

資 料

水流の概況並に不等速定流に於ける 種々なる水面曲線の種類及其の特性(其の一)

正 會 員 元 村 隆 吉*

(要 旨) 主に最近米國で發行された Bakhmeteff 著 "Hydraulics of open Channels" を参照して不等速定流に関する種々なる現象を充分説明するに足る水理をかなり詳細に且つ成可く平易に述べたものであつて、其の説明の體系は從來本邦で發行された参考書とは多少趣を異にして居る様であるが、後者に於て餘り見受けることの出来ない所を巧に詳細に而も平易に記述して居る所に特色がある様である。主旨は最初不等速流に関する水理のみに止めんとしたのであるが、説明の便宜上等速流或は水流の概況より略述し始めたのである。

目 次

[I] 緒 言	8 水流の比エネルギー
[II] 水流の概況	9 限界水深
1 等速定流	10 不等速流に於ける奇異現象の物理的説明
2 不等速定流	11 限界水流
3 容量係數 (Conveyance)	12 限界勾配
4 エネルギーの損失	13 不等速定流の方程式の他の形
5 不等速定流に於ける水面勾配と底勾配との關係	14 總括及水流の特性
6 不等速流に於けるエネルギーの損失	15 水流の符數 (Parameters)
7 不等速定流の基本方程式	

[I] 緒 言

吾々水工學關係技術者は所謂等速定流に関しては其の水理が簡單であるから今迄充分なる知識を以て日々之をよく實地の問題に應用したのであるが、不等速定流になると其の水理が前者の場合に比してかなり複雑であるから假令其の水理的理論は之を呑み込んで居るにしても實地の問題に應用するのは極少く、或一部分の技術者に取りては其の水理的知識すら餘り之を心得ようとしなない様である。然し實地の問題になると等速流の場合よりも不

等速流に極似の場合が甚だ多く、従つて後者の理論を適用するにあらざれば實際に近き結果を得ることは困難である許りでなく、若し前者の理論を適用すれば實際と全く反對の結果を呈する如き場合さへ起るのである。且つ又水路に於ける背水 (Back water)、低下背水 (Drop down) 等の現象は素より跳水 (Hydraulic jump)、段波 (Standing wave) 等の現象は後者の理論を適用するにあらざれば全然之等を説明することが出来ないのである。依つて不等速定流に関する理論を詳細に解り易く記述することは素よと徒勞ではなからうが、本邦で發行さ

れた水理学の参考書中にも勿論不等速定流に関する多くの問題を取扱つて居るのではあるが、筆者の見解に依れば以上の多くの参考書中には不等速定流のあらゆる場合に就て詳細に説明して居るものは極少く、而も其の説明の體系が初學者に取りてはかかなり難解のものが多い様である。

例へば「背水曲線」とか或は「低下背水曲線」と云ふ術語は既に吾等の耳によく聞き慣れた術語であらうが、「 M_1 曲線、 M_2 曲線」或は「 S 曲線、 S_2 曲線」若しくは「 C 曲線、 C_2 曲線」等の術語は吾等の耳に餘り聞き慣れた術語ではなからべく、或は讀者諸君の中でも全く初耳の方が居られぬとも斷言出来ぬであらう。前者即從來吾等が使用して來た術語は皮相的であつて不等速流の核心に觸れた問題より出發した術語であるとは云ひ難く、之を仔細に檢すれば同じ背水曲線の中でもふは同じ低下背水曲線の中でも種々異なる場合があつて、即水路の底句配及水深の關係に依つて8種類の異なる水面曲線が存在するのである。

以上は勿論一例に過ぎないのであるが、適最近米國で發行された Bakhmeteff 著 “Hydraulics of open Channels” なる書を通讀するに、之は敵國で發行されたものとは云へ、説明平易にして、而も内容に於て不等速定流に関する多くの現象を充分説明するに足る水理を豊富に記述してあり、本邦で發行されたものと比較すればより以上の價値ある効果的のものが記述してあると云ひ得るのである。

茲に於て筆者は淺學凡才を顧みず吾々水工学關係技術者に取りて是非とも必要なりと思はれる部分を、不等速定流に關する水理を採萃し、之に多少の筆者の私見を混せて成可く平易に記述せんとするのであるが、紙面の關係上説明が餘り深入することが出来ないので遺憾とする所である。讀者諸君に於ても之が多少なりとも御參考になり、進んで之を實地問題に應用せらるゝに至れば筆者の幸甚の至りとする所である。

記述の主旨は前述の如く主に不等速流に關する問題を

取扱はんとするのであるが、説明の便宜上初めは等速或は水流の概況より略述せんとするのである。

【I】 水流の概況

1 等速定流 (Uniform flow)

開水路に於ける水流に於て水深 y 及斷面積 A 、流速 v 、水面句配 i 等の水理量が各斷面に於て相等しい時は此水流は等速定流と呼ばれる。而して等速定流に於ては水面句配 i は水路床句配 i_0 に等しいのである。依つて底句配と水面句配とが等しからざる水流は嚴密に云ふと等速定流ではない。従つて嚴密に云へば等速定流は前述の條件に合ふ様に布設された運河或は其の他の人工水路の場合のみであつて、河川及其の他の天然水路に於てはほとんど總ての場合に於て等速定流ではないのである。而して等速定流に於ける水理量を表はすには一般に V_0 , R_0 , P_0 , K 等の如く文字の右下端に 0 を附記するのが普通である。

2 不等速定流 (Non-Uniform flow or Varied flow)

定流に於て水深及斷面積、流速、水面句配等の水理量が各斷面に於て變化する時は此の水流は不等速定流と呼ばれる。然し流量 Q は定流である限り各斷面共相等しいのである。

次に種々なる不等速流の場合に就て唯概念的に略述しよう。古典的考へでは不等速流の唯一の例は圖-1に示す様な堰堤に依りて生ずる背水曲線であつたのである。天

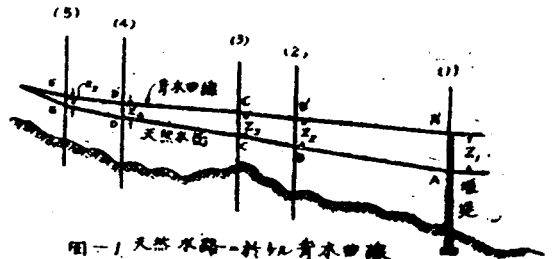


圖-1 天然水路-於て背水曲線

然水面線 $ABC\cdots$ は堰堤によりて $A'B'C'\cdots E'$ に揚げられる、上昇高 Z は上流に上るに従ひ、段々減少し、原水面線は背水曲線に對して漸近線となるのである。然

※ Boris A. Bakhmeteff: 現在は米國 Columbia 大學教授、前露國 Petrograd 大學教授 水理学の世界的泰斗中の一人にして、第一次歐洲大戰後露國革命當時米國に亡命せるもの如し (筆者註)

しながら吾々技術者が實地問題に直面して取扱はなければならぬ不等速流の實例は非常に多く、背水曲線は唯其の一例に過ぎないのである。簡單なる一例を挙げれば圖-2の如く二つの貯水池を連結する水路に於て水深 $y_1 = y_2$ なる様に二つの貯水池の水位 A 及 B が位する時は此の

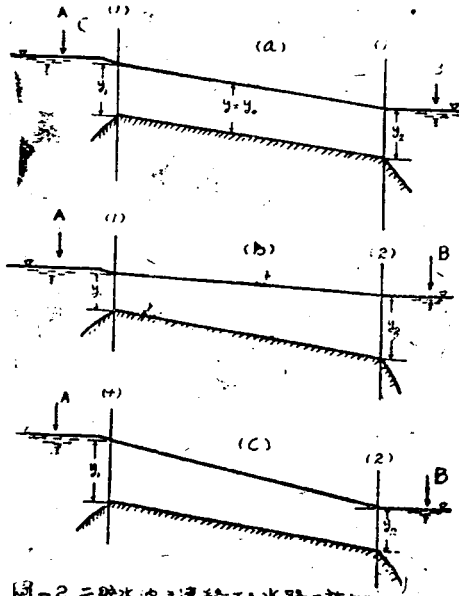


圖-2. 二貯水池を連結する水路に於ける等速流及不等速流

水流は等速流となるのであるが、此の様な場合に水深 y_2 及 y_1 は何時迄も等しくはないのである。圖-2 (b) の如く $y_2 > y_1$ なる場合を想像すれば水深は下流に下るに従ひ、段々増加して不等速流となる。而して此の様な場合は上昇水面曲線 (Rising Curve) を呈すと呼び、圖-2 (c) の如く $y_2 < y_1$ となれば水深は下流に下るに従ひ、段々減少して低下水面曲線 (Falling Curve) を呈するのであ

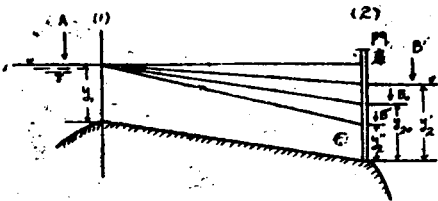


圖-3. 水門を以て調節する運河に於ける不等速流

る。もう一つ重要な實例を挙げれば圖-3の如く運河に於ける水流を水門で調節する場合である。門扉が開くに

従ひ流量及水深は變化する。圖中 AB' は上昇水面曲線を呈し、AB'' は低下水面曲線を呈する。而して之等の場合は共に不等速流となるのであるが、若し $y_2 = y_1$ となれば等速流となるのである。自ら水位 B を下げれば水深 y_2 は小となり、A 貯水池から引く流出量は大となるのである。

圖-2と圖-1とを比較すればもう一つの區別があることが解るのである。天然水路(圖-1)に於ては断面積及其の他の凡ての要素は断面から断面へと變化するのである。

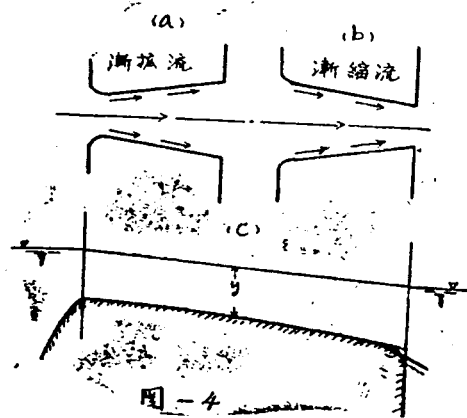


圖-4

斯の如き水流は廣義の不等速流である。同様なことは圖-4に適用することが出来る。圖 4(a) は漸縮横断面を有し、圖 4(b) は漸縮横断面を有し、圖 4(c) は底句配が各點に於て變化する運河である。

圖 4を圖-2或は圖-3と比較すれば後者は規則的であつて不變なる横断面形状及一樣なる底句配を有するのである。後者の様なものは特に壩狀水路 (Prismatic Channel) に於ける不等速流と云ふのである。

(i) 跳水 (Hydraulic Jump)

既に1820年に Bidone は背水曲線は常に圖-1に示す様

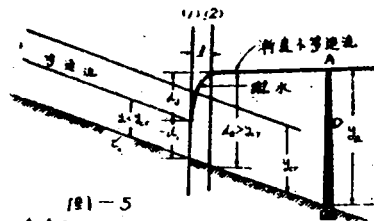


圖-5 急勾配水路に於る跳水の背水

な形即原水面線と切線をなす連続平滑曲線許りを示さな

いことを確めたのである。事既に於て水路の底勾配が甚だ急なる時は圖 5 に示す様な現象を呈するのである。或断面即圖 C に於て断面 1 と記せる断面迄は連続的に圓滑に洗れるのであるが、其の後は水面は原水深 d_1 から急激に断面 2 に於ける水深 d_2 迄跳躍するのである。此の珍現象は永い間跳水 (Hydraulic Jump) と呼ばれて来たものである。跳水は多くの場合に於て水流の連続性を破壊するのである。圖 5 に於て断面 2 より下流に於ては水面は再び連続性を呈し、水深の變化は漸變的で圓滑である。

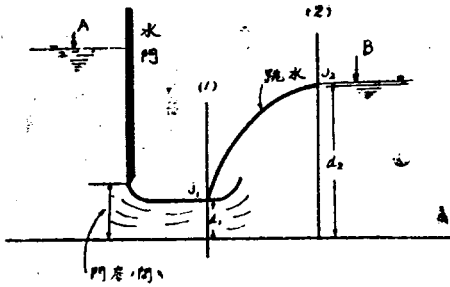


圖-6 水路、調節門前、下流に於ける跳水

跳水のもう一つの例は圖 6 に示す。之は水が水門の下から大なる流速を以て流出する場合である。跳水は縮流 (Vena Contracta) 附近の水深 d_1 と水深 d_2 との間に於て起るのであるが、此の場合に d_2 は d_1 の數倍に達することがあるのである。

圖 7 は堰の趾端に於ける跳水を示すのであるが、下流側水面 (Tail water) は堰堤を溢流する流れに依つて跳

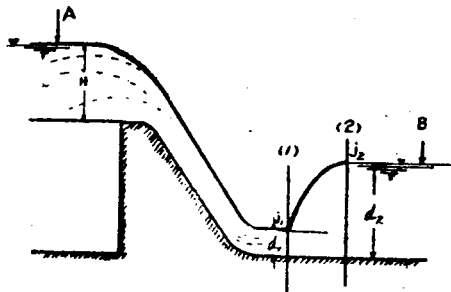


圖-7 堰堤、趾端に於ける跳水

付けられ、溢流水の自由水面と下流側水面とは跳水に依つて連絡されるのである。

(ii) 水面沈下 (Hydraulic Drop)

圖 8 に於て水路は断面 O に於て急に擴大して居るもの

とし、擴大前後の水深を夫々 y_1 及 y_2 とする。狭小部より擴大部へ移る變換點に於ては水面の急激なる低下を起

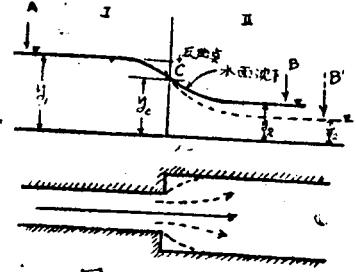


圖-8

水路断面、拡大するに於ける水面沈下

すのである。此の様な現象を水面沈下 (Hydraulic Drop) と云ふのである。此の現象の特性の一つは狭小部に於ける水面は或水深 y_c より以下にはとらないことである。而して之は擴大部の水位に無關係である。換言すれば若し下流部に於ける水面が B の代りに B' となり即水深が y_2 より y_2' に減じても C より上流の水面曲線には何等の影響を及ぼさぬのである。之より考察すれば C 點に於ける水深 y_c は水面沈下に於て特に障碍物でもなき限り水路の水面が沈下する自然の限度であることを知り得るのである。且つ圖-8 の C 點は沈下する水面曲線の反曲點となるのである。

水面沈下の例をもう一つ挙げれば圖-9 の如く緩勾配を有する水路から急勾配を有する傾に流出する場合であ

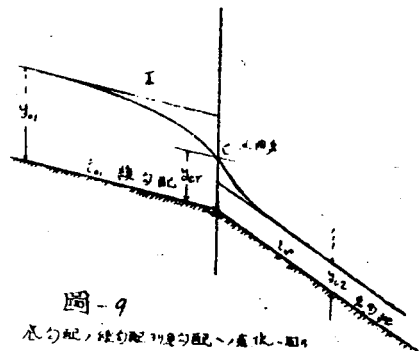


圖-9

緩勾配の水路、急勾配に於ける水面沈下

る即水路 I の y_1 と傾 II の y_2 とを連絡する水面曲線は水面沈下を起すのである。

(iii) 局部現象と漸變不等速流 (Local phenomena and Gradually Varied Flow)

水面沈下及跳水は雙方共比較的短距離の區間に於て流れの事情の急激なる變化に依つて生ずるものである。従つて之等の現象は圖-1、圖-2及圖-3に示せる流れとは自ら區別し得べく、即ち前者に於ては相當長距離の區間に亘つて多少の水深の變化があるのである。従つて Boussinesq[※] は圖-1、圖-2、圖-3等に示せる様な水流に對しては漸變不等速流 (Gradually Varied Flow) なる名稱を與へ、前者の如く變化が急激に起る現象に對しては一般に局部現象 (Local Phenomena) と稱へたのである。

流れの事情が絶えず變化する水路に於ては一般に之を漸變不等速流の區間と局部現象を起す區間とに區分することを得べく、圖-10は斯の如き水路の一例を示すもの

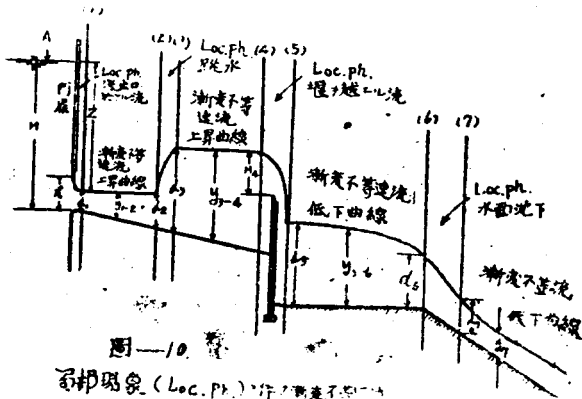


圖-10 局部現象 (Loc. Ph.) 起す漸變不等速流

である。

漸變不等速流の場合に於ける水深は普通 y にて記すのであるが、局部現象の場合に於ける水深は普通 d にて記すのが習慣である。且つ又前者に對しては普通水深 (Depth) なる術語を用ひるのであるが、後者の場合に對しては普通水位 (Stage) なる術語を用ひるのである。事實に於て水面曲線は底線上より測りたる水深の連続に依つて決定されるのと同様に又水位即各断面に於ける水面の高の連続に依つて決定されるのである。

※※ 容量係數 (Conveyance)

今等速流の場合に於て Chezy 公式を用ひるものとすれば

$$V = C\sqrt{Ri_0} \dots\dots\dots(1)$$

$$Q = AV = AC\sqrt{Ri_0} \dots\dots\dots(2)$$

茲に R は徑架にしてにて A/p にて定義される。 p は潤邊長、 C は所謂 Chezy 流速係數にして、 Kutter, Bazin, Manning 或は其の他の實驗公式に依り決定される。

今 $K = AC\sqrt{R} \dots\dots\dots(3)$

と置けば (2) 式は

$$Q = K\sqrt{i_0} \text{ 或は } i_0 = \frac{Q^2}{K^2} \dots\dots(4)$$

となる。水路の断面が與へられれば K は水深 H の函数であつて、 $K = f(y)$ (圖-11) なる曲線を描き得べく、此の曲線は水深に應じて其の流れの水を運ぶ容量を表はすものである。 K のヂメンションは Q と同じく $(L^3 T^{-1})$ である。

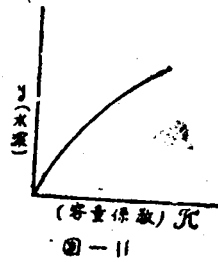


圖-11

4. エネルギーの損失

圖-12に於て基線 0-0 を水平とすれば断面 (1) 及断面 (2) に於けるエネルギー水頭は

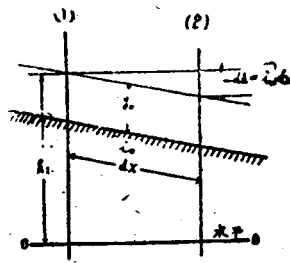


圖-12

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= h_1 + \frac{V_1^2}{2g} \\ e_2 &= h_2 + \frac{V_2^2}{2g} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

※ 十九世紀頃の佛國大水利學者

※※ 筆者の譯語

dxなる區間に於て失はれたるエネルギー水頭の損失は同じ區間に於て流水の抵抗に依り消費せる單位重量の液體の仕事量に等しきを以て、今失はれたるエネルギー水頭を e_r にて表はせば

$$e_1 - e_2 = -de = der$$

或は $-\frac{de}{dx} = \frac{der}{dx}$ (6)

等速流にては流速一定なる故

$$de = e_2 - e_1 = h_2 - h_1 = -dh = -iodx$$

之に(4)式を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{de}{dx} &= -i_0 = -\frac{Q^2}{K^2} \\ \frac{der}{dx} &= \frac{Q^2}{K^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

即ち Q^2/K^2 は流水の抵抗に依るエネルギーの損失の割合を示すものである。

5 不等速流に於ける水面勾配と底勾配との關係

前述の如く不等速流に於ては水面曲線は水路床線に平行ではな。水面勾配 i と底勾配 i_0 との間には圖-13に依り明である様に

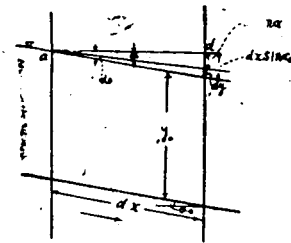


圖-13

$$i = \sin \angle = \frac{bd}{ba} = \frac{cd-cb}{ba} = \sin \angle_0 + \frac{dy}{dx}$$

依つて $i = i_0 + \frac{dy}{dx}$ (8)

而して等速流の場合に於ける水深 y_0 を特に正流水深 (Normal Depth) と云ふのである。

6 不等速流に於けるエネルギーの損失

流水の抵抗は流速の自乗に比例するものであるからエネルギーの損失の割合は断面から断面にかけて變化し、一断面に於ては水深に依つて定まるのである。

若し或断面に於て(圖-14)水深 y' が正流水深 y_0 よりも大なる場合には流速 V は V_0 よりも小にしてエネルギーの損失も等速流の場合より小となり、之に反して $y' < y_0$ なる時は流速 V は V_0 より大にして、エネルギー

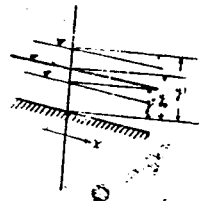


圖-14

の損失も等速流の場合より大となる。而して前述の如く

$$\frac{der}{dx} = \frac{Q^2}{K^2} = i \frac{Q^2}{K_{20}^2} = i_0$$

或は $Q^2 = iK^2 = i_0 K_{20}^2$ (9)

であるから $y < y_0$ ならば $Q^2/K^2 > i_0$

$$y > y_0 \quad \because \quad Q^2/K^2 < i_0$$

となるのである。

7 不等速流の基本方程式

不等速流の基本方程式はエネルギーの損失の關係より容易に誘導することが出来る。(6)式を微小距離 dx を

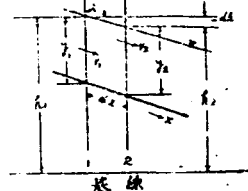


圖-15

隔れる断面1及断面2に適用すれば(圖-15)

$$\begin{aligned} -de &= e_1 - e_2 \\ &= \left(h_1 + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2g} \right) = der \end{aligned}$$

之を微係数の形に表はせば

$$\frac{de}{dx} = \frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{V^2}{2g} = -\frac{der}{dx} \dots\dots\dots(10)$$

圖-15から $-\frac{dh}{dx} = \sin \angle = i$

又(9)式から $\frac{der}{dx} = \frac{Q^2}{K^2} = \frac{V^2}{C^2 R}$ (11)

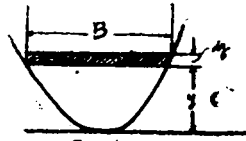
之等を(10)式に代入すれば

$$i = \frac{Q^2}{K^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{V^2}{2g} \right) = \frac{V^2}{C^2 R} + \frac{d}{dx} \left(\frac{V^2}{2g} \right) \dots\dots(12)$$

※ 原語 "Normal depth" を直譯すれば「通常水深」となるも之は正流の場合を指すものなる故斯意譯したのである。(17節参照、筆者註)

之は不等速定流を表はす一般基本微分方程式であるが、
 溝状水路 (Prismatic Channel) の場合は次の様に簡単
 になるのである。溝状水路に於ては流量 Q を與へれば或
 断面に於ける流速 v 及その他の水理量は水深 y に依つて
 定まり、従つて問題は y 及距離 x のみの二變數の問題とな
 る。溝状水路に対しては $\frac{d}{dx} \left(\frac{V^2}{2g} \right)$ の項は(12)式に於ける
 運動のエネルギーの變化を表はすものであつて、之を
 次の如く表はすことが出来る。

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{V^2}{2g} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{2gA^3} \right) = - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx} \dots\dots\dots(13)$$



而して圖-16 に依つて明であ
 る様に

$$dA = Bdy$$

$$\text{或は } \frac{dA}{dy} = B \dots\dots\dots(14)$$

依つて

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{V^2}{2g} \right) = - \frac{Q^2}{g} \frac{B}{A^3} \frac{dy}{dx} \dots\dots\dots(15)$$

(12)式に(15)式を代入し i を(3)式で表はし、且つ之に
 (9)式の関係を代入すれば

$$i = i_0 - \frac{dy}{dx} = \frac{Q^2}{K^2} + \frac{d}{dx} \frac{V^2}{2g}$$

之より

$$= i_0 \frac{K_0^2}{K^2} - \frac{Q^2}{g} \frac{B}{A^3} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = i_0 \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - \frac{Q^2}{g} \frac{B}{A^3}} \dots\dots\dots(16)$$

茲に K_0 は正流水深 y_0 に相等する容量係數である。

8 水流の比エネルギー (specific energy) ^{*}

等速流に於て流量 Q が正流水深 y_0 で流れる時は重力

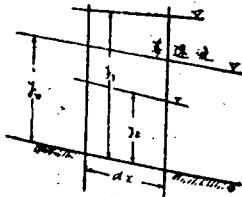


圖-17

$i_0 dx$ の仕事は凡て流水抵抗 $(Q^2/K^2) dx$ の爲に消費さ
 れるのである。それ故に断面(圖-17)に於ける流れの状

況は断面1に於けるものと同様である。若し之に反して
 水が $y' > y_0$ なる水深で流れるならば微小距離 dx を超
 える爲に消費されるエネルギーの損失 $(Q^2/K^2(y')) dx$
 は同じ微小距離を超える重力の仕事 $i_0 dx = (Q/K)^2 dx$
 よりも小となるのである。それ故に断面1から断面2迄
 流れる間に於て水はエネルギーの増加を得るのである。
 之は單位重量當り

$$i_0 dx - \frac{Q^2}{K^2(y')} dx = \left(\frac{Q^2}{K_0^2} - \frac{Q^2}{K^2(y')} \right) dx \\ = i_0 \left(1 - \left[\frac{K_0}{K(y')} \right]^2 \right) dx \dots\dots\dots(17)$$

となるのである。

又 $y' < y_0$ なる時はエネルギーの損失 $\frac{Q^2}{K^2(y')} dx$ は重力
 の仕事を超過するのである。それ故に水が微小距離 dx を
 越えて流れる爲には運動する液體中に含まれて居るエネ
 ルギーの貯藏から或量のエネルギーを取戻さなければなら
 んのである。流水に依りて運ばれるエネルギーの減少
 量も同じく(17)式に依つて計算することが出来るが、唯
 $K(y') < K_0$ であるから $1 - [K_0/K(y')]^2$ の符號は
 (-)となるのである。依つて $y > y_0$ 或は $y < y_0$ なるか
 に従つてエネルギーは流水に加はるか、或は取戻される
 のである。斯の様にエネルギーの量は断面から断
 面に行くに従つて變化するのである。此の現象は次に述
 ぶる流水の比エネルギーを考へれば自ら明になるのであ
 る。

今水深 y が變化する水路(圖-18)に於て断面の底面を

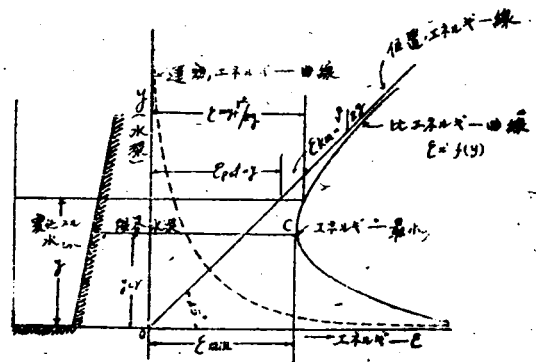


圖-18

* 筆者の譯語

基線に取れば流水の平均エネルギー-水頭は

$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y - \frac{Q^2}{2gA^3} \dots\dots\dots (18)$$

Eは水深の函數であつて、 $E=f(y)$ なる曲線を畫くことが出来る。此のEを流水の比エネルギー (Specific energy) と呼び、 $E=f(y)$ なる曲線を比エネルギー圖表 (Specific energy Diagram) と呼ぶのである。而して(18)式に依つて定義される比エネルギー $E = y + \frac{V^2}{2g}$ と(5)式に依つて定義されたエネルギー $e = h + \frac{V^2}{2g}$ とを明に區別することが必要である。後者即(5)式の興へるエネルギーは或一定の基線より測つたものであつて、之は全體として流れが或微小距離を越える爲に變化するエネルギーを示すものである。前者即比エネルギーは底面より測つたものであつて、斷面毎に異なるのである。Eの變化は一つの斷面に於けるエネルギーの變化を示すものであつて之は水深と共に變化する。等速流に於てはEは一定である。換言すれば等速流に於ては $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$ である。不等速流に於ては微小距離 dx を越える爲に起る抵抗に因る損失に對する重力の仕事の剰餘は比エネルギーに加つたり、或は之から減かれたりする。従つて(22)式から

$$\frac{\partial E}{\partial x} = i_0 \left\{ 1 - \left(\frac{K_0}{K} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (19)$$

となり、而して

$$\left. \begin{array}{l} y > y_c; K > K_0: \frac{\partial E}{\partial x} > 0 \\ \text{依て } E \text{ は流れの方向に増加する。} \\ \text{之に反して } y < y_c; K < K_0; \frac{\partial E}{\partial x} < 0 \\ \text{依て } E \text{ は流れの方向に減少する。} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

或水路に於て流量が與へられれば比エネルギー-曲線

$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2}$ は $E=f(y)$ として畫くことが出来る。第一項即位置のエネルギーは直線 op (圖-18) を x 軸に對し 45° の方向に引くことに依つて表はすことが出来る。第二項 $\frac{V^2}{2g}$ 即運動のエネルギー-水頭は K 曲線であつて、之は y 及 x 軸に對し漸近線をなす。 $E=f(y)$ 曲線は p 及 K 曲線の和であつて、 op 及 ox に對し漸近線をなす。此の曲線は y_{cr} にて表はされる水深に相當する最小値 O 點を通るのである。

9 限界水深 (Critical depth)

或特種の水深に於ては比エネルギーは最小となるので

ある。換言すれば此の水深に於ては一定流量 Q は比エネルギーの最小量を以て流れるのであつて、此の水深を限界水深 (Critical depth) と呼び、 y_{cr} にて表はすこととする。一定流量 Q が一水路に於て流れる方法即取り得る水深は無数にあるのである。今水深を y とすれば之に相應する比エネルギー E の値は y と共に變化するのである。然し如何なる事情の許でも流水の單位重量當りのエネルギーの量を或値 E_{min} 以下に下げることは不可能である。此の E_{min} は限界水深の時に得られるのである。換言すれば E_{min} は與へられたる水路に於て一定流量 Q を流し得る比エネルギーの最小量である。 y_{cr} の値を求めらる爲には

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

而して之に(14)式を代入すれば

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 1 - \frac{Q^2 B}{gA^3} = 0 \dots\dots\dots (21a)$$

之より

$$\frac{Q^2}{g} \frac{B}{A^3} = 1 \dots\dots\dots (21)$$

依つて y_{cr} は(21)式を満足する水深である。換言すれば限界水深 y_{cr} に於ては

$$\left(\frac{A_c}{B} \right)_{cr} = \frac{Q^2}{g} \dots\dots\dots (22)$$

或は $\left(A \sqrt{\frac{A}{B}} \right)_{cr} = \frac{Q}{\sqrt{g}}$ となるのである。

m 函 數

與へられたる水流の斷面に於ては A/B の値は水深 y の函數である。今

$$\left. \begin{array}{l} A \sqrt{\frac{A}{B}} = m \\ \text{或は } \frac{A^2}{B} = m^2 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

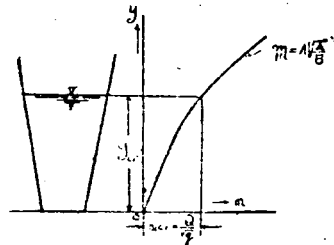


圖-19

と置き、 $m(y) = A\sqrt{\frac{A}{B}}$ を m 函数と呼ぶこととする。與へられた断面形(圖-19)に對して曲線を畫けば m 函数に依り水路を流れる任意の流量に對する限界水深を求めることが出来る。實際に流量 Q が與へられれば(22)式に依り

$$m_{cr} = \frac{Q}{\sqrt{g}} \dots \dots \dots (24)$$

之より m 曲線から m_{cr} に相當する限界水深 y_{cr} の値を決定することが出来るのである。

矩形断面

矩形の場合は(圖-20)單位幅當流量 q け

$$q = Q/B \dots \dots \dots (25)$$

であるから $m(y)$ 函数は

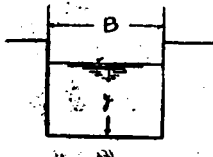


圖-20

$$m = \sqrt{\frac{A^3}{B}} = \sqrt{\frac{B^3 y^3}{B}} = B\sqrt{y^3} \dots \dots \dots (26)$$

之より $\frac{Q}{\sqrt{g}} = \frac{Bq}{\sqrt{g}} = m_{cr} = B\sqrt{y_{cr}^3}$

依つて $y_{cr} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$
 或は $q^2 = gy_{cr}^3$ } $\dots \dots \dots (27)$

10 不等速流に於ける奇異現象の物理的説明

前述比エネルギーの概念を引用すれば不等速流に於ける多くの奇異現象を簡明に説明することが出来るのである。

跳水 (Hydraulic Jump)

圖-21 に示す如く跳水は水流のエネルギー曲線の下側枝から上側枝への急激なる移動である。E₁ 及 E₂ は跳水の前後の水深 d₁ 及 d₂ に相當する流れの比エネルギーの損失である。E_j = E₁ - E₂ は跳水の爲に起るエネルギーの損失である。此の損失は或事情の許では非常に大いのである。

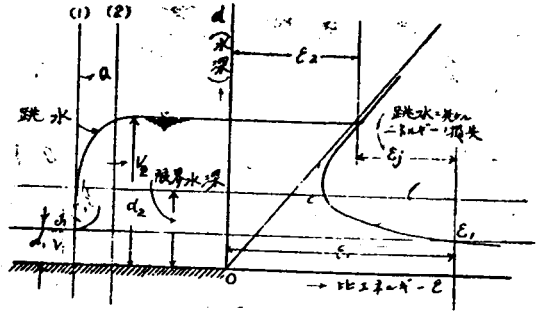


圖-21

過・水面沈下

圖-22 は澗を越える流れを示す。特別の場合を考へ、水路底は水平と假定する。それ故に流れの加速度に依る

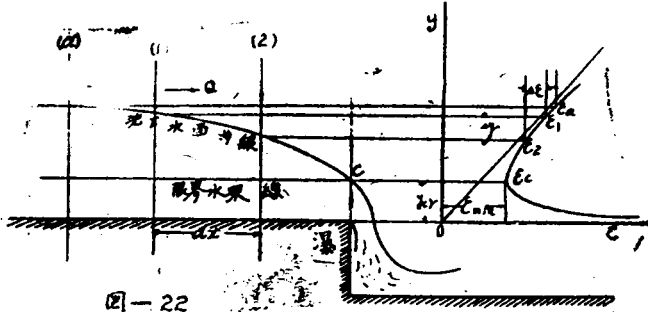


圖-22

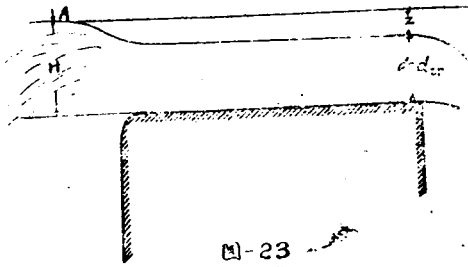
抵抗の上に及寸底勾配の影響は皆無とする。斯の如き状態の許に於ける運動は全く液體に貯藏された比エネルギーの消費に依つてなされるに相違ないのである。従つて低下水面曲線の断面1から断面2への徑路はエネルギー曲線の上側枝に於ける入換に相當し、比エネルギーの損失 ΔE は水深が Δy 丈低下するのに伴つて起るのである。一般に運動する液體の表面は其の本性として限界水深以下に下げることは不可能である。此の限界水深は落下する液體の所有し得るエネルギーの最小量に相當するものである。

水面を y_{cr} 以下に下げることはエネルギー曲線の下側枝迄運動させることを意味する。而して之はエネルギーを外部から供給する場合にのみ可能である。斯て限界水深は自然にエネルギーを消散する方法に於て水面が沈下し得る最小限度である。それ故に限界水深は最小なる水

深であつて、之は自然の條件の許に水路が瀾を越える終端に於て保たれるのである。

廣頂堰 (Broad-Crested Weir)

圖-23 の様な廣頂堰に於て流出口が自由である場合には水深 d は堰端にては限界水深になるのである。それ故に



$$d = \frac{q^2}{g}$$

茲に q は單位幅當流量とす。若し H を堰を越える水頭 (接近流速に對して更正せる) とすれば流量 q は

$$q = w \sqrt{2g} H^{3/2}$$

茲に w は堰の流量係數とする。 q を消去すれば

$$\left. \begin{aligned} d/H &= d' = \frac{3}{2} w^2 \\ \text{或は } w &= \sqrt{\frac{1}{2} (d/H)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

即 H が與へられれば水深 d は w の値に依つて變るのである。 w が小なれば小なる程抵抗は大となるを意味し、即 $d' = d/H$ はより小となることを意味する。之は實驗の結果とは一致するが、從來の水理學教科書に因襲的に説かれてある『最大流量理論』とは相反するしである。從來の『最大流量理論』に依れば $d' = d/H$ は凡ての事情の許に $2/3$ でなければならぬ。然しながら其の様なことは唯流れが流水抵抗に依る損失がないと假想する場合に於てのみ成立するのである。實際の凡ての場合には $d' = d/H$ は常に $2/3$ より小である。此の觀念を明にする爲に水深 d なる堰の端に於ける流速 V を計算すれば (抵抗に依る損失を考慮し、流速係數を ϕ とする)

$$\begin{aligned} V &= \phi \sqrt{2g(H-d)} \\ &= \phi \sqrt{2gH} \sqrt{1 - \frac{d}{H}} = \phi \sqrt{2gH} \sqrt{1-d'} \end{aligned}$$

依つて $q = vd = \phi \sqrt{2g} H^{3/2} \phi' \sqrt{1-d'}$

流量係數は

$$w = \phi d' \sqrt{1-d'} \dots\dots\dots (28a)$$

之を(28)式と比較すれば

$$w = \phi d' \sqrt{1-d'} = \sqrt{(d')^3} / 2 \dots\dots\dots (28b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{之より } \phi^2 &= \frac{d'}{2(1-d')} \\ d' &= \frac{2\phi^2}{1+2\phi^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28c)$$

若し $\phi^2 = 1$ ならば明に (28c) 式中の d' は $d' = 2/3$ となり、(28) 式中の流量係數は $m = 0.385$ となる。堰の流量係數の任意の値に對する水深及流速係數の値を (28a) ~ (28c) 式から計算すれば次の通りとなる。

w	ϕ	d'
0.385	1.0	$2/3$
0.350	0.915	0.625
0.320	0.85	0.59

漸變不等速流の方程式

比エネルギー及エネルギー圖表(圖-18)の觀念は直接不等速定流の一般微分方程式を導くのに用ひられるのである。實際、圖-22の断面1及断面2間の微小距離 dx 間に於けるエネルギーの變化は

$$-\frac{\partial E}{\partial x} dx = -dE$$

而して $-\partial E / \partial x$ は(19)式より決定する。

此の比エネルギーの得失は明に水深 dy の變化に相應するエネルギー圖表に於けるエネルギー變化に等しいのである。即

$$-dE = -\frac{\partial E}{\partial y} dy$$

但 $\frac{\partial E}{\partial y}$ は(21)式より決定する。以上を綜合すれば

$$\frac{\partial E}{\partial x} dx = \frac{\partial E}{\partial y} dy$$

$$\text{之より } \frac{dy}{dx} = \frac{\partial E / \partial x}{\partial E / \partial y} = i_0 \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - \frac{Q^2}{g} \frac{B}{A^3}}$$

之即(16)式である。

流れの比エネルギーの理論は簡單ではあるが、最近迄假面を被つて居つたとも云へるのであつて、即直觀的洞察がなかつたのである。例へば跳水 (Hydraulic Jump) の出現は單に解析的考察に依つてのみ説明された。實際に(16)式の分母が $\frac{Q^2 B}{g A^3} = 1$ なる特別の値を取る時は即限界水深に對しては分母は零となる。従つて $\frac{dy}{dx} = \infty$ となる。之は水面曲線の連續性に分裂あることを示すもので

ある。後者は又軸に直角となる。此の分裂は跳水の形成に實驗的確認を見出すべく想された。

11 限界水流 (Critical flow)

與へられた水路に於て限界水深 ($y=y_{cr}$) の許で流れる水流は限界水流 (Critical flow) であると云い、或は限界状態 (Critical State) にあるとも云ふのである。與へられた流量に對して 9 項に於て決定された限界水深は流量 Q を限界水流にする特別な水深を示すのである。

限界流量 (Critical discharge) Q_{cr}

前者とは逆に與へられた水路に於て凡ての水深に對して Q_{cr} にて記す或流量があるのである。之は與へられた水深の許で水流を限界状態にするのである。 Q_{cr} を限界流量と呼ぶことにする。(24)式に依り決定されたものは

$$Q_{cr} = \sqrt{g} m(y) = \sqrt{g} A \sqrt{\frac{A}{B}} \dots (29)$$

與へられた縦断面圖に對して $Q_{cr} = f(y)$ なる曲線を畫くことが出来る。 Q_{cr} 曲線は明に $m(y)$ 曲線に \sqrt{g} を乗じたものである。

限界流速 (Critical velocity) V_{cr}

限界水流に相應する流速を限界流速 (Critical velocity) と云ひ、 V_{cr} にて表はす。(29)式から

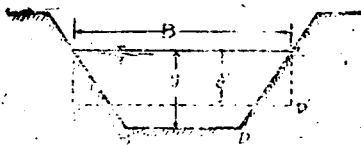


圖-24 平均水深 $\delta = \frac{A}{B}$

$$V_{cr} = \frac{Q_{cr}}{A} = \sqrt{g} \sqrt{\frac{A}{B}} \dots (30)$$

但 A/B は簡單なる意味を有し、之は矩形水路 $AB'D'C$ (圖-24) の水深である。但此の矩形 $AB'D'C$ は與へられた水路 $ABDC$ と同じ斷面積 A を有し、同じ上幅 B を有するものとする。

$$\frac{A}{B} = \delta \dots (31)$$

と記し、此の δ を斷面の平均水深と云ふ。依つて限界流速は

$$V_{cr} = \sqrt{g\delta} = \sqrt{2g \frac{\delta}{2}} \dots (32)$$

となり、之は平均水深 δ の半分を水頭とする流速に相當

するのである。平均水深 (average depth) δ と徑深 (Hydraulic mean depth) $R=A/P$ とを比較すれば

$$\frac{\delta}{R} = \frac{A}{B} \frac{P}{A} = \frac{P}{B} \dots (33)$$

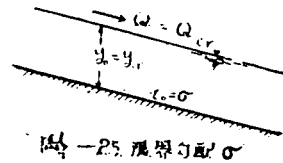
矩形断面 (圖 20) に對しては(27)式から

$$\left. \begin{aligned} Q_{cr} &= \sqrt{g} \sqrt{y^3} \\ V_{cr} &= \sqrt{g} \sqrt{y} \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

此の場合は明に

$$\delta = A/B = y \dots (35)$$

12 限界句配 (Critical slope) (圖-25)



限界水深 y に於て等速流となる様な底句配の値を限界句配 (Critical slope) と云ひ、 i 或は i_0 の反に δ にて表はすのである。限界句配 δ は水深の函數である。 δ を決定するには定論に依り

$$Q^2 = 6K^2$$

又 $Q^2 = gm^2$

之より $6K^2 = gm^2$

或は $6 = g \frac{m^2}{K^2} \dots (36)$

此の式に於て m 及 K は與へられた水深 y に對して

$$m = A \sqrt{\frac{A}{B}}$$

及 $K = AC\sqrt{R}$

なる函數の特別な値である。與へられた横断面に對して限界句配 $\delta = f(y)$ なる曲線を畫くことが出来る。

δ の他の式は(36)式に $m^2 = A^2/B$ 及

$$K^2 = A^2 C^2 R = A^2 C^2 / P \text{ の値を代入すれば}$$

$$6 = g \frac{A^2}{B} \frac{P}{A^2 C^2} = \frac{g}{C^2} \frac{P}{B} \dots (37)$$

之は又

$$\left. \begin{aligned} 6 &= 6' \frac{P}{B} \\ 6 &= \frac{g}{C^2} \end{aligned} \right\} \dots (37a)$$

にて表はすことが出来る。

廣断面にして幅が水深に比し極めて大なる場合は(37)式中の P/B の値が略一に等しかるべく、此の時は(之は多くの天然水路の場合である。6' = g/C² の曲線は直接限界勾配の値を與へるのである。然らざる場合は6' 曲線の與へる値に P/B の値を乗じなければならぬ。後者は常に1より大である。

正流限界勾配 (Normal Critical slope)

與へられた流量に對して限界勾配の特別な値を特別な符數 (Parameter) として定めると便利である。即(1) 正流水深 (Normal depth) y₀ に於ける限界勾配 6₀ 及 (2) 限界水深 y_{cr} に於ける限界勾配 6_{cr} である。而して 6₀ を **正流限界勾配 (Normal Critical slope)** と云ふのである。明に 6_{cr} は與へられた流量を限界状態 (Critical state) に於て等速流にする勾配である。

13 不等速定流の方程式の他の形

$$(16) \text{式} \quad \frac{dy}{dx} = i_0 \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - \frac{Q^2}{g} \frac{B}{A^3}}$$

を茲では別の形にて表はさうとする。

(i) 分母に(23)式及(23)の關係

$$\frac{Q^2}{g} = m^2 c \quad \frac{B}{A^3} = \frac{1}{m^2}$$

を代入すれば

$$\frac{dy}{dx} = i_0 \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - (mc/m)^2} \dots\dots\dots (38)$$

K 及 m は各 y と共に變化する所の K = AC√R 及 m = A√A/B 函數の變數の値であり、K₀ 及 mc は各正流水深 y₀ 及限界水深 y_{cr} に對する二つの函數の或特別な値であることを心得て居なければならぬ。

(ii) もう一つの他の形は分母の m に K を代

入すれば得るのである。(36)式より

$$m^2 = \frac{A^3}{B} = K^2 \frac{6}{g}$$

然るに

$$\frac{Q^2}{g} = \frac{K^2 c i_0}{g}$$

故に $1 - \frac{Q^2}{g} \frac{B}{A^3} = 1 - \frac{i_0 K^2 c g}{g^2 K^2}$

$$= 1 - \frac{i_0}{g} \left(\frac{K_0}{K} \right)^2 \dots\dots\dots (39)$$

$$\frac{i_0}{g} = \frac{i_0}{g_0} \frac{6_0}{6}$$

を代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= i_0 \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - \frac{i_0}{g} \left(\frac{K_0}{K} \right)^2} \\ &= i_0 \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - \frac{i_0}{g_0} \frac{6_0}{6} \left(\frac{K_0}{K} \right)^2} \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

茲に 6₀ は正流限界勾配である。不等速流の方程式を積分する時に即 y=f(x) なる水面曲線を求める時に用ひるのは後者即(40)式である。水路の断面形、壁の粗度係數底勾配 i₀ 及流量 Q が與へられる時は(40)式は唯二つの因子即 K₀/K 及 6₀/6 のみに依つて變化するのである。之等二因子は共に水深 y 或は y/y₀ の函數である。

若し y = y₀ ならば、K/K₀ = 1 6₀/6 = 1 となる。

今 i₀/6 = β i₀/6₀ = β

即 β = β₀ \frac{6_0}{6} \dots\dots\dots (41)

と置けば(40)式は

$$\frac{dy}{dx} = i_0 \frac{1 - (K_0/K)^2}{1 - \beta (K_0/K)^2} \dots\dots\dots (42)$$

となる。茲に β₀ は常數であつて、正流水深 y₀ に於ける限界勾配 6₀ に對する底勾配 i₀ の比を示すものである。依つて β は實際は變數であるが、水深の變化の範圍小なる時は β の變化は著しくなく、従つて實際は常數と看做すことが出来るのである。積分に際しては實際は水深の範圍を若干の區間に區分し、各區間に於ては β は其の平均値を用ひて常數として取扱ふのである。

14 總括及水流の特徵

水路は其の横断面の形狀、寸法、壁面の性質(粗度係數)が凡て與へられる時に始めて定義されると云ふべきである。前記の様に於て與へられる水路の横断面は次の諸性質を有し、之等は水深の函數である。(圖-26)

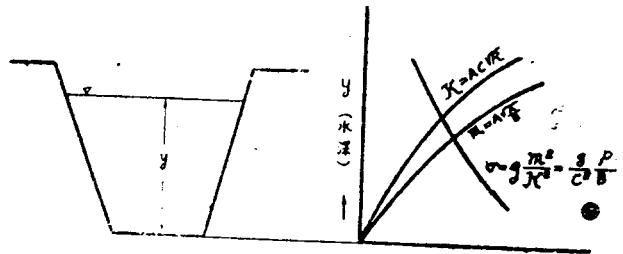


圖-26 水路の断面の性質

1. 容量曲線 (Conveyance) $K = AC\sqrt{R}$
2. m 曲線 $m = A\sqrt{A/B}$

- 3. 限界勾配曲線 $\phi = \frac{g}{C^2} \frac{P}{B} = g \frac{m^2}{K^2}$
- 4. 限界流速曲線 $V_0 = \sqrt{g \sqrt{\delta}} = \sqrt{g \sqrt{A/B}}$
- 5. 限界流量曲線 $Q_{cr} = \sqrt{g} m = A \sqrt{g \sqrt{A/B}}$

m , V_0 , 及 Q_{cr} 曲線は唯横断面の幾何學的形狀のみに依つて變化するのである。K 及 ϕ 曲線は壁面の粗度に依り變化する。若し Kutter 公式の様に C が底勾配と共に變化する c の公式を用ひる時は其の變化の影響を考慮しなければならぬ。

15 水流の符數 (Parameters)

水流は横断面積 (前節にて定義せる) 底勾配 i_0 , 流量が與へられる時に始めて定義が定まると云べきである。然る時は水流の符數 (Parameter) は次の通りである。

- 1. 正流水深 (Normal depth) y_0 は i_0 の許に Q を流量とする等速流の水深なる故 y_0 は K 曲線から $K_0 = Q/\sqrt{i_0}$ に相應する水深として定まるのである。
- 2. 限界水深 y_{cr} は與へられた水路に於て最小比エネルギーを以て Q を流す時の水深であるから $m_c = Q/\sqrt{g}$ に相應する水深として定まるのである。
- 3. 正流限界勾配 (Normal Critical slope) ϕ_0 及 ϕ_c は各々 y_0 及 y_{cr} に相應する限界勾配である。

水流の圖帶 (Zones of Flow)

正流水深 y_0 及限界水深 y_{cr} を水路の横断面圖及縱断面圖に入れた時は各々の断面圖の面を數個の圖帶 (Zones) に區分することが出來。(圖-27)

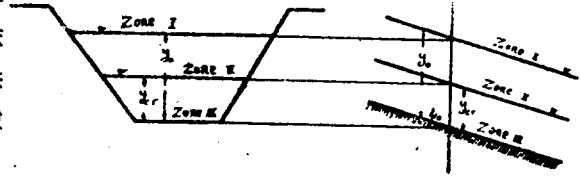


圖-27 水流の圖帶 (Zones)

補助曲線

實際の計算に際しては場合に依つては補助曲線を作ることが必要である。

- 4. 正流量 (Normal discharge) 曲線 $Q_0 = f(y_0)$ 之は與へられた水路に於て底勾配 i_0 の許に等速流として流れる $Q = K_0 \sqrt{i_0}$ の曲線である。
- 5. ϕ_0/ϕ 及 ϕ_{cr}/ϕ 曲線 之は變化する限界勾配に對する ϕ_0/ϕ 及 ϕ_{cr}/ϕ の比を表はものである。
- 6. 比エネルギー曲線

$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (\text{續く})$$

