



凝集力を有する土の支持力

正會員 水野高明*

要旨 本文は二次元問題としての凝集力ある土の支持力を著者の方法に Caquot の理論を組合せて求めたもので、凝集力無き場合の支持力圖表さへ作製して置けば之を利用して凝集力ある場合の支持力をも見出しえる事を示したものである。

1. 序 說

著者、前2回の論文^{(1),(2)}に於て、構造物の奥行が大なる場合即ち二次元として取扱ひ得る場合について凝集力無き砂の支持力及び滑り面を求めた。今回は同一の場合に就きて、之に Caquot^{(3),(4)} の方法を組合せて凝集力を有する土の支持力の問題へ擴張する。

本文に於ては前論文の結果を屢々引用するから欄外に示す如く、之等を論文 A 及び論文 B なる略稱を以て呼ぶ事とする。

2. 凝集力ある場合の基本性質

凝集力を有する土の限界釣合の状態に於ては、Caquot, Krymme⁵⁾, Voellmy⁶⁾ 等の著書に示されて居る通り次の如き應力の關係が成立する。

今内部摩擦角を ρ , 粘着力を c とすれば、滑り點に於ける應力を示す Mohr の應力圓は、圖-1a の如く σ 軸上に於て原點 O から左に $h = c \cot \rho$ なる距離に取つた D 點を通り σ 軸と ρ なる角を爲す DT 線に切する。

然して図-1bに示す如き最大主應力 σ_1 と α なる角をなす方向に對して働く直應力 σ_a 及び剪斷應力 τ_a の大きさは應力圓に於ける P 點の横距 $\overline{OP'}$ 及び縱距 $\overline{PP'}$ にて與へられ、之に直角な方向に對する直應力 σ_a' 及び剪斷應力 τ_a は $\overline{OQ'}$ 及び $\overline{QQ'}$ に依つて示される。同様にして滑り面に働く直應力 σ_b 、剪斷應力 τ_b 並びに滑り面に直角な方向に對する直應力 σ_b' は夫々図-1a の $\overline{OT'}$ 、 $\overline{TT'}$ 並びに $\overline{OS'}$ に依つて與へられ同時に滑り面と最大主應力 σ_1 との爲す角 δ は $\angle BAS$ に依つて得られる。然るに図-1a より明かなる如く、

$$\delta = \angle \text{BAS} = \frac{1}{2} \angle \text{BCS} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \rho \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

となり、此結果は凝集力無き場合と同一である。

次に滑り面に於ける剪断應力は圖-1c に示す如く、

となる事は明白であるから、滑り面への合應力が法線となす傾斜角は凝集力なき場合の β より大きい ϕ なるも

* 九州帝國大學教授

(1) 論文 A. 砂地盤の支持力に就て. 本誌第 28 卷第 11 號

—(2) 論文 B. 砂地盤の支持力(續編), 本誌第 29 卷第 5 號

(3) Caquot : Équilibre des Massifs à Frottement Interne

(4) 山口 昇: A. Caquot 氏新

(5) Krynine: Soil Mechanics
(6) Voellmy: Die Bruchsicherheit eingebetteter Rohre, Diskussionsbericht Nr. 108 der Eidg. Materialprüfungs- und Versuchsanstalt für Industrie, Bauwesen und Gewerbe, Juli 1937

圖-1 a. Mohr の 應 力 圖

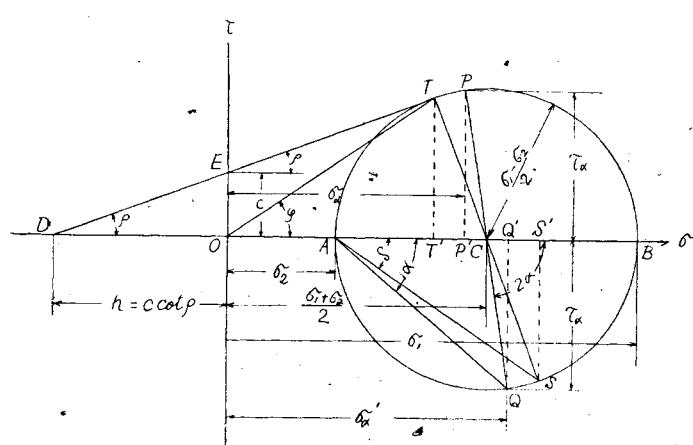


圖-1 b.

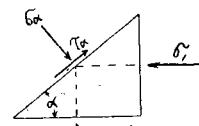
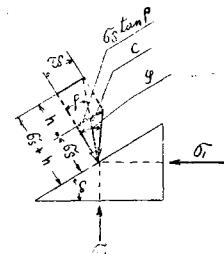


圖-1c



のに増大する。④は図-1aに於ては \angle TOBによりて示される。

主應力 σ_1, σ_2 の間の關係は次の如くにして導き得る。

圖-1a より

$$\frac{\overline{CT}}{\overline{CD}} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)/2}{(\sigma_1 + \sigma_2)/2 + h} = \sin \rho$$

を得る。但し

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{1-\sin\rho}{1+\sin\rho}, & d &= h(1-k) = \frac{2c\cos\rho}{1+\sin\rho}, \\ d' &= h\left(\frac{1}{k}-1\right) = \frac{2c\cos\rho}{1-\sin\rho} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

又滑りの條件は圖-1 a から次の如くなる。

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_a + \sigma_a'}{2}$$

$$\overline{CP}' = \frac{\sigma_a + \sigma_{a'}}{2} - \sigma_a = \frac{\sigma_{a'} - \sigma_a}{2}$$

$$\overline{PP'} = \tau_a$$

$$\bar{CP} = \bar{CT} = \bar{DC} \sin \rho = \frac{\sigma_a + \sigma_a'}{2} \sin \rho + h \sin \rho$$

之等を

$$\overline{CP'}^2 + \overline{PP'}^2 = \overline{CP}^2$$

なる關係に入れる事によつて、

を得る。

3. 支持力理論における一般解法式

以下に於ては前論文と符號を一致せしむる爲に引張應力を正とする。

4. 集力ある場合に於ける Rankine 主働土圧及受働土圧

過載荷重無き場合、深さ y なる點の主働土圧應力は土砂の單位重量を γ とすれば(3)式を參照する事によつて直ちに次の値となる。

又地表上に等布過載荷重 p' がある時の主動土圧應力は、

となる。

次に過載荷重なき場合及び $q = 0$ なる等布過載荷重ある時の受動土圧抵抗力は、夫々次の(8)式及(9)式となる。

以上の式に於て α 及 α' の符號が (3) 式と反對となつて居るのは、引張應力を正に取つた爲である。尙記號についての論文 A 及 B を參照され度い。

之等の場合の土壓力は當然凝集力無き場合のものとは以上の如く相違するが、主應力の方向は變化しないから前述の通り滑り面は變化しない。

b. 過渡領域の境界應力

a) により論文 B 図-1 を参照して凝集力を有する場合の θ_0, θ_n に於ける境界應力は凝集力無き場合のものと單に d 及 d' によるものと變化する事が明かにされた。よつて之等による應力さへ求めて、之を論文 B の境界應力に追加して置けばよい理である。

(6) 及 (7) 式より d による主働土壓力の應力函数を求むれば、

が得られ、之より θ_0 に於ける應力を導けば次の如くなる。

従つて之を論文 B (24) 式に加へれば θ_0 の境界應力として次のものを得る。

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_{\theta_0}] &= \sigma_{\theta_0}^{(p')} + \sigma_{\theta_0}^{(p'')} + \sigma_{\theta_0}^{(a)} + \sigma_{\theta_0}^{(c)} \\ [\tau_{r\theta_0}] &= \tau_{r\theta_0}^{(p')} + \tau_{r\theta_0}^{(p'')} + \tau_{r\theta_0}^{(a)} + \tau_{r\theta_0}^{(c)} \\ [\sigma_{r_0}] &= \sigma_{r_0}^{(p')} + \sigma_{r_0}^{(p'')} + \sigma_{r_0}^{(a)} + \sigma_{r_0}^{(c)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (12)$$

同様にして (8), (9) 式により d' による應力函数は

σ_{n_1} に於ける應力は

$$\sigma_{\theta_n}^{(d)} = -d' \sin^2 \theta_n, \quad \tau_{r\theta_n}^{(d)} = d' \sin \theta_n \cos \theta_n, \quad \sigma_{r_n}^{(d)} = -l' \cos^2 \theta_n \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

となり、之を論文 B (29) 式に加へれば、

が得られ、之が θ_n に於ける境界應力を與へる。

c. 滑りの條件

極座標に於ける滑りの條件は(5)式より

となる。

故に以上の境界条件及び滑りの条件を用ひて論文 B に示せると同様の方法で叢集力ある場合の支持力並びに滑り面を求める理である。併し乍ら論文 B の場合と異なり、此場合には d, d', h 等の項を含んで居るから計算は極めて面倒であつて種々の p, c 及 q に對して一々計算を行ふ事は容易な事では無い。

所が幸にして Caquot は凝集力ある土砂の壓力の全ての問題に應用し得る簡単にして卓抜せる手段を見出している。以下に述べる如く Caquot の方法を用ふる事に依つて、凝集力なき砂の支持力圖表を作製して置きさへすれば直ちに之を凝集力ある場合へ擴張し得るのである。

4. Caquot の支持力理論

Caquot は図-1a の応力圓を基として次の原理を見出した。即ち凝集力ある土砂の限界釣合條件は全ての方向に $h = c \cot \rho$ なる假想の靜水壓を附加した場合の凝集力なき土砂の限界釣合條件と一致すると云ふのである。彼は此原理を土壓理論の各種の場合に應用した。

支持力理論に於ては Reissner の理論を癡集力ある場合に擴張したのである。Reissner の支持力式は論文 B (46) 式に示す通り

にて與へられて居る。凝集力ある場合には全ての方向に h なる假想の静水圧を加へるのであるから、 p' 及 q の各々に夫々 h を加へた $(p'+h)$ と $(q+h)$ の関係が (17) 式と同じ形となる。即ち

$$p' + h = \frac{q+h}{k} e^{\pi \tan \rho}$$

が成立する。之より支持力式として次のものを導いた。

之は勿論土砂自身の重量 γ の影響を無視せるものであるからその適用範囲は Reissner 式の場合と同じである。尙後述の如くんを附加しても滑り面の方向は變化しないから Caquot の滑り面は Reissner の滑り面と全く同一の對数螺旋曲線となるのである。

(18) 式の第 2 項は凝集力による支持力を示す項で、今之を p_c とすれば p_c は次の如く全く別途の方法からも

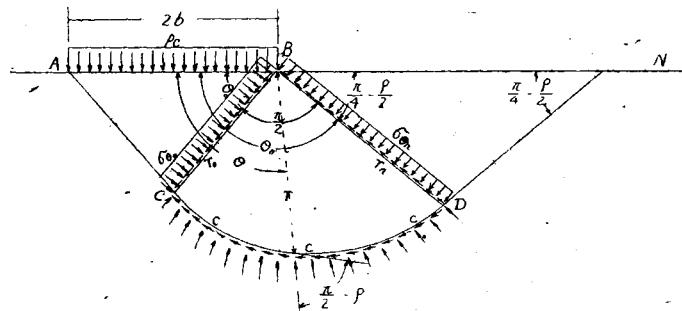
導き得て Caquot の理論の正しき事を明示する事が出来る。

図-2 に於て過渡領域 BCD に働く力の B 點の周りのモーメントの釣合を考へる。先づ \overline{BC} に働く應力の内 B 點の周りにモーメントを生ずるのはその垂直分力 σ_{10} のみである。 τ_{00} は (12) 式に於て γ の項を無視するから (11) 式と論文 B (7) 式とにより、

となり、之によるモーメントは

となる。

圖-2



同様にして \overline{BD} に働く垂直応力 σ_{en} は (15) 式に於て $q=0$ と置けば、(14) 式により次の如く導かれる。

之によるモーメントは

となる。但し σ_{θ_0} , $\sigma_{\theta n}$ は引張應力を正とするから図-2 と反對の方向が正となる。

次に滑り面 \overline{CD} に働く應力は下方より作用する反力と滑り面に沿ふ凝集力 c であるが、此場合反力は全て B を通る放射線上に作用するから B 點の周りにモーメントを生じない。残りの c に依るモーメントは滑り面に沿ふ長さを s で表はせば次の如くなる。

$$M_c = c \cos \rho \int_{\theta_0}^{\theta_n} r ds$$

然るに

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

であり、論文 B (51) 式により

$$r = \kappa e^{c_1 \theta} = r_0 e^{\tan \rho x_1 (\theta - \theta_0)}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = c_1 r$$

であるから、

$$\int_{\theta_0}^{\theta_n} r ds = \int_{\theta_0}^{\theta_n} \sqrt{1 + c_1^2} r^2 d\theta = \frac{\sqrt{1 + c_1^2}}{2c_1} (r_n^2 - r_0^2)$$

となり、

$$c_1 = \tan \rho, \quad \frac{\sqrt{1+c_1^2}}{2c_1} = \frac{\sec \rho}{2 \tan \rho} = \frac{1}{2 \sin \rho},$$

$$rn = r_0 e^{(\pi/2) \tan \rho}$$

を入れれば M_c は次の如くなる。

$$M_c = c \cos \rho \frac{r_0^2}{2 \sin \rho} (e^{\pi \tan \rho} - 1) = h \frac{r_0^2}{2} (e^{\pi \tan \rho} - 1) \dots \dots \dots \dots \dots \quad (23)$$

モーメントの符号を考へに入れてその釣合式を記せば、

$$M_{e_0} + M_C - M_{e_n} = 0$$

を得る。之に (20), (22), (23) 式を用ふれば次のものが得られる。

$$-p_c(\cos^2 \theta_0 + k \sin^2 \theta_0) + h(1-k) \sin^2 \theta_0 + h(e^\pi \tan \rho - 1) + h\left(\frac{1}{k} - 1\right) \sin^2 \theta_0 e^\pi \tan \rho = 0$$

然るに $\theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{P}{2}$ であるから、

$$\tan^2 \theta_0 = \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} = \frac{1}{k},$$

$$\sin^2 \theta_0 = \frac{1}{1+k}, \quad \cos^2 \theta_0 = \frac{k}{1+k},$$

$$\sin^2 \theta_n = \sin^2 \left(\theta_0 + \frac{\pi}{2} \right) = \cos^2 \theta_0 = \frac{k}{1+k}$$

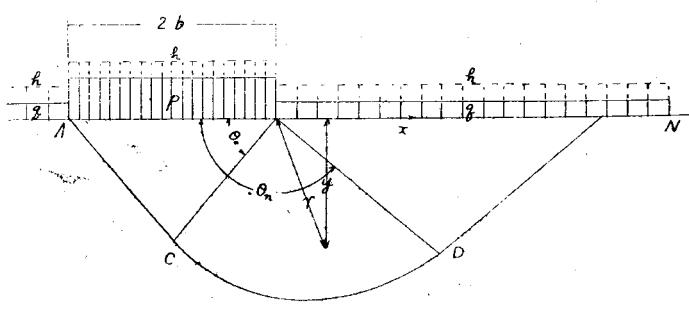
である。之等を以上のモーメント釣合式に代入すれば凝集力のみによる支持力 r_c は、

となり Caquot の支持力式 (18) の第 2 項と一致する。

5. 本論への Caquot 理論の應用

圖-3 の如く實荷重 p 及 q の外に地表面に假想の r なる等布荷重を一様に加へたと考へる。此事は全領域に

圖-3



なる應力函数を加へて考へればよい事になる。之に依る直應力は全區域全ての方向に -1 となり、剪斷應力は全ての方向に零となる事は明かである。

よつて一般に任意の點の實際の直應力を σ , 剪斷應力を τ とし, ν を加へた場合の夫等を夫々 $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$ を以て表はせば,

となり、此 $\bar{\sigma}$ 及 $\bar{\tau}$ について凝集力無き場合の釣合條件及び滑りの條件を適用する事が出来る。

此方法によつて \overline{BC} 線上の應力求めて見れば次の如くなる。先づ

$$\left. \begin{aligned} [\bar{\sigma}_{\theta_0}] &= [\sigma_{\theta_0}] - h = \sigma_{\theta_0}(a) + \sigma_{\theta_0}(p'') + \sigma_{\theta_0}(p'+h) \\ &= \sigma_{\theta_0}(a) + \sigma_{\theta_0}(p'') - (p'+h)(\cos^2 \theta_0 + k \sin^2 \theta_0) \\ &= \sigma_{\theta_0}(a) + \sigma_{\theta_0}(p'') + \sigma_{\theta_0}(p') - h(\cos^2 \theta_0 + k \sin^2 \theta_0) \\ [\tau r_{\theta_0}] &= [\tau r_{\theta_0}] = \tau r_{\theta_0}(a) + \tau r_{\theta_0}(p'') + \tau r_{\theta_0}(p') + h(1-k)\sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ [\bar{\sigma}_r] &= [\sigma_r] - h = \sigma_r(a) + \sigma_r(p'') + \sigma_r(p') - h(\sin^2 \theta_0 + k \cos^2 \theta_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \quad (27)$$

但し右肩に $(p' + h)$ を附した應力は論文 B (7) 式の p' の代りに $(p' + h)$ を用ふる事を示す。(27) 式より

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_{\theta_0}] &= [\bar{\sigma}_{\theta_0}] + h = \sigma_{\theta_0}^{(a)} + \sigma_{\theta_0}^{(p')} + \sigma_{\theta_0}^{(p'')} + h(1-k) \sin^2 \theta_0 \\ [\tau_{r\theta_0}] &= [\bar{\tau}_{r\theta_0}] = \tau_{r\theta_0}^{(a)} + \tau_{r\theta_0}^{(p')} + \tau_{r\theta_0}^{(p'')} - h(1-k) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ [\sigma_{\cdot 0}] &= [\bar{\sigma}_{\cdot 0}] + h = \sigma_{\tau_0}^{(a)} + \sigma_{\tau_0}^{(p')} + \sigma_{\tau_0}^{(p'')} + h(1-k) \cos^2 \theta_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \quad (28)$$

が導かれ、此結果は (12) 式と一致する。

同様にして \overline{BD} 線上の應力は、

$$\left. \begin{aligned} [\bar{\sigma}_{\theta n}] &= [\sigma_{\theta n}] - h = \sigma_{\theta n}^{(b)} + \sigma_{\theta n}^{(q+h)} = \sigma_{\theta n}^{(b)} + \sigma_{\theta n}^{(q)} - h \left(\cos^2 \theta_n + \frac{1}{k} \sin^2 \theta_n \right) \\ [\bar{\tau}_{r\theta n}] &= [\tau_{r\theta n}] = \tau_{r\theta n}^{(b)} + \tau_{r\theta n}^{(q)} - h \left(1 - \frac{1}{k} \right) \sin \theta_n \cos \theta_n \\ [\bar{\sigma}_{rn}] &= [\sigma_{rn}] - h = \sigma_{rn}^{(b)} + \sigma_{rn}^{(q)} - h \left(\sin^2 \theta_n + \frac{1}{k} \cos^2 \theta_n \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (29)$$

故に

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_{\theta n}] &= [\bar{\sigma}_{\theta n}] + h = \sigma_{\theta n}^{(b)} + \sigma_{\theta n}^{(q)} + h \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sin^2 \theta_n \\ [\tau_{r\theta n}] &= [\bar{\tau}_{r\theta n}] = \tau_{r\theta n}^{(b)} + \tau_{r\theta n}^{(q)} - h \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sin \theta_n \cos \theta_n \\ [\sigma_{rn}] &= [\bar{\sigma}_{rn}] + h = \sigma_{rn}^{(b)} + \sigma_{rn}^{(q)} + h \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cos^2 \theta_n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (30)$$

となり (15) 式と一致する。

次に滑りの条件は図-1c に於て垂直応力 σ と剪断応力 τ との合応力と滑り面の法線とのなす角が ρ になら、 σ, τ を用いた滑りの条件式が凝集力無き場合の滑りの条件式と同一形となる事は明白であるが、此結果は(16)式からも直ちに導き得る。即ち

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r, \quad \tau_{r\theta} = \bar{\tau}_{r\theta}, \quad \sigma_\theta + \sigma_r - 2h = \bar{\sigma}_\theta + \bar{\sigma}_r$$

であるから之等を (16) 式に入れよば、

が得られ、之は凝集力無き場合の式即ち論文 B の(36)式と同一形である。

以上の境界応力式及滑り条件式より見れば、 $(p+h)$ 及 $(q+h)$ を荷重と見做す事によつて $\bar{\sigma}_\theta$, $\bar{\tau}_{\theta\theta}$, $\bar{\sigma}_r$ は凝集力なき場合の方法で求め得る事が分る。然る時は實應力 σ_θ , $\tau_{\theta\theta}$, σ_r は次式により求められるのである。

同様に實際の主應力の絶對値も、 μ を附加せる場合のものよりは μ 丈小さくなるが、その方向は變化しないから從つて滑り面も變化しない事になる。

次に支持力 p を求むるには次の如き方法を取ればよい。今

と置けば、凝集力無き場合の支持力圖表に於て $(q+h)$ を過載荷重と見做す事によつて之に對應する $(p+h)$ の値が見出される。故に

によって p が得られるのである。

6. 計 算 例

図-4 に於て構造物 P の基礎幅を $2b$ 、根入深を t とし、土砂の単位重量 $\gamma = 1.6 \text{ t/m}^3$ とする。

i. $\rho = 10^{\circ}$, $c = 2 \text{ t/m}^2$, $b = 2 \text{ m}$ の場合

$$h = c \cot \rho = 11.34 \text{ t/m}^2, \quad b\gamma = 2 \times 1.6 = 3.2 \text{ t/m}^2$$

図-5 は $\rho = 10^\circ$ に対する支持力圖表を示す。此圖表を使用して色々の t に対する支持力 p を求める。

$t=0$ に対しては $q=0$,

$$\therefore \frac{q+h}{b\gamma} = \frac{11.34}{3.2} = 3.54$$

さて圖表から

$$\frac{p+h}{b\gamma} = 10.08$$

$$p = 10.08 \text{ by } h = 20.91 \text{ t/m}^2$$

$$t=2 \text{ m} \text{ に対しては, } q = t\gamma = 2 \times 1.6 = 3.2 \text{ t/m}^2$$

$$\frac{q+h}{b\gamma} = \frac{3.2+11.34}{3.2} = 4.54$$

$$\frac{p+h}{b\gamma} = 12.49$$

$$p = 12.49 \text{ by } h = 28.63 \text{ t/m}^2$$

$$= 5 \text{ m}, \quad q = 8.0 \text{ t/m}^3$$

$$\frac{q+h}{b\gamma} = 6.04 \quad \frac{p+h}{b\gamma} = 16.28$$

$$p = 16,28 \text{ by } h = 40,76 \text{ t/m}^3$$

$$\rho = 10^\circ, \quad c = 2 \text{ t/m}^2, \quad b = 3 \text{ m}$$

$$h = 11.34 \text{ t/m}^2, \quad by = 3 \times 1.6 = 4.8 \text{ t/m}^2$$

$=0$ に對しては

圖-4

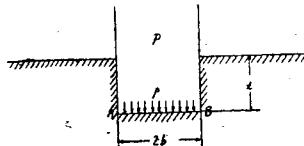
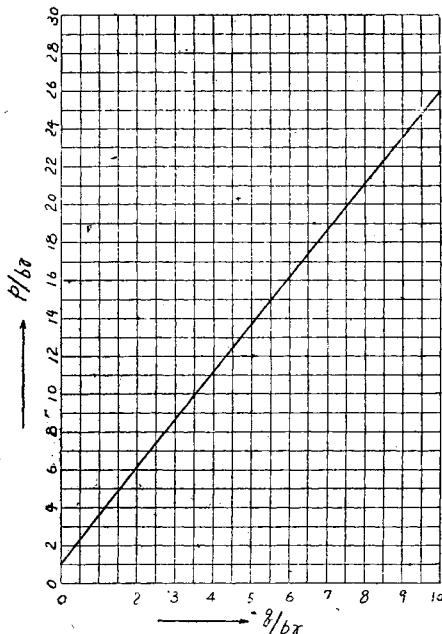


圖-5.



$$\frac{q+h}{b\gamma} = 2.36, \quad \frac{p+h}{b\gamma} = 7.12$$

$$p = 7.12 b\gamma - h = 22.84 \text{ t/m}^2$$

$t = 5 \text{ m}$

$$\frac{q+h}{b\gamma} = 4.02, \quad \frac{p+h}{b\gamma} = 11.20, \quad p = 42.42 \text{ t/m}^2$$

iii. $\rho = 30^\circ, c = 0, b = 2 \text{ m}, b\gamma = 3.2 \text{ t/m}^2$

論文 B 圖-6 を用ひて、

$t = 0$ に對しては

$$q/b\gamma = 0, p/b\gamma = 18.2, p = 18.2 b\gamma = 58.26 \text{ t/m}^2$$

$t = 5 \text{ m}$

$$q/b\gamma = 2.5, p/b\gamma = 73.5, p = 73.5 b\gamma = 235.2 \text{ t/m}^2$$

(昭. 18. 10. 14. 受付)