論 說 報 告

支距面積算定式の檢討並びに新公式の誘導

正會員 高 見 太 一*

細長い地域の境界を曲線と考へて $y=f(x)$ とおけば面積は $F=\int_{x_0}^{x} f(x)dx$

x_0-x をn等分し $x=nl$ とおけば $dx=l.dn$

$$\therefore\ F=\int_0^n f(x_0+nl)\,l.dn$$

之を展開すれば

$$F=l\int_0^n\Big[f(x_0)+nf'(x_0)+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}f''(x_0)+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}f'''(x_0)+\cdots\cdots+f^{(n)}(x_0)\Big]dn$$

積分して

$$F=l\Big[n(f(x_0)+\frac{n^2}{2}f'(x_0)+\frac{1}{\underline{|2}}\Big(\frac{n^3}{3}-\frac{n}{2}\Big)f''(x_0)+\frac{1}{\underline{|3}}\Big(\frac{n^4}{4}-n^3+n\Big)f'''(x_0)+\frac{1}{\underline{|4}}\Big(\frac{n^5}{5}-\frac{3n^4}{2}+\frac{11}{3}n^3-3n\Big)f^{(4)}(x_0)+\frac{1}{\underline{|5}}\Big(\frac{n^6}{6}-2n^5+\frac{35}{4}n^4-\frac{50}{3}n^3+12n^2\Big)f^{(5)}(x_0)+\cdots\cdots\Big]$$

而して

$$f'(x_0)=f(x_0+1)-f(x_0)=y_1-y_0$$

$$f''(x_0)=f'(x_0+1)-f'(x_0)=f(x_0+2)-f(x_0+1)-f'(x_0)=y_2-2y_1+y_0$$

$$f'''(x_0)=y_3-3y_2+3y_1-y_0$$

一般に $f^{(r)}(x_0)=y_r-ry_{r-1}+\frac{r(r-1)}{\underline{|2}}y_{r-2}-\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^r y_0$

$$\therefore\ F=l\Big[ny_0+\frac{n^2}{2}(y_1-y_0)+\frac{1}{\underline{|2}}\Big(\frac{n^3}{3}-\frac{n}{2}\Big)(y_2-2y_1+y_0)+\frac{1}{\underline{|3}}\Big(\frac{n^4}{4}-n^3+n\Big)(y_3-3y_2-3y_1+y_0)+\frac{1}{\underline{|4}}\Big(\frac{n^5}{5}-\frac{3}{2}n^4+\frac{11}{3}n^3-3n^2\Big)(y_4-4y_3+6y_2-y_1+y_0)+\frac{1}{\underline{|5}}\Big(\frac{n^6}{6}2n^5+\frac{35}{4}n^4-\frac{50}{3}n^3+12n^2\Big)(y_5-5y_4+10y_3-10y_2+5y_1-y_0)+\cdots\cdots\cdots\Big]$$

此の一般式に就いて

$n=1$ とおけば $F=\frac{y_0+y_1}{2}l$ となり之をn區劃についてまとめれば梯形公式

$$A=\frac{1}{2}\Big\{y_0+y_n+2(y_1+y_2+y_3+\cdots\cdots+y_{n-1})\Big\}$$

を得る。

$n=2$ とおき曲線を2次抛物線と考へれば $F=\frac{1}{3}(y_0+4y_1+y_2)$ となり之をn區劃についてまとめれば Simpson $\frac{1}{3}$ 公式

$$A=\frac{1}{3}\Big\{y_0+y_n+4(y_1+y_3+y_5+\cdots\cdots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+y_6+\cdots\cdots y_{n-2})\Big\}$$

を得る。

$n=3$ とおけば $F=\frac{3}{8}l(y_0+3y_1+3y_2+y_3)$ となり之をn區劃についてまとめれば Simpson $\frac{3}{8}$ 公式を得る。

$n=4$ とおいて得たる公式

$n=6$ とおいて得た Eddel 公式

其の他に Poncelet の公式 Francke の公式等あるも一般に實用に供されてゐるのは梯形公式と Simpson $\frac{1}{3}$ 公式とであらう。

依つて此處にこの二つの公式について其の精度を檢討して更に好都合な公式を誘導して見ようと思ふ。

梯形公式は各區劃を梯形として算出したものであるから境界が曲線なる場合には常に誤差を伴ひ、凸形の地にては實際面積よりも小なる値が得られ凸形の地にては過大な値が得られる。Simpson $\frac{1}{3}$ 公式は境界を2次抛物線と考へて2區劃毎に面積を求めて合計して得られたものであるから其の結果は常に梯形公式に比して正確に近い値が得られる事は明らかであるが然し此の公式も絶對に正しいものであると考へてはならい。

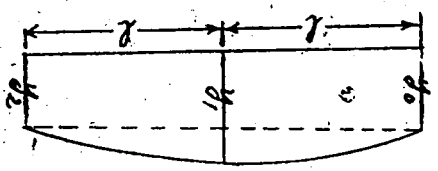
* 工學士 哈爾濱 工業大學教授

今境界線を他の種類の曲線と考へて面積算定式を導いて見よう。前述の一般式によらず部分的に積分して得た結果をまとめて求めて見る。

(a) 境界線を3次拋物線と考へた場合

圖—1　$A_1=\frac{y_0+y_1}{2}\times 2l+\frac{3}{4}\left(y_2-\frac{y_0+y_2}{2}\right)\times 2l=\frac{1}{4}(y_0+6y_1+y_2)$

1 — 図



之を n區劃についてまとめれば

$$A=\frac{1}{4}\left\{y_0+y_n+6(y_1+y_3+y^5+\cdots\cdots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+y_6+\cdots\cdots+y_{n-2})\right\}$$

今假りに之を $\frac{1}{4}$ 公式と名づけておく。

(b) 境界を　$y=x^{\frac{5}{2}}$ なる曲線と考へた場合

圖—1　$A_1=\frac{y_0+y_2}{2}\times 2l+\frac{5}{7}\left(y_1-\frac{y_0+y_2}{2}\right)\times 2l=\frac{2}{7}l(y_0+5y_1+y_2)$

之を n區劃についてまとめれば

$$A=\frac{2l}{7}\left\{y_0+y_n+5(y_1+y_3+y_5+\cdots\cdots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+y_6+\cdots\cdots+y_{n-2})\right\}$$

今假りに之を $\frac{2}{7}$ 公式と名づけておく。

(c) 境界を　$y=x^{\frac{3}{2}}$ なる曲線と考へた場合

圖—1　$A_1=\frac{y_0+y_2}{2}\times 2l+\frac{3}{5}\left(y_1-\frac{y_0+y_2}{2}\right)\times 2l=\frac{2}{5}l(y_0+3y_1+y_2)$

之を n區劃につりてまとめれば

$$A=\frac{2}{5}l\left\{y_0+y_n+3(y_1+y_3+y_5+\cdots\cdots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+y_6+\cdots\cdots+y_{n-2})\right\}$$

今假りに之を $\frac{2}{5}$ 公式と名づけておく。

次に上各種の公式について面積計算の結果を實例について檢討して見よう。

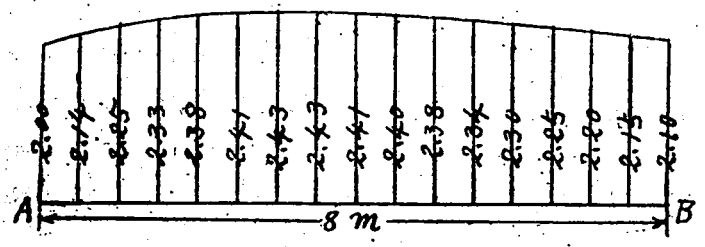


図 — 2

圖—2 について計算した結果を示せば、表—1 の如くである。

	A B (8m) ヲ 2區劃トシタル 面積	A B (8m) ヲ 4區劃トシタル 面積	A B (8m) ヲ 8區劃トシタル 面積	A B (8m) ヲ 16區劃トシタル 面積
梯形公式	17.34	18.28	18.40	18.425
$\frac{2}{5}$ 公式	18.13	18.37	18.42	18.430
$\frac{1}{3}$ 公式	18.32	18.43	18.44	18.433
$\frac{2}{7}$ 公式	18.46	18.47	18.45	18.436
$\frac{1}{4}$ 公式	18.56	18.50	18.46	18.438

上の面積計算の結果を圖表にて示せば　圖—3 の如くであつて面積の近似體は 18.430m² 位と考へられる。

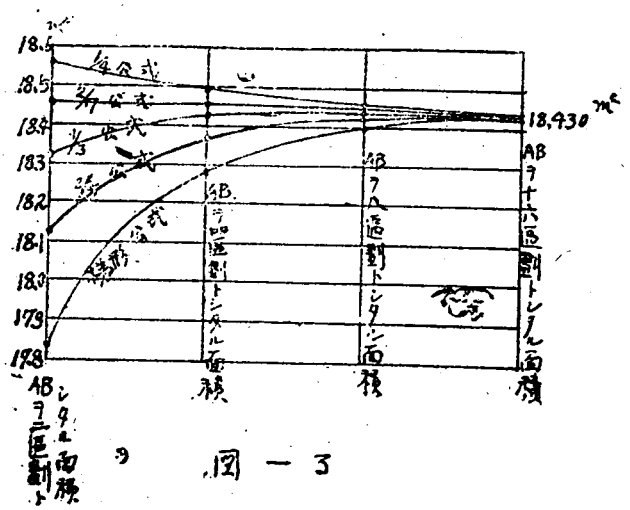


圖 — 3

境界線が各々區劃についてほゞ直線と考へらるゝ場合には圖3の16區劃の場合の如く何れの公式によるも面積に大差はないが Simpson $\frac{1}{3}$ 公式又は $\frac{2}{7}$ 公式が其の中間に位し最も近眞値を與へるものと推定せられる。

境界線が1個の區劃について考へる時尙ほ相當に急なる曲線である場合に於ては圖—3の2區劃の場合の如く梯形公式は最大なる誤差を生ずる故にいけない事は明らかであるが Simpson の $\frac{1}{3}$ 公式によるも尙ほ凸形地に於ては過小値が得らるゝ事は上述の例によつても認められる。此の場合は寧ろ $\frac{2}{7}$ 公式の方が近眞値が得らるゝ事を示してゐる。

更に境界線の一區劃についての曲線形が急なる場合には寧ろ $\frac{1}{4}$ 公式の方が近眞値を與へる事になる譯である。

以上の結果より考ふれば從來用ひられてゐる Simpson $\frac{1}{3}$ 公式は比較的安全にして且つ妥當なる結果の得られる公式であるが境界線を各々一區劃について考へる時一般に急なる曲線である場合には尙ほ凸形地にて過小値凹形地にては過大値を與へる事を考慮しておかねばならない。

次に Simpson $\frac{1}{3}$ 公式は區劃數 n が偶數の場合に限られてゐる故に之を n が任意の整數として適用し得る新らしい公式を誘導して見よう。

圖—4 に於て

二區劃　achf の面積 $=\frac{1}{3}(y_0+4y_1+y_2)$

〃　bdig の面積 $=\frac{1}{3}(y_1+4y_2+y_3)$

〃　cekh の面積 $=\frac{1}{3}(y_2+4y_3+y_4)$

＝區劃　nqvs の面積 $=\frac{1}{3}(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$

$$\Sigma\text{面積}=\frac{1}{3}\left\{(y_0+y_n)+5(y_1+y_{n-1})+6(y_2+y_3+\cdots\cdots+y_{n-2})\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{最初の一區劃abgfの面積}=\frac{y_0+y_1}{2}l\\ \text{最後の一區劃pqvtの面積}=\frac{y_n+y_{n-1}}{2}l\end{array}\right\}\text{梯形と考へ}$$

る故に求むる面積を A とすれば倍面積は

$$2A=\frac{1}{3}\left\{(y_0+y_n)+5(y_1+y_{n-1})+6(y_2+y_3+y_4+\cdots\cdots+y_{n-2})\right\}+\frac{y_0+y_1}{2}l+\frac{y_n+y_{n-1}}{2}l$$

$$=\frac{1}{6}\left\{5(y_0+y_n)+13(y_1+y_{n-1})+12(y_2+y_3+y_4+\cdots\cdots+y_{n-2})\right\}$$

$$\therefore\ A=\frac{1}{12}\left\{5(y_0+y_n)+13(y_1+y_{n-1})+12(y_2+y_3+y_4+\cdots\cdots+y_{n-2})\right\}$$

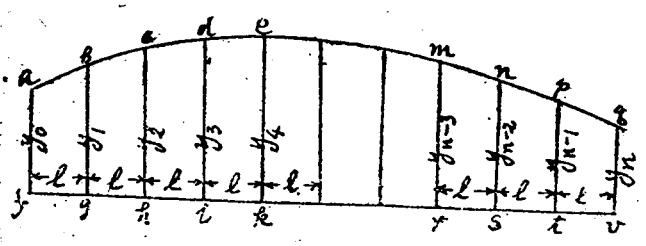


圖 — 4

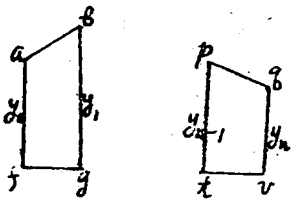


圖 — 5

$$=l\Sigma y-\frac{1}{12}\left\{7(y\ +y_n)-(y_1+y_{n-1})\right\}$$

即ち　$A=l\Sigma y-\frac{1}{12}\left\{7(y_0+y_n)-(y_1+y_{n-1})\right\}$

特殊の場合として　$y_0=0$　$y_n=0$　なる場合に於ては

$$A=l\Sigma y+\frac{1}{12}(y_1+y_{n-1})$$

茲に誘導したる式は區劃數が多い場合には Simpson 氏の $\frac{1}{3}$ 公式とほゞ同程度の精度が得られ且つ區劃數は任意の整數として扱ひ得る。

公式の形は複雜に見ゆるも實際の計算は寧ろ Simpson $\frac{1}{3}$ 公式よりも簡易な感がある。

區劃 n 數が增大するも計算の煩雜さはあまり變らない

唯區劃數 n が少ない場合には少しく誤差をともなふ事を考慮せねばならぬ。

尙ほ茲に誘導したると同樣の手續を以て圖の如き等高線にて圍まれたる地域の面積算定式を求むれば次の如き結果を得る。

$$A=l\Sigma y+\frac{1}{6}l(y_1+y_n)$$ 茲に n は任意の整數とする。

而して之は一般に用ひらるゝ式　$A=l\Sigma y$　よりも少しく大なる値となり正確に近き結果を得ることは勿論である。