論 説 報 告

橋床版の應力計算に關する理論に就いて(其の1)

准會員 工 藤 忠 夫※

要旨；本文はウイスタガード氏の論文『輪荷重に依る橋床版の應力計算』(Westergaard; Computation of Stresses in Bridge Slabs due to Wheel Loads, Public Road Vol. 11. No. 1. 1930)を解説し、更にこの理論より實用的補正公式を誘導したエルプス、ゴーギンス、パーカー三氏の共同論文(H. R. Erps, A. L. Googins and J. L. Parker; Distribution of Wheel Loads and Design of Reinforced Concrete of Bridge Floor Slabs Public Road Vol. 11 No.. 8. 1937)の概要を照介し、併せて床版應力に關する諸家の研究の若干に就き論述せるものである。元來本文はこの種問題を始めて調べた際の著者自身のノートとし書き留めおいたものに過ぎざる爲、豫備的智識各式の證明誘導等冗長駄足むしろ煩雜極まるものであるが、若き技術者の參考資料として幾分なりと役立つところあらば幸甚と考へ敢へて公表する次第である。尙本文中には獨斷に依り推論せる個所少からず、誤謬欠點も多かるべく、諸賢の御高敎を得ば望外の喜びとするところである。

目 次

參 考 文 獻

井口鹿象、矩形平版の撓度並に應力に就いて 土木學會誌10巻6號
同 二軸の方向に於ける彎曲剛率不等なる矩形平版の一解法 同 16巻10號
同 部分的分布荷重を受くる矩形平版の彎曲並に彎曲應力に就いて 同 17巻5號
稻田 隆、四邊に於て支持せらるゝ矩形平面版の研究 同 14巻4號
安宅 勝、公道橋床版の設計に於ける重要なる問題 Important Problems in the Design of Reinforced Concrete Floors in Highway Bridges 同 17巻10號
廣川鐵三郎、矩形平面版の一解法に就いて 建築雜誌45-552
F. Tölke、Über Spannungszustände in dünnen Rechteckplatten 同 49 596
藤井忠二、集中荷重を受ける平面版に就ての考察

※工學士交通部國防道路建設處技佐

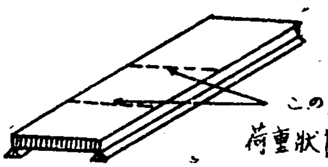
機械學會誌37-204
E.F.Kelley, Effective Width of Concrete Bridge Slabs Supporting Concentrated Loads Public Road Vol.7 No.1
Westergaard, Stresses in Concrete Pavements Computed by Theoretical Analysis 同 Vol,7 No.2
同、 Computation of Stresses in Bridge Slabs due to Wheel Loads 同 Vol.11 No.1
Erps, Googins and Parker, Distribution of Wkeel Loods and Design of Reinforced Concrete Bridge Floor Slabs 同 Vol.18 No.8
ブライヒ 鋼橋の理論と計算（邦譯）
マルクス 床版の計算（〃）
チイモシエンコ 挫屈理論（〃）
プレスコット 應用彈性學（〃）
池田芳郎 應用數學
川口虎雄外 土木工學
A. Nadai, Die Elastische Platten
L. Föppl, Drang und Zwang
Timoshenko, Theory of Slabs and Shells
同 Theory of Elasticity
Love, Mathematical Theory of Elasticity

第1章 概　說

第1節 序　說

鐵筋混凝土構造物の發達に伴ひ床版理論の研究が多くの學者の注意を引くに至つたのは鐵筋混凝土床版が等質彈性床版と考へて實用上差支へないからである。特に橋梁工學に於ては床版理論は直接設計上必要なものである。集中荷重を等布荷重に換算して所謂有效分布幅に依る應力計算は今日殆んど凡ての人々に依り試みられてゐる計算法であるが、この有效幅が仲々の曲者であつて、難解複雑な平版理論から簡易にして且正確な實用式を誘導することは可成り至難の業である。多くの人々に依り、これに對する努力が拂はれてゐるがまだまだ完成されたとは言ひ難い樣に思はれる。マルクスの理論は獨乙の書に取入れられてゐるが仲々巧妙な誘導方法として斯に貢献する所大である。がこゝではマルクスとは可成方法を異にしてゐるウィスタガード氏の理論に就き述せんとするものである。これは A. Nadai の理論から發して床版普通理論の巧みな使用に依つて特別理論と樣な效果を擧げるものである。[12]先づ版は定距離の端にて單純に支持せられてゐる無限帶として應力の計算する。(第1圖)

次にこの帶板上で支間の方向の線を考へこの線上でみと曲げモーメントを零ならしめる如き荷重狀態を想すれば、この線間の部分は四邊單純支持の矩形版と考得るから、かゝる荷重狀態における應力計算はとりもさず矩形版の應力計算と云ふことになるのである。更演繹的方法に依り單純支持より固定支持への解析を爲てゐる。以上がウ氏理論の骨組であるがエルプス外二は矩形版の應力計算の爲めに無限、版帶のモーメントをその最大撓距を邊とする等價モーメント矩形に直し所謂有效幅を求めたのである。かくすれば極めて簡易實用式を得る事は可能であるが以上の方法がどの程度近似性があるかは疑問である。しかし M. Bergsträss 其の他の實驗に依り A. Nadai の理論が實驗的に證明られたのみならず、エルプスの方法も相當の近似性を認せられた樣である。



第1図

註1. 一般に彈性理論に依つて與へられる解法に2つある事は衆知の通りである、この2つの理論の差異は例へば梁で云ふならば、梁の解法に於て平面斷面が曲げを受けたときも平面であり且つ中立軸に直角であるとのベルヌイとナヴアの假設に相當するものである。これは集中荷重の作用する場合、その作用點の極近傍の

局部應力を考へる場合は適用されず、平面斷面の假定を棄てゝ鉛直應力に因る變形を考慮に入れるを要する。集中荷重作用點に於て普通理論に依れば曲げモーメントは無限大になるが、かゝることは實際の場合にはあり得ない。

これは恐らく床版の厚さがこの最大應力を緩和する役目をするからと思はれる。この緩和される範圍を求める爲特別理論が必要となる。この理論では、床版への直角直線が直線に保存されると云ふ假定を棄て、次の2の假定を用ひる、即ち1つはフックの法則が適用せられ、Eとμとが一定であるとの假定、2は材料の連續性があらゆる點に於て成立すると云ふ假定であつて、この特別理論は普通理論より遙かに複雜な爲ウイスタガード氏の理論に於ては荷重をcなる equivalent Diameter（等價直徑）に分布するものと假定して普通理論を適用し以て眞の荷重分布直徑eを用ひた特別理論に依る應力計算と等しい應力を算出するのである。

Timoshenko; Theory of Elasticity 參照

Public Road Vol.7 No.2. Westergaard; Stresses in Concrete Pavements. P.27參照

註2. 曲げに依つて板の中央面に歪が起らないと言ふ假定は板の撓みが其の厚さに比べて小さい限りは通常十分な精度である。併し此の條件が滿足されぬ場合は、板の中央面が幾分變形するものであるから板の應力分布を考へるときは之を考慮しなければならぬ。撓面が展開可能面例へば圓筒面圓錐面であるならば、板の中央面に歪を起さないでかなりの撓みが起りうる。

一般の場合には板の大きい撓みは中央面のいくらかの伸を伴ふものでこの伸に基く最大應力度は最大曲げ應力度の約18%である。

周邊固定の圓形版に等分布荷重が掛つてhに等しい最大撓が起つた場合には伸に基く最大應力度は伸を無視して計算した最大曲げ應力度の約23%である。即ちこの場合中央面の伸を無視しても最大應力度の値に大きな誤差を生ぜないのは、例へば0,4hを超へない樣な小さな撓みの場合に限るのである。

テイモシエンコ；挫屈理論（邦譯）195頁217頁

第2節　記號及符號

x, y＝水平直角座標、原點は普通支間中央に置くが2,3の計算に於てはy軸を版の左邊に移動して考へる。（第2圖）

r, Θ＝水平極座標

z＝點(x,y)に於ける版の撓み(deflection)

a,b,u,v＝水平距離

h＝版　　厚

c＝荷重P_1が等分布する小圓の直徑

c′＝荷重P_1が直徑cなる小圓に等分布するとき、特別理論を以て計算した版底部の最大應力張力と同等な應力を、普通理論で算出する爲の等價等分布圓直徑

E＝版構成材料のヤング率

μ＝ポアソン比、普通μ＝0.15と假定する。

N＝版の剛率

P_1, P_2, P_3, P_4,＝輪荷重

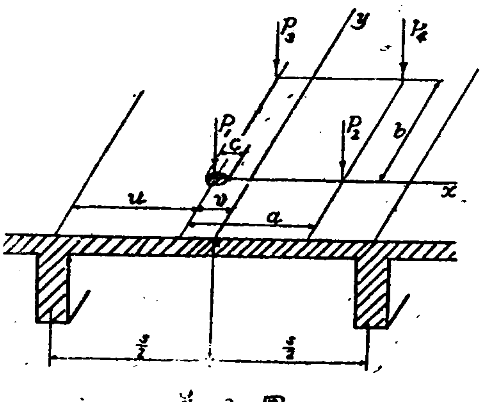
ω＝單位面積に對する分布荷重

p＝線上に分布する單位長さ當りの荷重

Vx＝y軸に平行な斷面內の單位幅當りの鉛直剪力、xが正なるとき上向き方向を正とする

Vy＝x軸　　同　　,y　　同

Mx,My＝y軸又はx軸に平行なる斷面內に作用するx又はy方向のモーメント單位巾當り、版底に應張力、版表面に應壓力を生ぜしめる如きものを正號とする



第2圖

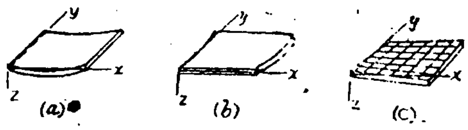
Mxy＝x及びy軸に平行な斷面中單位巾當りのx

及びy方向に於ける捩りモーメント

x＝yなる線の方向に於て版表面に應壓力を生ぜしむる如きものを正號とする。

M'xy＝Mxyの特別な場合の値

Rx＝左端に於て單位長當り反力



第3図　變形の基本型

(a)x方向の彎曲(b)y方向の彎曲(c)xとy方向の捩り

第2章　基本方程式の誘導

第2節　彈性方程式の誘導

先づ理論考究の便宜上彈性方程式の誘導に就き簡單に說明する第3圖は平版の1要素を摘出して變形の3基本型を示したものである。これらはいづれも版素に作用する曲げモーメントと捩りモーメントに依り作られる。

一般の場合はこの3種が重複して複雜な變形をなしてると考へられる。

第4圖は版の1要素に作用する力と偶力の全部を圖したものである。

座標xの面から x＋dx の面に至る間に、單位巾に對す曲げモーメントはMxから$\frac{\partial Mx}{\partial x}$の增加率を以て$\frac{\partial M}{\partial}$dxだけ增加する。故に巾をdyとすれば

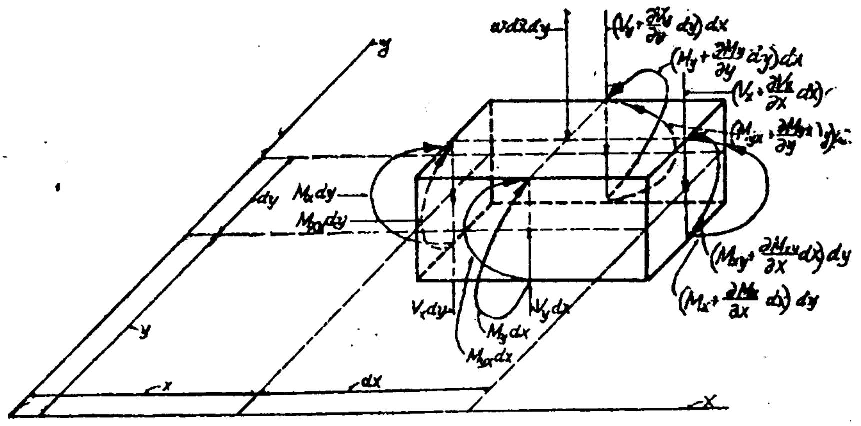
二 座標xの面に於て Mxdy

座標x＋dxの面に於て$(Mx+\frac{\partial Mx}{\partial x}dx)dy$

同樣の關係がMyに就いても又捩りモーメントMxy yx剪力Vx. Vyに就いても成立する。

かくして力及び偶力の平衡方程式として獨立したる式を得る。

垂直方向の力の和を零と等置し



第4図　版素に作用する諸力と偶力

$$\omega dxdy+(Vy+\frac{\partial Vy}{\partial y}dy)dx+\left(Vx+\frac{\partial Vx}{\partial x}dx\right)dy-Vydx-Vxdy=0$$

上式を整理し dxdy で除すれば

$$\frac{\partial Vx}{\partial x}+\frac{\partial Vy}{\partial y}+\omega=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

y軸に平行にして block の中心を通る軸についてモーメントの和を零として

$$Mxdy+Vxdy\frac{dx}{2}+Myxdx-\left(Myx+\frac{\partial Myx}{\partial y}dy\right)dx-\left(Mx+\frac{\partial Mx}{\partial x}dx\right)dy$$

$$+\left(Vx+\frac{\partial Vx}{\partial x}dx\right)dy\frac{dx}{2}=0$$

$$\therefore \quad -\frac{\partial Myx}{\partial y}dxdy-\frac{\partial Mx}{\partial x}dxdy+Vxdxdy+\frac{\partial Vx}{\partial x}dxdy\frac{dx}{2}=0$$

最後の項は三次であるから0と近似的に見做し、且dxdyで除すと

$$\frac{\partial Mx}{\partial x}+\frac{\partial Myx}{\partial y}=Vx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

同様x軸に平行なる軸に就いて考へると(2)式においてxとyを入れ更へると良い。

$$\frac{\partial My}{\partial y}+\frac{\partial Mxy}{\partial x}=Vy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

こゝに捩りモーメント（twisting moment, Verdrehungsmoment）と云ふのは垂直斷面內に水平應剪力のモーメントである。

互ひに直角な斷面における應剪力は相等しいから

$$Mxy=Myx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(2)式及(3)式を(1)式に代入し、更に(4)式の關係を適用すると

$$\frac{\partial^2 Mx}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 Mxy}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 My}{\partial y^2}=-\omega \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

等質平版に彎曲前に、垂直に描かれた各直線は彎曲後もやはり直線であるならば、垂直斷面內の直應力（normal tresses）と應剪力（shearing stresses）は版厚を通じ直線的變化をして分布せられ、版底及版表に於ける應力は等大異號にして版中央では零である、即ち中央水平斷面は中立面となる。底面に於けるx方向の應張力をσx. y方向の應張力をσy xy方向の應剪力をτxyとすれば、これらは桁の場合と同様にモーメントを斷面係數で除すれば良ろしい、即ち

$$\sigma x=\frac{6Mx}{h^2},\quad \sigma y=\frac{6My}{h_2}\quad \tau xy=\frac{6Mxy}{h^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

次にモーメントと變形の關係を考へる[3]。第3圖(a)(b)に於いて變形は曲率で計られるから

x方向に於ては　$-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

y方向に於ては　$-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

又(c)に於ては捩り（twist）は$-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$で計られる。

My及Mxyの作用なくMxのみに依る曲率はx方向において　$-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$であるが單位巾の厚さhの矩形斷面の場合に於けると同様に次の如く表はされる。

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{Mx}{EIx}=\frac{12Mx}{Eh^3}$$

長さの方向の伸び（extension）に伴ふ横方向の縮み(Contraction）の關係はポワソン比μが示すのであつて、このx方向曲率にはその$-\mu$倍に等しいy方向の曲率を伴ふがMxが$-\partial^2 z/\partial x\partial y$型の捩りを起すことはない。

全く同様にして曲げモーメントMyを表はすことが出來る、かくして2つの曲げモーメントの合效果として次式(7)(8)を得

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{12}{Eh^3}(Mx-\mu My) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{12}{Eh^3}(My-\mu Mx) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

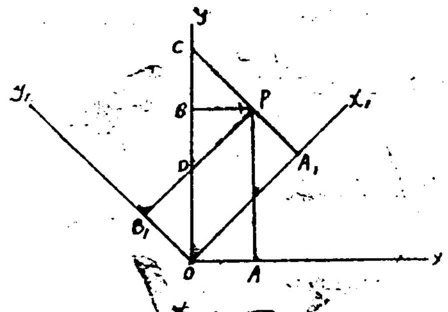
次に捩りモーメントの作用を考へる。$\angle xox_1=45^0$なる様に新直角座標x_1y_1を考へる(第5圖)、而るときは

$OA=x \qquad OA_1=x_1$

$OB=y \qquad OB_1=y_1$

$x=OA=BP=BC \quad \therefore OC=x+y$

$X_1=OA_1=CA_1 \quad \overline{CA_1}^2+\overline{OA_1}^2=\overline{OC}^2$



第5図

即ち　$2X_1^2=(X+Y)^2 \qquad X_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$

同樣にして　$Y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y)$

今函數fを考へて

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)$$

この結果は新舊座標間に成立する operator $\frac{\partial}{\partial X}$に關する statement である即ち

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial y_1}\right)$$

同樣にして

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial y_1}\right)$$

從つて dfferential opefation を組合せると

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial z}{\partial y_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right)$$

$Mx=0 \quad My=0 \quad Mxy\neq 0$と云ふ條件は$x_1$及び$y_1$方向に於いては

$Mx_1=Mxy \quad My_1=-Mxy \quad Mx_1y_1=0$と云ふ條件と equivalent であるからこれらの値をxをx_1に、yをy_1に變へた(7)及(8)式に入れて

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}=\frac{12}{Eh^3}(Mx_1-\mu My_1)$$

$$-\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}=\frac{12}{Eh^3}(My_1-\mu Mx_1)$$

兩者の差を造り

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}=\frac{12}{Eh^3}(My_1-Mx_1-\mu Mx_1+\mu My_1)$$

而して　$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}=2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

又　$My_1-Mx_1=-Mxy-Mxy=-2Mxy$

且つ　$\mu(-Mx_1+My_1)=-2\mu Mxy$

故に　$2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{12}{Eh^3}(Mxy+\mu Mxy)$

即ち　$-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{12(1+\mu)}{Eh^3}Mxy$ ……………………………………(9)

更に同樣な方法を續けて

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^2 z=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial z^2}{\partial x_1 y_1}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right)=0$$

同じく $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

この結果は捩りモーメントMxyは曲率$-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$に何等影響を與へぬものなることを證明してゐる。

上記(7)(8)(9)の3式はMx, My, Mxyの組合せ效果を表はす。

こゝで便宜上板の剛率又は曲げ剛さと稱せられる係數Nを誘導する。

$$N=\frac{E}{1-\mu^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad \cdots\cdots(10)$$

この量を用ひると、(7)(8)(9)式からモーメントを夫々次の形で表はしうる。

$$Mx=N\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \quad \cdots\cdots(11)$$

$$My=N\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \quad \cdots\cdots(12)$$

$$Mxy=-N(1-\mu)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \quad \cdots\cdots(13)$$

此等の諸式を(5)式に入れると、平版の彈性方程式として、1811年 Lagrange が誘いた式を得る。仍ち(11)式をX に就いて2度偏微分し

$$\frac{\partial^2 Mx}{\partial x^2}=N\left(-\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}-\mu\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}\right)$$

(13)式をx及yで偏微分し且2倍すると

$$2\frac{\partial^2 Mxy}{\partial x\partial y}=-2N(1-\mu)\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}$$

(12)式をyにて2度偏微分し

$$\frac{\partial^2 My}{\partial y^2}=N\left(-\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}-\mu\frac{\partial^4 z}{\partial x\ \partial y^2}\right)$$

上式を加へ合はせて

$$\frac{\partial^2 Mx}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 Mxy}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 My}{\partial y^2}=N\left(-\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}-2\frac{\partial^4 z}{\partial^2 x\partial y^2}-\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right)=-\omega$$

依つて

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+2\frac{\partial xz}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}=\frac{\omega}{N} \quad \cdots\cdots(14)$$

Laplacés Operator の2元に對するものを用ひて

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \cdots\cdots(15)$$

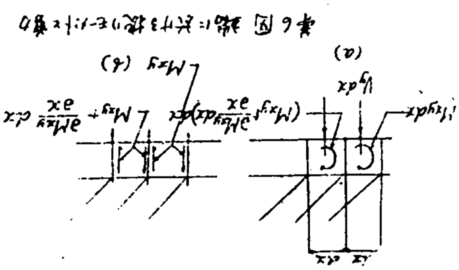
とすると Lagrange の方程式は次の如き簡易な形となる

$$N\Delta^2 z=\omega \quad \cdots\cdots(16)$$

次に垂直剪力を撓みの項を以て表はすには(11)(12)(13)の各式を(2)(3)の式に代入して

$$\left.\begin{aligned} Vx&=\frac{\partial Mx}{\partial x}+\frac{\partial Myx}{\partial y}=-N\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(1-\mu)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right\}\\ &=-N\left\{\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right\}=-N\frac{\partial\Delta z}{\partial x} \quad \cdots\cdots\\ \text{同様にして}\quad Vy&=-N\frac{\partial\Delta z}{\partial y} \quad \cdots\cdots \end{aligned}\right\}(17)$$

第6圖は平版の端部の狀態を示すものである、(a)圖の捩りモーメントは水平剪斷力に依り生ずるものである。これらモーメントは鉛直剪斷力の偶力と平衡を持す。



2つのブロックの境界に於ける2つの垂直力は $\partial Mxy/\partial x_1 dx$ に等しい餘剩上向力 (Surplus upward force) を殘すから即ち單位長につき $\partial Mxy/\partial x$ である。端部に於ける垂直剪力て捩りモーメントに關する考察は1867年Kelvin と Tait に依り理論化された[4]。端における垂直剪力と捩りモーメントの組合せは垂直諸力の組合せに等しいこれらを以て第1に上向分布反力を表はすと

$$Ry = Vy + \frac{\partial Mxy}{\partial x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

第2に版左端の上向集中力は該點の Mxyの値に等しい y軸に平行な版端に於て、Xの値の正側においての分布上反力は、同樣な方法に依つて

$$Rx = Vx + \frac{\partial Mxy}{\partial y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

上記2端の直角交隅にては、各端より Mxy の上向力が與へられるから、全集中力として 2Mxyとなる。

平版普通理論における解法とは(11)(12)(13)(17)(18)(19)等の各式を用ひて表はされた境界條件を滿足する Lagrange の方程式(16)の解を見出すことである[5]。

註3. A. Nadai: Elastishe Platten S25以下又は Timoshenko: Theory of Plate and Shells P 39～49 參照

註4. Thomson (Lord Kelvin) and Tait; Natural Philosophy 1867 arts 645—648

註5. Lagrange の偏微分方程式の解法は2つに大別し得る第1法としては(16)式 $\Delta^2 z=\frac{\omega}{N}$ の一般解が $\Delta^2 z=\frac{\omega}{N}$ の特解と $\Delta^2 z=0$ の一般解との和を以てあらはされるから、先づなるべく簡單であつて都合の良い特解を選び、$\Delta^2 z=0$ の一般解中の未定積分係數を兩解の和が境界條件を滿足する樣決定するのである。

$\Delta^2 z=0$ の解は複調和函數と云はれるものでこの4次の微分方程式を下の樣を表はす2次の微分方程式の形に直し一般解を求めるが便利なこともある、即ち $(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)(\partial^2\omega/\partial x^2+\partial^2\omega/\partial y^2)=0$ の形であるこれは H. Marcus に依り試みられてゐる。かくて第1法の結果は通常單式無限級數を以て表はれるのであるが周邊條件が簡單で Naviers boundary Condition が滿足さるゝ如き場合 Levy's method に依り比較的容易に求まるが、然らざる場合は相當複雜である。

第2法は、先づ最初に周邊條件を滿足する撓度の式を假定し、其の中に含まれる未定係數を Lagrange の方程式を滿足する如く決定せんとするもので通常複式級數として表はされる、1821年 Navierが先鞭を付けたものであるが其の後多くの學者に依り發展してゐる。殊に我國において井口博士が複式級數を單式級數に換へる方法を考案して以來その收斂性が非常に良くなつた。其の他種々な方法があるが特に注意を要するのは原微分方程式を Differenzengleichung として解く方法で Marcus 等多くの數値計算を爲してゐる。

Timoshenko; Theory of Plate and Shells P9 及びP 113以下參照、井口鹿象；=軸の方向に於ける彎曲剛率不等なる矩形平版の一解法 土木學會誌16卷10號

マルクス著　坪井善勝譯；床版の計算145頁以下

第4節　無限級數の使用

平版の解法にフーリエの級數を始めて使用したのは Navier である。本邦に於ても多くの研究に依る平版解法は基本方程式に於て ω をフーリエ級數に展開して、この係數を境界條件に合ふ樣に定めてゐるから我々には非常になじみ深い考へ方であるが、こゝにウイスタガード氏の記述を中心として之に2、3の人々に依る研究を附加し、平版理論に用ひられるフーリエ級數の智識を明確ならしめる爲先づ單桁における應用から解說する。

今徑間Sなる單桁を考へる。これに數個の集中荷重と P＝P (x) であらはされる分布荷重が作用してゐるとす

る。この際Xは桁の左端からの距離である。剪力$V=V(x)$は集中荷重の作用點では急變するが他の凡ての點で次の關係式が成立する。

$$P=-\frac{dv}{dx}\cdots\cdots(20)$$

かゝる任意の函數Vはフーリエ級數で表はされる。集中荷重の作用點と桁端とを除外すれば、級數はVに收斂する。この形を次の如くする。

$$V_1=\Sigma^n{}_{1\cdot2}\cdots C_n\cos\frac{n\pi x}{S}\cdots\cdots(21)$$

但し$C_1, C_2, C_3, \cdots C_n\cdots$は常數である。

若し函數を收斂せしむる1群の常數の存在を假定するならばこの常數は次式より決定せられる[6]。

$$\int_0^S(V-V_1)\cos\frac{m\pi x}{S}dx=0\cdots\cdots(22)$$

次に
$$\int_0^S\cos\frac{m\pi x}{S}\cos\frac{n\pi x}{S}dx=\begin{cases}0 & n\neq m\text{に對し}\\ \frac{S}{2} & n=m\text{に對し}\end{cases}\cdots\cdots(23)$$

なる關係を用ひて、(21)式のV_1の値を(22)式に代入するときは

$$\int_0^S V\cos\frac{m\pi x}{S}dx=\int_0^S V_1\cos\frac{m\pi x}{S}dx=\int_0^S\Sigma^n{}_{1\cdot2}\cdots C_n\cos\frac{n\pi x}{S}\cos\frac{m\pi x}{S}dx=\frac{S}{2}C_m$$

故に　　$m=1.2.3\cdots\cdots$

$$C_m=\frac{2}{S}\int_0^S V\cos\frac{m\pi x}{S}dx\cdots\cdots(24)$$

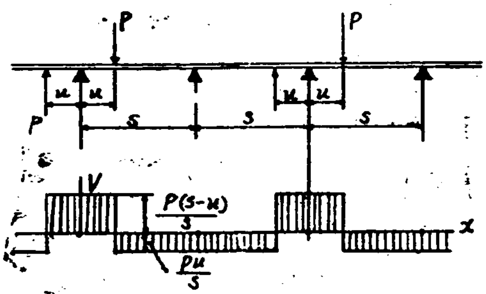
依つて函數Vが既知なるとき凡ての常數は決定せられる。

次に(21)式を微分し符號を變へ之をP_1とすれば

$$P_1=-\frac{dv_1}{dx}=\Sigma^n{}_{1\cdot2}\cdots\frac{n\pi C_n}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}\cdots\cdots(25)$$

之はPが不連續でない凡ゆる點に於て式(20)のPに収斂する。即ち集中荷重がなければ收斂することになるが集中荷重のある場合には發散してしまふ。しかし級數の積分は、矢張り(21)式の符號を變へたものとなり、更に積分を續けるならば、モーメント、slope 撓み等を收斂級數の形で求められるものである。これらの結果に關する限りでは(25)式は發散級數であつたにしろ、桁上の集中及分布の全荷重を表はしてゐるものと言ひ得る。(21)及(25)式に用ひられた級數は函數Vが2Sなる週期を有する週期函數であり、X=OとX=Sの點に於て對稱なる時換言すれば$V(x)=V(-x)$且$(S+X)=V(S-X)$であるならば、$O<X<S$の區間の外でも適用し得る。

函數P_1がこれと同じ週期を持ち、X=O及びX=Sで反對稱 (antisymmetrical) 即ち$P_1(x)=-P_1(-x)$、$P_1(S+x)=-P_1(S-x)$である。これらの函數は$X=0, \pm S$ $\pm 2S$なる點に於て單純支持の連續桁に利用せられる。



第7図　桁における垂直剪力

第7圖の如き場合に於ては(24)(21)(25)の各式を用ひV_1の代りにV_1 P_1の代りPとすれば剪力及荷重がFuriers Series で求められる。仍ち

$0<x<u$　の區間で　$V=\frac{P(S-u)}{S}$

$u<x<s$　〃　$V=-\frac{Pu}{S}$

(24)式より

$$C_m=\frac{2}{S}\int_0^S V\cos\frac{m\pi x}{S}dx=\frac{2}{S}\left[\int_0^u\frac{P(S-u)}{S}\cos\frac{m\pi x}{S}dx+\int_u^s\frac{-Pu}{S}\cos\frac{m\pi x}{S}dx\right]$$

$$=\frac{S}{m\pi}\cdot\frac{2P}{S}\left[\sin\frac{m\pi u}{S}-\frac{u}{S}\sin m\pi\right]=\frac{2P}{m\pi}\sin\frac{m\pi u}{S}$$

仍ち $C_n=\frac{2P}{n\pi}\sin\frac{n\pi u}{S}$

依つて $V=\Sigma^n{}_{1,2\cdots}C_n\cos\frac{n\pi x}{S}=\frac{2P}{\pi}\Sigma^n{}_{1,2\cdots}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi u}{S}\cos\frac{n\pi x}{S}$ ……(26)

又 $P=-\frac{\partial V}{\partial X}=\frac{2P}{\pi}\Sigma^n{}_{1,2\cdots}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{S}\cdot\frac{n\pi}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}$

$$=\frac{2P}{S}\Sigma^n{}_{1,2\cdots}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}\cdots(27)^7$$

この最後の式は平版上の集中荷重をあらはすに用ひられるものである。

註6. 收斂をなさしめる常數群の存在の證明は例へば次書を參照せられ度い。

E. T. Whittaker and S. N. Watson; Modern Analysis, Second edition 1915.p.161.

註7. 集中荷重をフーリエの級數に展開するに先づ集中荷重pが2εの區間に等分布してゐるものと考へε→0の極限を考慮して式と同じ(72)式を導きうる、

ブライヒ；鋼橋の計算(邦譯)上卷52頁～53頁參照

第5節 無限級數を使用した集中荷重を有する版帶の解法

第8圖は±y方向に無限に延びてゐる版帶（Plattensstreifen）でX＝0及X＝Sの2邊で單純支持せられX＝U y＝0 の點で單一荷重Pが作用してゐるとする。

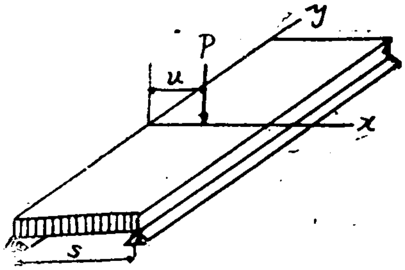
單一荷重Pは(27)式で表はされるPで代表されるものと考へ得る。

yが正なる版上で Lagrange's equation は

$$\Delta^2 Z=0\cdots\cdots(a)$$

となる。この解法を次に說明する[8]。

境界條件は



第8圖

X＝0及X＝Sの兩邊上とy＝∞に於て

$$Z=\Delta Z=0\cdots\cdots(28)$$

これ即ち Moment と Deflection が零なる條件式である。更にy方向にて撓みは對稱でなければならず、又版の兩半分で荷重は2等分されるものと考へられるから

且

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y=0}=0\\&(Vy)_{y=0}=\left(-N\frac{\Delta z}{\partial y}\right)_{y=0}=-\frac{1}{2}P\end{aligned}\right\}(29)$$

扨(a)式の解として

$$Z=\Sigma^n{}_{1,2\cdots}Y_n\sin\frac{n\pi x}{S}\cdots\cdots(b)$$

但しYnはyのみの函數である。

とすれば X＝0及X＝Sに於て(28)式の境界條件を滿足する。

(b)式が(a)式を滿足する爲はYnは次式を滿足しなければならぬ。

$$Y^{IV}{}_n-2\frac{n^2\pi^2}{S^2}Y''{}_n+\frac{n^4\pi^4}{S^4}Y_n=0\cdots\cdots(c)$$

但しY^{IV}_n、Y''_nはYnのyに關する4次及び2次の微係數である。

上式の解として次の形を定める

$$Yn = A_n e^F + B_n Fe^F + C_n e^{-F} + D_n Fe^{-F} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(d)}$$

但し[9], $F = \dfrac{n\pi y}{S}$

而して(28)式後半の條件にて $y=\infty$にて$Yn=0$なるを要する爲

$$A_n = B_n = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(e)}$$

從つて (b) 式は

$$Z = \Sigma^n{}_{1\cdot 2}(Cn+DnF)e^{-F}\sin\frac{n\pi x}{S} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(f)}$$

(29)式前半の條件より

$$C_n = D_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(g)}$$

從つて (f) 式は

$$Z = \Sigma^n{}_{1\cdot 2}\cdots C_n(1+F)e^{-F}\sin\frac{n\pi x}{S} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(h)}$$

(29)式後半の條件は

$$-\frac{1}{2}P = \left(-N\frac{\Delta z}{\partial y}\right)_{y=0}$$

左邊のPを(27)式で置きかへ右邊のZを (h) 式で置きかへると運算の結果

$$C_n = \frac{PS^2}{2\pi^3 Nn^3}\sin\frac{n\pi u}{S} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$[10]

を得る。依つて (h) 式は

$$Z = \frac{PS^2}{2\pi^3 N}\Sigma^n{}_{1\cdot 2}\cdots\frac{1}{n^3}(1+F)e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S} \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(30)}$$

次に鳥念迄に(30)式が(28)式及(29)式の境界條件を滿足するか否か Check して見よう。先づ(30)式は一見して明らかに $X=0$及び$X=\infty$且$y=\infty$に於て$Z=0$となる。　更に

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{PS^2}{2\pi^3 N}\Sigma^n{}_{1\cdot 2}\cdots\frac{1}{n^3}\left[-\frac{n\pi}{S}+\frac{n\pi}{S}-\frac{n\pi y}{S}\,\frac{n\pi}{S}\right]e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}$$

$$= \frac{PS^2}{2\pi^3 N}\Sigma^n{}_{1\cdot 2}\cdots\frac{1}{n^3}\,\frac{-n^2\pi^2 y}{S^2}\,e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}$$

$$= \frac{-P}{2\pi N}\Sigma^n{}_{1\cdot 2}\cdots\frac{1}{n}ye^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(31)}$$

となつて　明らかに　$y=0$に於て$\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$　となる。

(31)式を更に yにて微分すれば

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{P}{2\pi N}\Sigma^n{}_{1\cdot 2}\cdots\frac{1}{n}\left(1-\frac{n\pi y}{S}\right)e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}\cdots\text{(32)}$$

次いで(30)式をxにて微分し

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{PS^2}{2\pi^3 N}\Sigma^n{}_{1\cdot 2}\cdots\frac{1}{n^3}\left(1+\frac{n\pi y}{S}\right)e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\,\frac{n\pi}{S}\cos\frac{n\pi x}{S}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{PS^2}{2\pi^3 N}\Sigma^n{}_{1\cdot 2}\cdots\frac{1}{n^3}\left(1+\frac{n\pi y}{S}\right)e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S},\ \frac{n^2\pi^2}{S^2}\left(-\sin\frac{n\pi x}{S}\right)$$

$$= \frac{P}{2\pi N}\Sigma^n{}_{1\cdot 2}\cdots\frac{1}{n}\left(1+\frac{n\pi y}{S}\right)e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}\cdots\cdots\text{(33)}$$

依つて　$$\Delta Z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial} = -\frac{P}{\pi N}\Sigma^n{}_{1\cdot 2}\cdots\frac{1}{n}e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S} \cdots\cdots\text{(34)}$$

となつて　$X=0$　$X=S$及び$y=\infty$で零となる事明らかとなる。

又(17)式より

$$Vy=-N\frac{\partial\Delta z}{\partial y}=-N\left\{\frac{-P}{\pi N}\Sigma^{n}{}_{1\cdot2}\cdots\frac{1}{n}\ \frac{-n\pi}{S}e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}\right\}$$

$$=-\frac{P}{S}\Sigma^{n}{}_{1\cdot2}\cdots e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}$$

之即ち(29)の條件式を滿す證明である。なんとなれば

$$y=0\text{なるとき}\quad F=\frac{n\pi y}{S}=0\quad \therefore e^{-F}=e^{-0}=1$$

從つて

$$Vy=\frac{-P}{S}\Sigma^{n}{}_{1\cdot2}\cdots\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}$$

となるからである。最後にΔZをXで 2度偏微分して見ると

$$\frac{\partial\Delta z}{\partial X}=-\frac{P}{NS}\Sigma^{n}{}_{1\cdot2}\cdots e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\cos\frac{n\pi x}{S}$$

$$\frac{\partial^2\Delta z}{\partial x^2}=\frac{P\pi}{NS^2}\Sigma^{n}{}_{1\cdot2}\cdots ne^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}$$

同樣　ΔZをyで2度微分した結果は

$$\frac{\partial^2\Delta z}{\partial y^2}=-\frac{P\pi}{NS^2}\Sigma^{n}{}_{1\cdot2}\cdots ne^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}$$

仍ち

$$\frac{\partial^2\Delta z}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2\Delta z}{\partial^2 x}$$

故に

$$\Delta^2 Z=0$$

が成立する。

Nadaiは次の如き函數φを導いて解析的處理を簡明ならしめてゐる。[11]　即ち

$$\varphi=N\Delta Z=-\frac{P}{\pi}\Sigma^{n}{}_{1\cdot2}\cdots\frac{1}{n}e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

かくするとき方程式(32)(33)及$\partial^2z/\partial x\partial y$は次の如く簡單な形をとる。

$$2N\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{P}{\pi}\Sigma^{n}{}_{1\cdot2}\cdots\frac{1}{n}\left(1+\frac{n\pi y}{S}\right)e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}$$

而して　$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{P}{\pi}\Sigma^{n}{}_{1\cdot2}\cdots\frac{1}{n}\left(\frac{-n\pi}{S}\right)e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}$$

$$=\frac{P}{\pi}\Sigma^{n}{}_{1\cdot2}\cdots\frac{1}{n}\left(\frac{n\pi}{S}\right)e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}$$

なる故に　$$2N\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{P}{\pi}\Sigma^{n}{}_{1\cdot2}\cdots\frac{1}{n}e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}$$

$$-\frac{P}{\pi}\Sigma^{n}{}_{1\cdot2}\cdots\frac{1}{n}\ \frac{n\pi y}{S}e^{-F}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi x}{S}=\varphi-y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\quad\cdots\cdots(37)$$

同樣にして　$$2N\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\varphi+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

又　$$2N\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

依つて(11)式は $Mx=N\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{-1}{2}\left\{\left(\varphi-y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\mu\left(\varphi+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right\}$

$$=-\frac{1+\mu}{2}\varphi+\frac{1-\mu}{2}y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdots\cdots(40)$$

同樣に

$$My=-\frac{1+\mu}{2}\varphi-\frac{1-\mu}{2}y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdots\cdots(41)$$

$$Mxy=-\frac{1-\mu}{2}y\frac{\partial\mu}{\partial x}\cdots\cdots(42)$$

註8 Timoshenko; Theory of Plates and Shells P 167以下參照

註9 $F=n\pi y/S$ と置いたのは單に印刷上の都合に依る。故にe^{-F}以外の場合はFと代置しないことにした。

註10 Timoshcuko は線荷重のZを求めその特別の場合として(30)式を導いてゐる。線荷重の C_n は

$$C_n=\frac{g_0 S^3}{\pi^4 N n^4}\sin\frac{n\pi u}{S}\sin\frac{n\pi\varepsilon}{S}$$

でこゝに q_0 は線荷重の單位强度εは分布中の半分である。故に

$$2bq_0=P\quad \sin\frac{n\pi\varepsilon}{S}\approx\frac{n\pi\varepsilon}{S}$$

とすれば (i) 式と同じ結果を得る事勿論である。

Timoshenko; 前掲載書P170參照

註11 A. Nadai; Die Elastische Platten S86

第6節 有限形にて表はされた Nadai の解の證明

Nadai は複素數の變數を有する函數を含む演繹的方法 (deductive Process) に依つて (36) 式乃至(42)式中の函數φを有限形にて表はすことに成功した。12

こゝにその方法を記述し證明してみる。

今座標の原點を徑間の中央に置く(第2圖參照)。この時端邊は$X=\pm\frac{S}{2}$であらはされる。荷重の作用點は

$X=-V=-\frac{S}{2}+u,\ y=0$

而るとき Nadai に依りあらはされたるφは

$$\varphi=N\Delta Z=\frac{P}{4\pi}\log\frac{B}{A}\cdots\cdots(43)$$

玆に

$$A=\cosh\frac{\pi y}{S}+\cos\frac{\pi(x-v)}{S}\cdots\cdots(44)$$

$$B=\cosh\frac{\pi y}{S}-\cos\frac{\pi(x+v)}{S}\cdots\cdots(45)$$

方程式(43)中のφは(36)式中のφと等しいものである。(但し新座標に對應する如く書きかへられてゐる) 故に次の條件を滿足する必要がある。

1. Pの作用點以外のあらゆる點に於て $\Delta\varphi=0$ なること。
2. $X=\pm S/2$及び $y=\infty$に於て $\varphi=0$ なること。
3. 荷重の周圍の小圓の範圍内における全垂直剪力は $-P$たること。

第1の證明

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X}=\frac{\partial\varphi}{\partial A}\cdot\frac{\partial A}{\partial X}+\frac{\partial\varphi}{\partial B}\ \frac{\partial B}{\partial X}\quad なるに依り$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A}=\frac{P}{4\pi}\ \frac{\partial}{\partial A}\left(\log\frac{B}{A}\right)=-\frac{P}{4\pi A}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial B}=\frac{P}{4\pi B}$$

$$\frac{\partial A}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial X}\left\{\mathrm{Cosh}\frac{\pi y}{S}+\mathrm{Cos}\frac{\pi(x-v)}{S}\right\}=-\frac{\pi}{S}\sin\frac{\pi(x-v)}{S}$$

$$\frac{\partial B}{\partial X}=\frac{\pi}{S}\sin\frac{\pi(v+x)}{S}$$

$$\therefore\frac{\partial\varphi}{\partial X}=\frac{P}{4\pi A}\ \frac{\pi}{S}\sin\frac{\pi(x-v)}{S}+\frac{P}{4\pi B}\ \frac{\pi}{S}\sin\frac{\pi(x+v)}{S}$$

$$=\frac{P}{4S}\left(\frac{\sin\frac{\pi(x+v)}{S}}{B}+\frac{\sin\frac{\pi(x-v)}{S}}{A}\right)\cdots\cdots(46)$$

同様にして　$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{P}{4S}\sinh\frac{\pi y}{S}\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\cdots\cdots(47)$$

更に　$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2}=\frac{P}{4S}\ \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\sin\frac{\pi(x+v)}{S}}{B}+\frac{\sin\frac{\pi(x-v)}{S}}{A}\right)$$

$$=\frac{P}{4S}\left(\frac{\frac{\pi}{S}\cos\frac{\pi(x+v)}{S}B-\frac{\pi}{S}\sin^2\frac{\pi(s+v)}{S}}{B^2}+\frac{\frac{\pi}{S}\cos\frac{\pi(x-v)}{S}A+\frac{\pi}{S}\sin^2\frac{\pi(x-v)}{S}}{A^2}\right)$$

而して分子第1項は運算の結果

$$\text{第1項}\quad=\frac{\pi}{S}\left\{\cos\frac{\pi(x+v)}{S}\cosh\frac{\pi y}{S}-1\right\}$$

同様に

$$\text{第2項}\quad=\frac{\pi}{S}\left\{\cos\frac{\pi(x-v)}{S}\cosh\frac{\pi y}{S}+1\right\}$$

依つて　$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\pi P}{4S^2}\left(\frac{\cos\frac{\pi(x+v)}{S}\cosh\frac{\pi y}{S}-1}{B^2}+\frac{\cos\frac{\pi(x-v)}{S}\cosh\frac{\pi y}{S}+1}{A^2}\right)$$

更にyにて2度微分すれば全く同様の操作に依り上式右邊に(−1)を乗じたものを得る。即ち

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\qquad\therefore\Delta\varphi=0$$

となる。

第2の證明

$X=\pm\frac{S}{2}$ なれば(44)(45)兩式において

$$\cos\frac{\pi(\pm\frac{S}{2}-V)}{S}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}-\frac{V}{S}\pi\right)=-\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}+\frac{V}{S}\pi\right)$$

なれば　$A=B$

となり從つて(43)式は

$$\varphi=\frac{P}{4\pi}\log 1=0$$

又(44)(45)式にて　yが限りなく增大すれば

$$\cosh Z=\infty$$

となり $\frac{B}{A}$ は1に限りなく近づく。即ち $\varphi=0$ が成立する。

第3の證明

今 $\cos\lambda$ $\cosh\beta$ を展開すれば

$$\cos\lambda=1-\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^4}{4!}-\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^\gamma\frac{\lambda_{2\gamma}}{2\gamma!}$$

$$\cosh\beta=1+\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{\beta_{2\gamma}}{2\gamma!}$$

なる故 λ. β が小なる値なる時は近似的に

$$\cos\lambda\fallingdotseq 1-\frac{\lambda^2}{2}$$

$$\cosh\beta\fallingdotseq 1+\frac{\beta^2}{2}$$

從つて點（$X=-V$, $y0$）の極極近傍 於て、即ち $X+V$ 及 y が極く小なる値である時は(45)式は次の簡易形となる。

$$B=\cosh\frac{\pi y}{S}-\cos\frac{x(\pi+v)}{S}=1+\frac{\pi^2y^2}{2S^2}-1+\frac{\pi^2(x+v)^2}{2S^2}=\frac{\pi^2}{2S^2}\{y^2+(X+V)^2\}$$

$$=\frac{\pi^2\gamma^2}{2S^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

但し $r=\sqrt{y^2+(X+V)^2}$ にして即ち點（$-V$, 0）と點（X, y）との距離である。扨 log A はこの近傍に於て比較的緩慢なる變化をするに引きかへて logB は數的にも大にして且急激なる變化をする故點（$X=-V$, $y=0$）に於ては A の値を次の如くなしうる。

$$A=1+\cos\frac{2\pi V}{S}=2\cos^2\frac{\pi V}{S}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

$\therefore y=0$ なれば $\cosh\frac{\pi y}{S}=1$

$X=-V$ なれば $\cos\frac{\pi(x-v)}{S}=\cos\frac{2\pi v}{S}$

故に (43)式の代りに荷重作用點よりの距離 γ が小なる時は次の形となる。

$$\varphi=\frac{P}{4\pi}\log\frac{B}{A}=\frac{P}{4\pi}\log\frac{\frac{\pi^2\gamma^2}{2S^2}}{2\cos^2\frac{\pi V}{S}}=\frac{P}{4\pi}\log\left(\frac{\pi\gamma}{2S\cos\frac{\pi V}{S}}\right)^2$$

$$=\frac{P}{2\pi}\log\frac{\pi\gamma}{2S\cos\frac{\pi V}{S}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

垂直剪應力を表はす(17)式は φ を用ひると

$$V_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial X}\quad V_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

從つて半徑ヴクトル (radius Vlctor) γ に直角な斷面內の垂直剪應力は

$$V_\gamma=-\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}$$

そこで(50)式を γ で微分すると

$$V_\gamma=-\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}=-\frac{P}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\mathrm{Bog}\frac{\pi\gamma}{2S\cos\frac{\pi V}{S}}\right)=-\frac{P}{2\pi\gamma}$$

これ即ち半徑 γ の小圓上の全剪力が $-P$ なることを證明するものである。
かくて凡ての必要條件が滿足されたこととなる。

註12 A. Nadai; Die Elastische Platten S89　　2603. 9. 16