構造力學の原理を應用せる線型二階微分方程式 $\ddot{y}+\rho(x)y=0$ の解表示器に就て

正會員　工學博士　安　宅　勝*

内容梗概　線型2階微分方程式 $\ddot{y}+\rho(x)y=0$, さらに一般的には $\ddot{y}+f_1(x)\dot{y}+f_2(x)y=0$ の解を構造力學の原理に基き簡單なる機械にて表示する方法を示し, 挫屈理論, 振動論其他の研究に資せんとするものである。

1. 概　　説

構造力學の原理に基いて著者が考案した簡單な機械によつて微分方程式

$$\ddot{y}+\rho(x)y=0 \cdots\cdots(1)$$

又は一般に

$$\ddot{y}+f_1(x)\dot{y}+f_2(x)y=0 \cdots\cdots(2)$$

の解を表示する方法を示し併せてその應用を論ぜんとするのである。(2) 式の形は變換によつて[1] (1) 式の形に歸せしめ得る故に (1) 式の形のみを論ずることにする。

この形の微分方程式は理學及び工學の全般に渉つて應用の範圍が頗る廣くその特殊な形に對しては Bessel, Legendre 其他の名稱を冠して利用さるゝことは人の知る通りである。又構造力學に於ては挫屈理論, 振動論等に頻々應用される。然しかゝる形の微分方程式の解を解析的に求めることは多くは多大の困難を伴ひ, 理論上の究極の目的たる解に含まるゝ媒介變數の相互の關係を求めることは容易でなく, たとへ數値解法に依るとしても非常な勞力を要し多くはその煩に堪えない。たとへば

$$\ddot{y}+(a+b\cos x)y=0 \cdots\cdots(3)$$

の如く[2]一見容易なる如く見えて解に含まるゝ媒介變數 a, b 間の關係を求めるのは容易なことではない。此等の微分方程式の解がたとへ概略でも判れば研究上の便益は頗る大なるものがあると信ずる。猶この種の微分解析器は最近電氣的又は機械的に解を表示するものが種々考案されてゐる[3]。就中 Bush の考案した differential analyzer と稱するものはその利用の範圍も廣く優秀なるものだそうで現に航空研究所にも 1 臺備付けてあるそうである。この器械は原理は頗る簡單ではあるが附隨裝置に精密な工作を要する上, 機構全體が頗る尨大となり例へば 24 吋×17 吋程度の盤上に解を描かすために一室全體に渉る樣な設備を要し, その上熟練した數名の助手を必要とし機械の價格も頗る高價である。又電氣的の演算器は時局柄入手困難な計器及記錄裝置を要する上に機器の性能に基く誤差の介入する恐れがあり, その用途も多くは微分方程式の特殊な形に限られて居る。著者の考案は稍ゝ原始的な嫌ひが無いでもないが裝置が頗る簡單な點と取り扱ひに技術を要せぬ點が特徴ではないかと思ふ。

---

* 京城帝大教授

1) $y=e^{-\frac{1}{2}\int f_1(x)dx}\cdot v$ とをけば (1) 式は $\ddot{v}+\rho(x)v=0$ となる。

但し　$\rho(x)=f_2(x)-\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}[f_1(x)]-\dfrac{1}{4}f_1^2(x)$

2) Mathieu の微分方程式と稱す

3) 電氣試驗所調查報告第 120 號　昭. 15～11.・・・・「電氣演算器」文獻多數を採錄す

特に固有値に關聯した問題即ち $x=0, y=0, x=l, y=0$ の如き端條件に適合する解を求める場合に於ては迅速簡便に答解を與へる筈である。然し畢竟ずるに機構の原理とする階差に基く誤差は免れ得ない。

本篇に論ずる方法は微分方程式の解を階差的見地よりして近似的に表示せんとするのであるから，構造力學に於て利用さるゝ階差方程式には文字通り適合する。又微分方程式の右邊が 0 でない場合にも適用し得るのである。

2. 機構の原理並にその構造

機構の原理は $\ddot{y}+\rho(x)y=0$ の解を絲の撓みを以て表示するにある。よく知られて居る通り絲に垂直荷重 $p=f(x,y)$ が作用するとき

$$H\frac{d^2y}{dx^2}=-p \qquad (4)$$

又任意の一點に於る絲の張力 T は

$$T=H\sec\varphi \qquad (5)$$

圖-1.

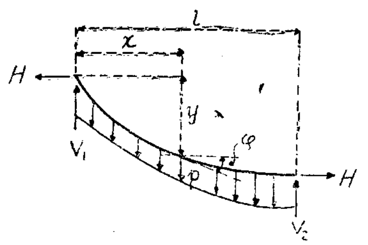
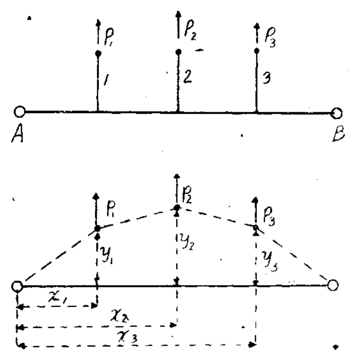


圖-2.



今荷重 p を $p=\rho(x)y$ なる如くに變化せしむれば絲の撓みは微分方程式の解を與へる筈である。

今ゴム絲を AB 間に張り之と直交して伸びざる絲 1, 2, 3, 4 を置きこの絲に $p=\rho(x)y$ なる如き荷重を與へればよい。點 1, 2, 3 等に對し，その變位 y に比例する荷重を與へるには次の二つの方法が考へられる。

一法としては滑車を幾組か並べ之に伸びざる絲を圍繞せしめ，その一端 a は滑車に固定し他端 b は張つたゴム絲に結ぶ。又滑車の c 點には錘 P を垂下する。c 點の位置は $r_0f(x)$ の如く微分方程式に應じて變化せしめる。滑車が廻轉すれば b 點は $y=r\theta$ だけ移動し，廻轉角 θ が餘り大でないときは

b 點に作用する力は

$$Q\fallingdotseq P\cdot\frac{r_0f(x)}{r^2}y \qquad (6)$$

となる。

P の作用點を一定にし錘 P を變化させてもよいのだが荷重變化の操作が面倒である。角が大になつた場合は c 點の位置を變へて (6) 式を滿足する如く補正する。

第 1 法は變位 y が大になると誤差が大となるから錘の垂下點 c を加減して補正せねばならぬ。この不便を除くためには第 2 法が考へられる。棒は A を軸として廻轉し $AD=r_0f(x)$ なる點に錘 P を吊る。伸びざる絲は

摩擦なき點 B を介して一端は棒に他端はゴム絲に連結して居る。長 $\overline{\mathrm{CB}}=y$ となる。今 B 點に摩擦なきときは

$$Q=\frac{Pi_0}{h} \quad \cdots\cdots(7)$$

但し h, i 垂線長

又 $hy=ir$ にして $i=y_0\times\frac{r}{r_0f(x)}$ なる故

$$Q=\frac{Pr_0f(x)}{r^2}y \quad \cdots\cdots(8)$$

圖-3.

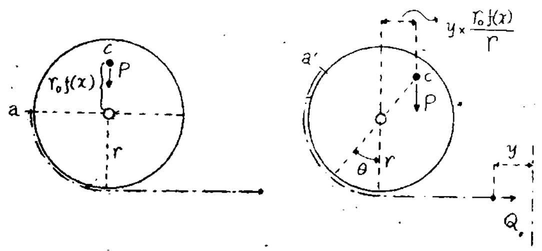
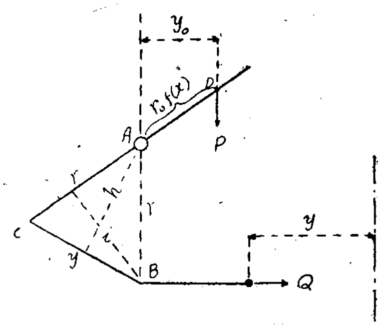


圖-4.



即ち Q は y に比例する。

滑點 B は構造上豫め設けることが困難であるから圖-20 a の如く假の滑點により一應の變形をなさしめ後に滑點 B を設けて正しい位置に直す。詳しくは本篇の終りを參照され度し。

ゴム絲の張り方は特に注意を要する。これは本考案の重要な 1 項目である。圖-5 に於て AB 間にゴム絲を張る際にこれに勝手な張力 H を與へたのでは滑車の廻轉に伴ひゴム絲は圖-5 の如き變形をなす故不都合である。ゴム絲は $H=EA$ 即ち[4] **ゴム糸をその長さの倍だけ引き張る**のである。かくすれば b 點は垂線上を移動し圖-6 の如き變形をなし水平反力 H は變らず，ゴム絲の應力はたとへば

$$T_1=H+\frac{\Delta s}{s}EA=EA\left(1+\frac{\Delta s}{s}\right)=H\sec\varphi_1, \qquad \text{同様に}\quad T_2=H\sec\varphi_2 \text{ の如くになり}$$

$H\frac{d^2y}{dx^2}=-p$ なる狀態を現出する。この事實は模型飛行機用ゴム絲にて簡單に確めることが出來る。斷面 1 mm

圖-5.

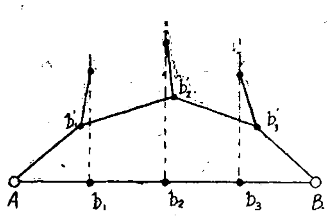
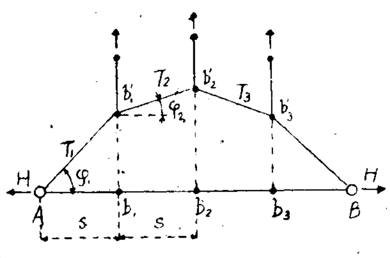


圖-6.



角位のゴムにて EA に相當する應力は 100 gr 程度のものである。ゴムの伸長は破斷の間際まで殆ど彈性的で長さの 5〜6 倍の伸長に耐える。猶ゴムの疲勞を防ぐ意味で，使用せぬときはこれを取り外して置いた方がよいで

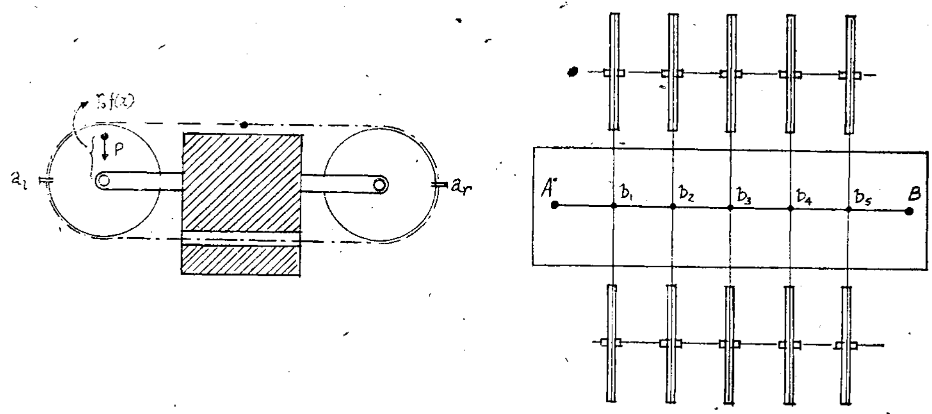
4) ゴムの彈性率 E, 斷面積 A

あらう。

3. 第1案に基く機構

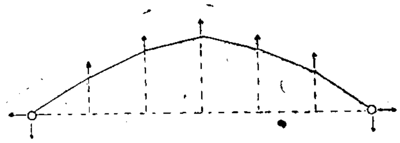
臺④の兩側に等間隔に滑車を幾組か並べ伸びない絲で捲き，これを a_l, a_r 點にて滑車に，b. 點にてゴム絲に結ぶ。錘 P の垂下點は滑車毎に變化せしめる。錘は臺の兩側の滑車に吊るせば作用が倍になる。今 P がゴムに豫

圖-7.



め與へた引張 H によりて定る或る特定値以下なるときはゴム絲は圖-7 の如き位置にて平衡を保つ。格點 $b_1, \cdots, b_4$ 等が移動し初める錘の量 P によりて柱の場合ならば挫屈荷重の關係を，振動の問題ならばその週期を定めることが出來る。

圖-7 a.



所謂固有値 (Eigenwert) を求める問題となる。この場合にゴム絲は中立 (Labil) の平衡狀態となり撓みの形は定るがその大さは定らない。卽ち $y=C\varphi(x)$, $x=0$, $y=0$, $x=l$, $y=0$ の如き形を取る。錘 P の値が上記の限界値以下なるときはゴム絲の兩端を移動せしめぬ限り，撓みは生じない。今 A; B 點を移動せしめ $x=0$, $y=a$, $x=l$, $y=b$ なる端條件を與へると圖-8 の如く微分方程式の解を表示する筈である。之に反し錘の重さ P が上述の特定値以上の場合には不安定な狀態となるためにたとへば解として豫想せらる λ 形 ($x=0$, $y=0$, $x=l$, $y=b$ に對應す)，圖-9 の如きものを單に B 點の移動のみによつて一度に求めることは困難である。勿論圖の撓みは平衡狀態ではあるが極めて不安定な位置であつて，その變形が圖-8 の場合の如く位置の恢復力を持たぬ[5]ことが理論的に考へ得るからである。この場合には初期條件を與へて A, B 間を 2 回に分けて表示すればよい。先づ零點の位置 λ を定めるために滑車を正位置卽ち錘が直上の狀態に全部固定し

圖-8.

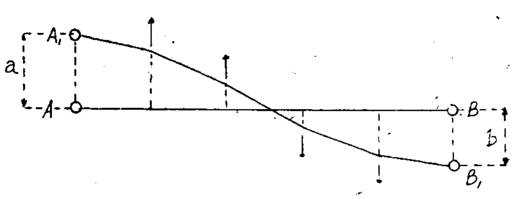
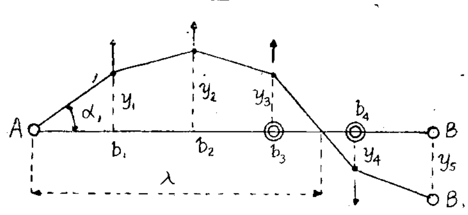


圖-9.



5)　平衡位置より僅かづれても元に戻らぬ

圖-10.

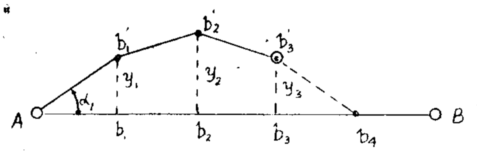


圖-11.

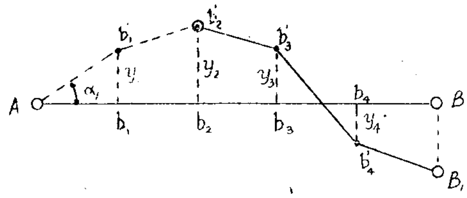


圖-12 a.

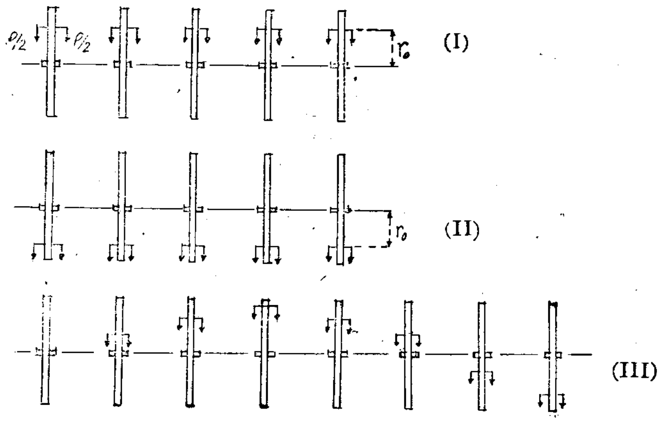


圖-12 b.

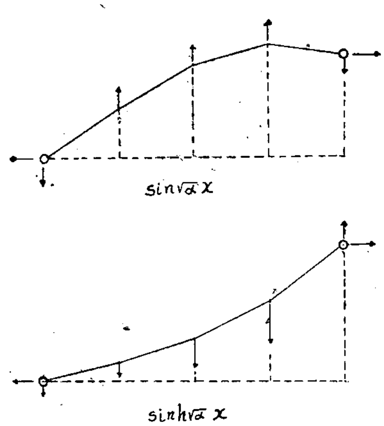
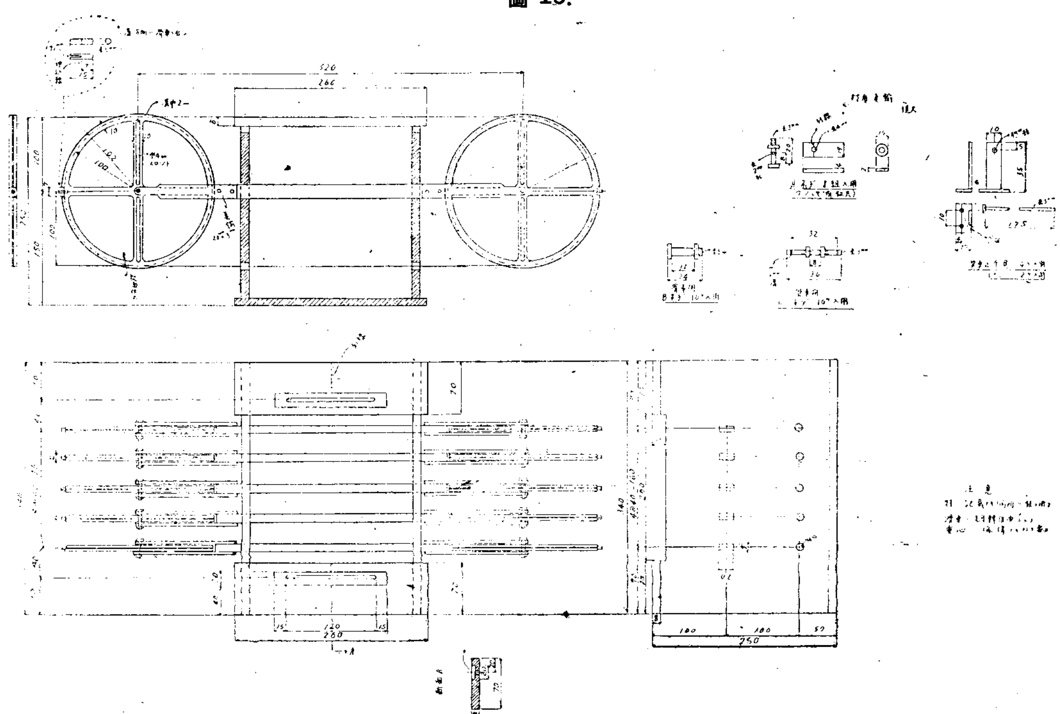


圖-13.



b_1, b_2, b_3 と順次に緩めて行くと現在の場合に於ては b_3 までは絲は撓まず b_4 に至つて不平衡狀態に達する筈である。

この場合には 3 格間を取り b_1, b_2 を緩め b_3 の位置を加減して $(\dot{y})_{x=0}=\tan\alpha_1$ となる様に b_3' を定めて固定すればこの區間の解を得る。次に b_2' を固定し b_3, b_4 を弛め B を移動して b_3' の移動を y_3 に一致せしむれば次の區間の解を得る。

猶錘の垂下點に就て一言すれば

圖-12 (I) の場合は $\ddot{y}+\alpha y=0$ に相當し

圖-12 (II) の場合は $\ddot{y}-\alpha y=0$ に當る。

$\ddot{y}+\alpha\sin xy=0$ の如き場合は圖-12 (III) の如くになる。

第 1 案によつて著者が設計した機械は圖-13 の如くである。圖-13 に於て上面の空間には板を張り方眼紙を張り付ける。錘は試驗管に液體又は散彈の類を入れて滑車より吊り下げる。固有値に關する操作に於ては前述の滑車を順次緩めて行く方法によるか，滑車を全部弛めてをいて一齊に試驗管に液體の類を注入する方法とが考へられる。

4. 機械の調整並に補正

滑車は錘を取り去つたときその重心が回轉軸に一致せねばならぬ。この目的のために滑車中の所要の位置に補助錘を附加する必要もあらう[6]。滑車の軸の摩擦の影響を除くには錘を除いてゴム絲の兩端を移動せしめた際にゴム絲が常に一直線となる様に滑車に錘 R_1 を附加すればよい。

今滑車の重量を W，錘の重量を P，軸の徑を d，摩擦係數を f とせば

$$(R_1+R_2)r=(W+P+R_1+R_2)f\frac{d}{2}$$

卽ち

$$R_1+R_2=\frac{W+P}{r-f\cdot d/2} \qquad \cdots\cdots(9)$$

圖-14.

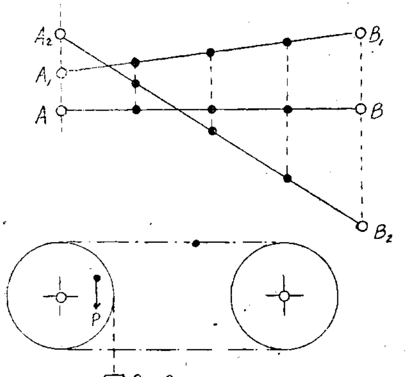


圖-15.

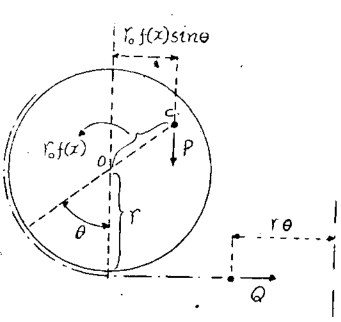
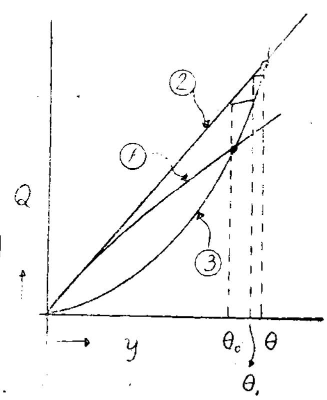


圖-16.



6) 槓杆式に於ては廻轉軸に補正用の小滑車を取り付ける。

滑車の回轉角が大になると絲の引張りは變位 y に比例しなくなるから之を修整せねばならぬ。即ち滑車の垂下點を $r_0f(x)$ の如く定めて一應の平衡 θ_0 位置を觀測したならば

$$(\mathrm{OC})_1=r_0f(x)\cdot\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$$

に變える。θ_0 は必然的に θ_1 に變るから次に

$$(\mathrm{OC})_2=r_0f(x)\frac{\sin\theta_1}{\theta_1}\qquad とする。$$

この操作を繰り返せば圖-16 の如き經過によつて補正が終了する筈である。圖中①は c 點の補正をせぬときの Q の變化 ②は Q が y に比例した場合又ゴム絲の格點に於る恢復力を③の如く考へた場合である。

5. 機械の要素 P, H と微分方程式との關係

附加すべき錘の重量 P, ゴムに與える張力 H と微分方程式 $\ddot{y}+\rho(x)y=0$ との關係を求めてみよう。

今原式を $x=\xi l$ と置いて次の形に變形する。

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\alpha f(\xi)y=0 \quad\cdots\cdots(10)$$

但し α は媒介變數である。

今 $\xi=0\sim1$ 間を n 等分し上式を近似的に階差の關係で表はすと

$$y_{m-1}-2y_m+y_{m+1}=-\frac{\alpha}{n^2}f\left(\frac{m}{n}\right)y_m \quad\cdots\cdots(11)$$

又ゴム絲の平衡條件より（3 參照）

$$\frac{H}{l/n}(y_{m-1}-2y_m+y_{m+1})=Q_m=-\frac{Pr_0f(m/n)y_m}{r^2}$$

即ち

$$y_{m-1}-2y_m+y_{m+1}=-\frac{P}{H}\cdot\frac{l}{n}\frac{r_0}{r^2}f(m/n)y_m \quad\cdots\cdots(12)$$

(11) 式と (12) 式を比較して

圖-17.

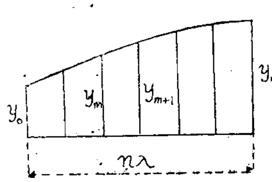
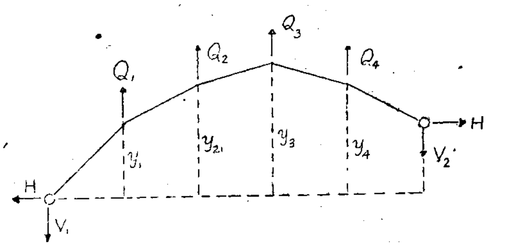


圖-18.



$$\alpha=\frac{P}{H}\cdot nl\cdot\frac{r_0}{r^2} \quad\cdots\cdots(13)$$

茲に　P: 滑車に附すべき錘の重量　H: ゴム絲に與へる引張り

l: 積分區間の長さ　n: 等 分 數

r: 滑車の半徑　r_0: 錘の位置變化の便宜上定める値

6. Homogeneous でない場合又は特殊の非線型なる場合の解

Non-homogeneous なる場合卽ち $\ddot{y}+\rho_1(x)y=\rho_2(x)$ に於ては滑車式を利用するならば各滑車互に $\rho_2(x)$ に相當して變化する錘を垂下すればよい。非線型なる場合には例へば

$$\ddot{y}+\alpha y=\beta f(y)$$

の如き形にして先づ y を假定し上述の操作を繰り返し所謂逐次近似の方法が取れる筈である。錘の位置を補正せぬとき垂下位置一定なる場合には滑車式に於ては嚴密には

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha\sin y=0$$

卽ち振子の振動の微分方程式となる。

圖-19.

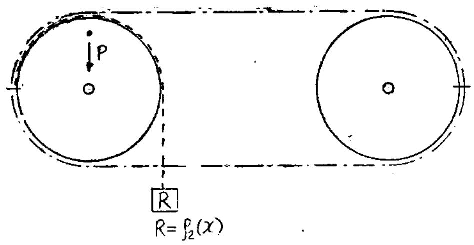


圖-20 a.

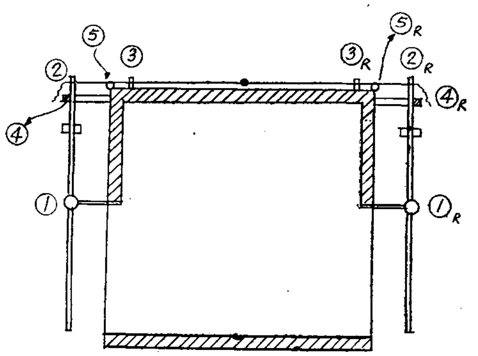


圖-20 b.

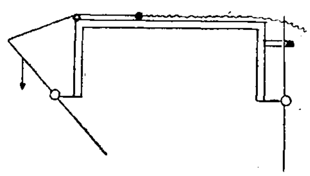
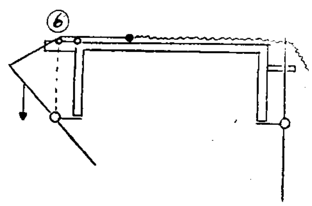


圖-20 c,



7. 第 2 案に基づく機構

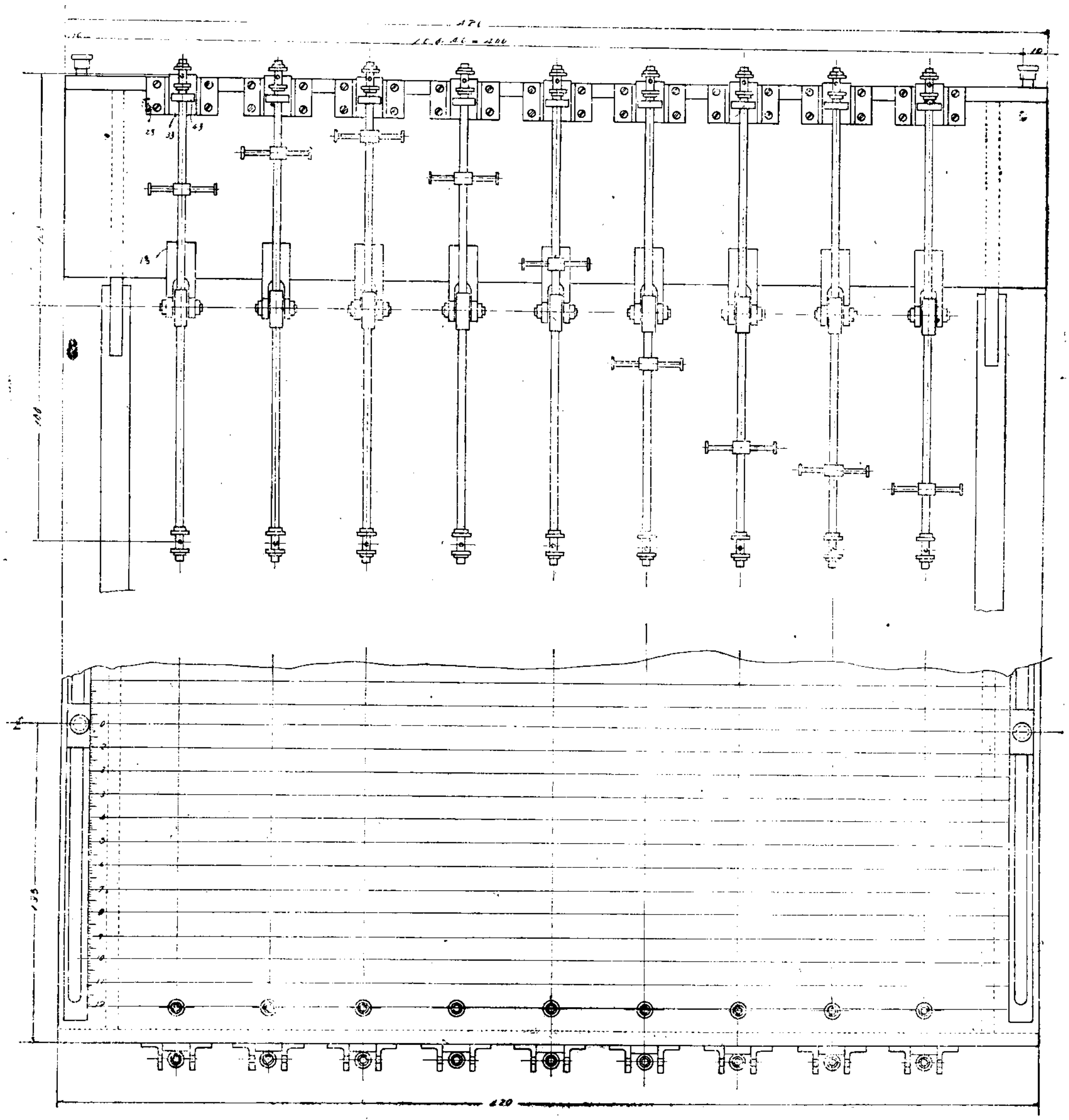
左右の棒に錘を吊る。棒は外側にのみ傾斜せしめる。②③, ②R③R は絲の止め, ④, ④R は棒のフレ止めである。⑤, ⑤R は假の絲の滑點である。

今棒を左方へ傾斜せしむるには④を除去し③, ③R, ②Rを弛める。

以下これに準ずる。

槓杆式による設計は圖-21 a, b, c に示す。猶棒が圖-20 c の如く傾斜した後滑點⑥を設けて正しい位置に置く。

圖-21 a.



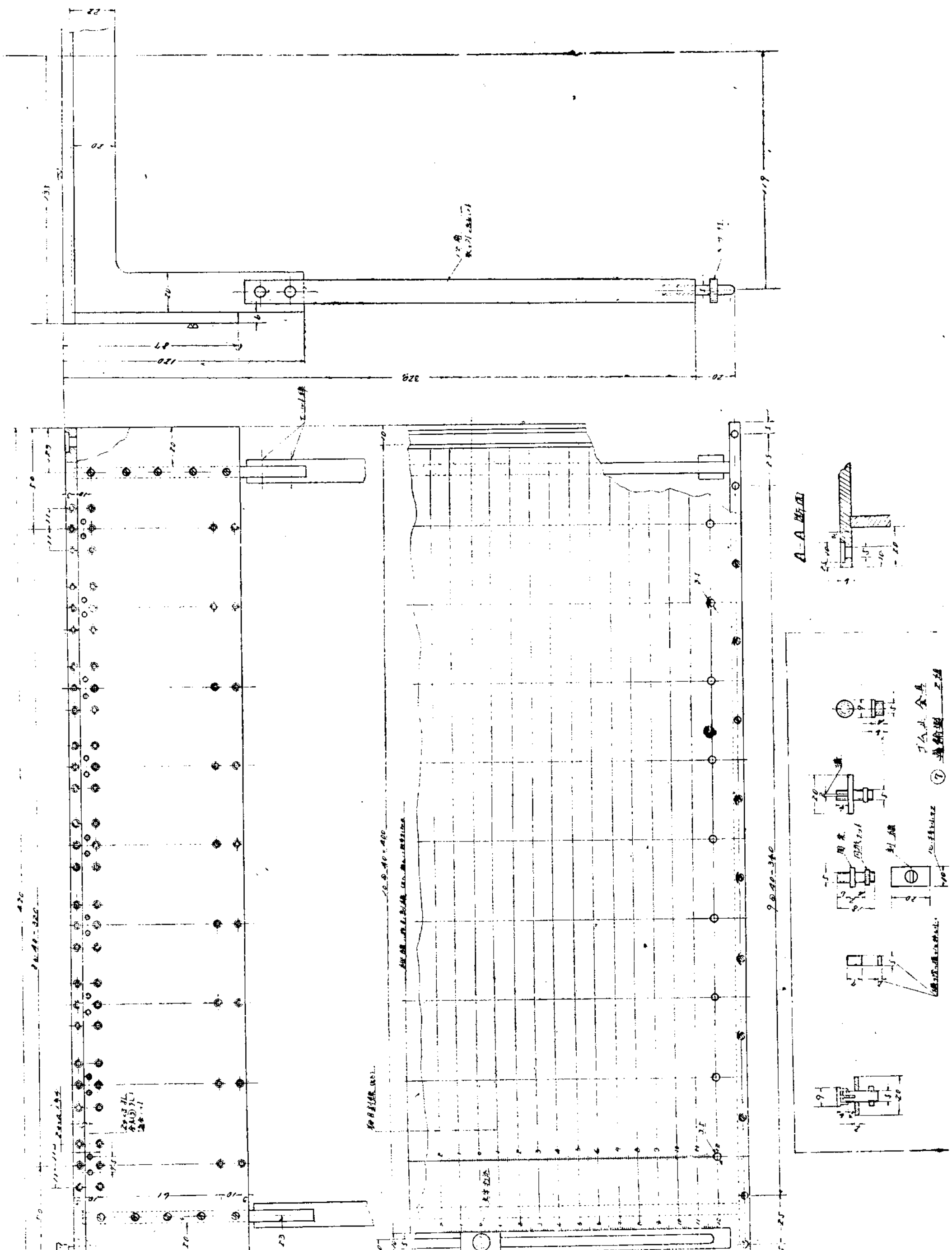
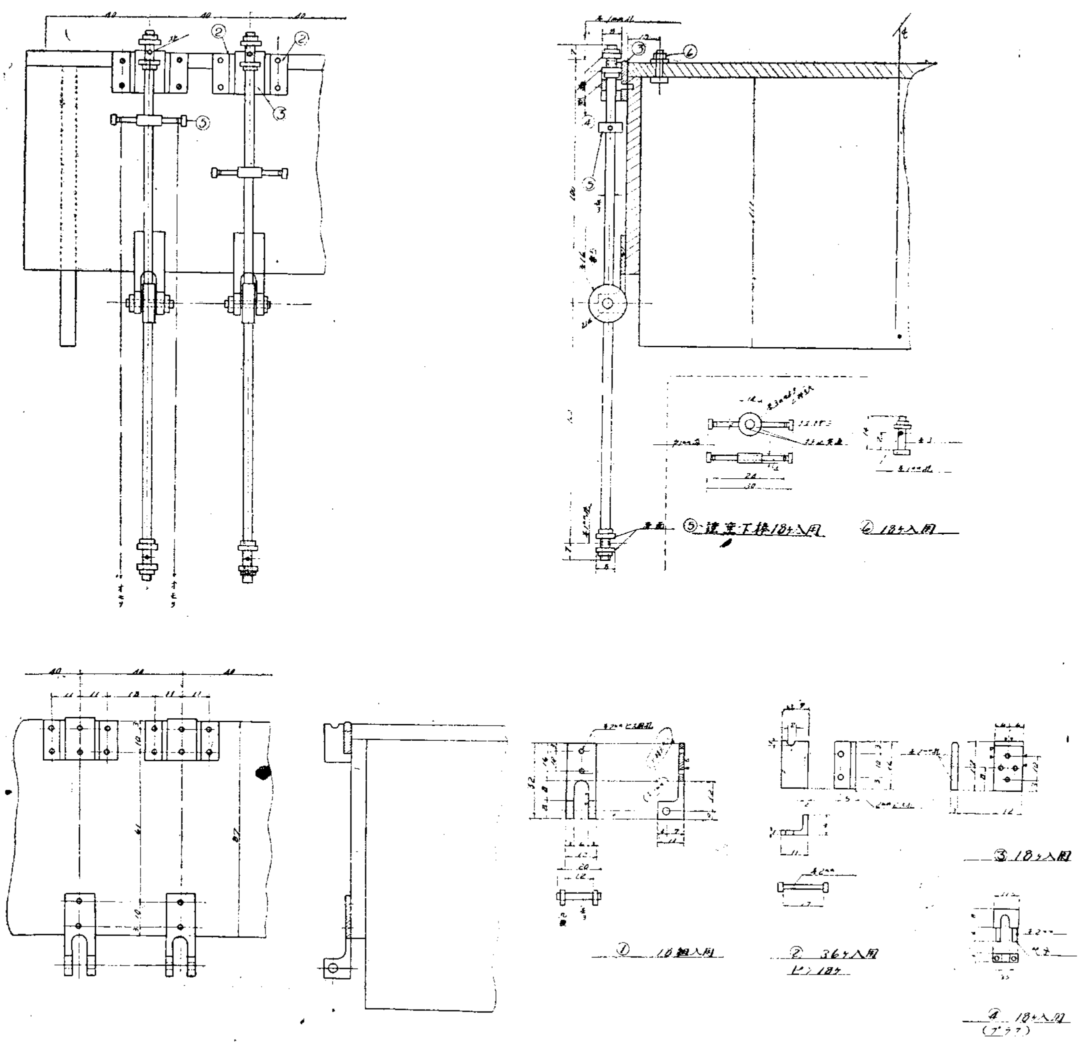


圖-21 b.

圖-21 c.



8. 結　び

滑車式と槓杆式とを比較すれば能力から云へば槓杆式の方が優れて居る。即ち槓杆式に於てはその回轉角による誤差の補正を必要としないばかりでなく滑車は 1/4 回轉しか利用出來ないのに反し槓杆は 1/2 回轉まで利用出來る。例へば半徑 10 cm の機器に於て滑車式は約 15 cm，槓杆式は 30 cm までの變位を記錄し得る。著者は現在 2 種類の型式に從つて機械を試作中であるが製作並に材料の便宜に乏しい土地柄もあり完成の見込がはつきりしないので取り敢ず考案のみを發表する次第である。

（昭. 18. 10. 19. 受付）