實驗を行ふと

圖-28.



流線の形は著しく變つて來る。即ち圖-28 の様な場合ならばその不均一性の爲に流線は垂れ下る。この問題に就ても多少の考察をしたが茲には省略する。

(昭. 18. 11. 5. 受付)

昭和19年2月25日印刷 昭和19年3月1日發行(定價金2圓)

編輯兼發行者 東京都牛込區南町33番地  
中 村 孫 一

印刷者 東京都神田區美土代町16番地  
(東東35) 倉 澤 直 男

印刷所 東京都神田區美土代町16番地  
株式會社 三 秀 會

---

東京都麴町區丸ノ内3丁目6番地

發 行 所 社 團 法 人 土 木 學 會

電 話 丸ノ内(23) 3945番, 撥替口座東京16828番

昭和十二年九月十日第三種郵便物認可  
昭和十九年二月二十五日印刷  
昭和十九年三月一日發行



學會誌

臨時增刊特輯・論文集

第三十卷第四號

土木学会誌  
論文集 第~~1~~<sup>二</sup>~~2~~合併号

目 次

	頁
車輪に依り軌條に與へらるる側圧應力 に関する一試験(第1報).....	正員 神谷修作 1
砂の運動機構に就て(1).....	正員 工学博士 最上武雄 20
管内に於ける擴まり流れ及平行な流れの 流速分布に就て.....	准員 青松健一 42
吊橋の換り振動に対する安定性に就て(II).....	正員 工学博士 平井敦 48
地下水面下の土砂の内部摩擦角に関する 一試験.....	正員 松尾春雄 67
波高の大きさ、波の変形に就て.....	正員 工学博士 本間仁 69
走行荷重に依る鋪裝板及の振動に就て.....	准員 青松健一 75
吊橋の換り振動に対する安定性に就て(III).....	正員 工学博士 平井敦 83
横荷重を受ける吊橋.....	正員 岡本舜三 90
水文学に於ける非對称分布に就て.....	准員 岩井重久 93

昭和22年6月

土木学会

