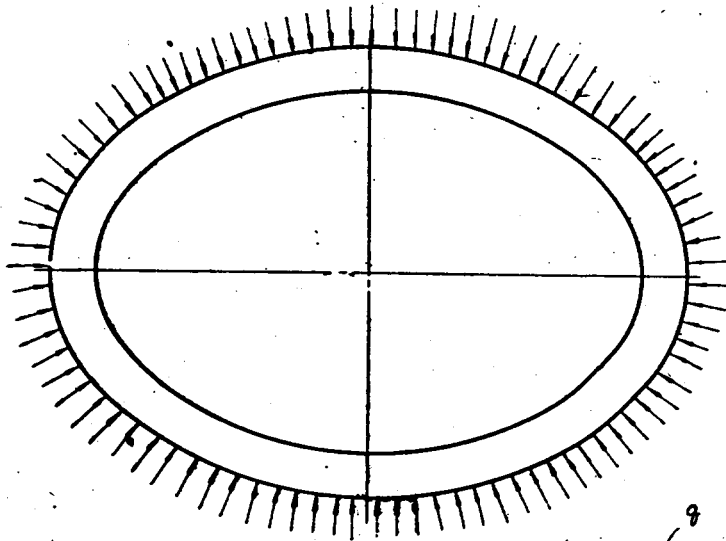


中壁を有せざる楕圓形井筒の解法

第1圖

柴 田 直 光 *



る曲ゲモーメント M は

$$M = Xa - qay + \frac{q}{2}(x^2 + y^2) \quad \dots\dots\dots (1)$$

今直圧力に依る内腸の影響を無

視すれば周知の式

$$\int_A^B \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Xa} ds = 0 \quad \dots (2)$$

を得る。こゝで ds は環軸の微小長である。

然るに(1)式より

$$\frac{\partial M}{\partial Xa} = 1$$

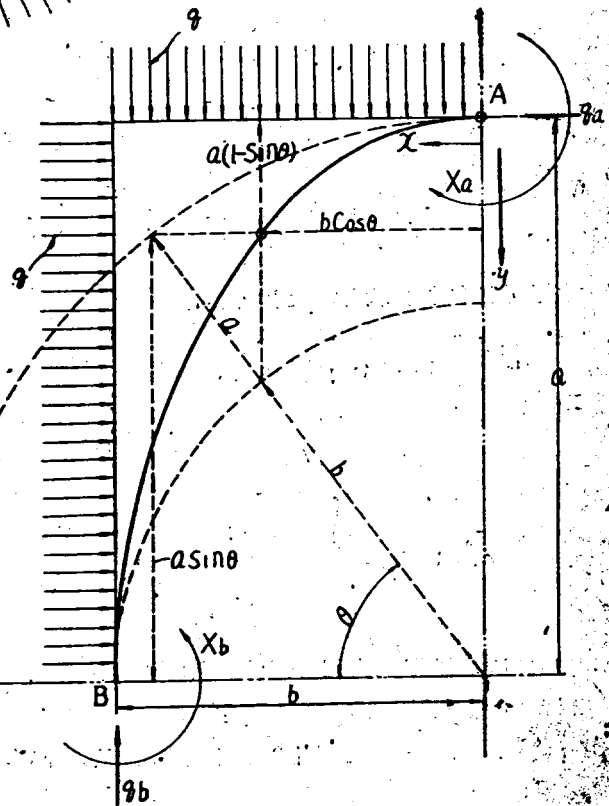
又弾性係数 E を常數とすれば、斷

本文は中壁を有せざる楕圓形井筒の側壁に起る曲ゲモーメントの値を求める近似公式を導出したものであり圖表によつて形づくられた近似解法の解法をも併せ試み、その結果の大差なきを確めたものである。

今第1圖を楕圓形井筒であるとしその周圍に均等なる土壓 q が働いてゐるものとする。

茲で環軸上の各點の曲ゲモーメントを見出さんとするとき、環の斷面を一定とするならば、その解法に用ふる形は全體の $\frac{1}{4}$ をとり考へれば事足りることにより第2圖その不靜定力として A 點に於ける曲ゲモーメント Xa のみを見出せばよいことになる。第2圖に於て A を原點として環軸上の一點 $P(x, y)$ を考へる。 A 點に於ける推力は qa であるから D に於け

第2圖



面の I は一定と假定してあるので (2) 式は

$$\int_A^B M ds = 0$$

上式の M に (1) を代入すれば

$$Xa \int_A^B ds - qa \int_A^B y ds + \frac{q}{2} \int_A^B (x^2 + y^2) ds = 0$$

$$\text{又は } Xa = q \frac{a \int_A^B y ds - \frac{1}{2} \int_A^B (x^2 + y^2) ds}{\int_A^B ds} \quad (2)$$

今楕圓形の x 及 y を心差角 θ によつて示せば第 2 圖により明かなるが如く

$$x = b \cos \theta \quad y = a(1 - \sin \theta)$$

又環軸上の微小長は楕圓の性質から

$$ds = a \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$\text{茲に } k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

これ等の値を用ひて (3) 式の各項の積分を求むれば

$$\int_A^B ds = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$\int_A^B y ds = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$\int_A^B (x^2 + y^2) ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [b^2 \cos^2 \theta + a^2 (1 - \sin \theta)^2] \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

これ等の値を (3) 式に代入してこれを簡単にすれば

$$Xa = q \frac{a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [b^2 \cos^2 \theta + a^2 (1 - \sin \theta)^2] \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta}{a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta}$$

$$= q \frac{1}{2} \cdot (a^2 - b^2) \left[1 - \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta} \right] \quad (4)$$

上式中には所謂第 2 種楕圓積分を含みこれ等の積分値は楕圓函數表から見出すことが出来るが、こゝでは近似式を見出すために次の方法によりこれを取扱つた。

$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}$ をこのまゝ展開して積分すれば收斂が甚だ緩で實用にならないので收斂の急速な級數に變へる必要がある。※

今 $k = \sin \alpha$

と置き且

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad \sin^2 \theta = -\frac{1}{4} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2)$$

なることに留意して

$$\begin{aligned} 1 - k^2 \sin^2 \theta &= 1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta = 1 + \sin^2 \alpha \frac{1}{4} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \\ &= 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \\ &= \left[\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right]^2 - 2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \\ &= \cos^4 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \sin^4 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \\ &= \left[\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) e^{2i\theta} \right] \left[\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) e^{-2i\theta} \right] \\ &= \cos^4 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \left[1 + \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) e^{2i\theta} \right] \left[1 + \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) e^{-2i\theta} \right] \end{aligned}$$

今 $\tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \epsilon^2$ と置けば $\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{1 + \epsilon^2}$

故に $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{1 + \epsilon^2} \left[1 + \epsilon^2 e^{2i\theta} \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 + \epsilon^2 e^{-2i\theta} \right]^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (5)$

而して $k^2 = \sin^2 \alpha = \frac{4 \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{\left[1 + \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right]^2} = \frac{4 \epsilon^2}{(1 + \epsilon^2)^2}$

$$\therefore \epsilon^2 = \frac{2 - 2\sqrt{1 - k^2} - k^2}{k^2}$$

然るに $k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

なるが故に $\epsilon^2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a - b}{a + b} \dots \dots \dots (6)$

又 $(1 + \epsilon^2 e^{2i\theta})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \epsilon^2 e^{2i\theta} - \left(\frac{1}{2 \cdot 4} \right) \epsilon^4 e^{4i\theta} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) \epsilon^6 e^{6i\theta} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \right) \epsilon^8 e^{8i\theta} + \dots$
 $(1 + \epsilon^2 e^{-2i\theta})^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \epsilon^2 e^{-2i\theta} - \left(\frac{1}{2 \cdot 4} \right) \epsilon^4 e^{-4i\theta} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) \epsilon^6 e^{-6i\theta} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \right) \epsilon^8 e^{-8i\theta} + \dots$

邊々相乘じて

$$\begin{aligned} &(1 + \epsilon^2 e^{2i\theta})^{\frac{1}{2}} (1 + \epsilon^2 e^{-2i\theta})^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \epsilon^2 e^{2i\theta} - \left(\frac{1}{2 \cdot 4} \right) \epsilon^4 e^{4i\theta} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) \epsilon^6 e^{6i\theta} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \right) \epsilon^8 e^{8i\theta} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \varepsilon^2 e^{-2\theta i} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \varepsilon^4 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2.4}\right) \varepsilon^6 e^{2\theta i} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right) \varepsilon^8 e^{4\theta i} - \dots \\
& - \left(\frac{1}{2.4}\right) \varepsilon^4 e^{-4\theta i} - \left(\frac{1}{2.4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \varepsilon^6 e^{-2\theta i} + \left(\frac{1}{2.4}\right)\left(\frac{1}{2.4}\right) \varepsilon^8 - \dots \\
& + \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right) \varepsilon^6 e^{-6\theta i} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right) \varepsilon^8 e^{-4\theta i} - \dots \\
& - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\right) \varepsilon^8 e^{-8\theta i} - \dots
\end{aligned}$$

これ等右邊の和を求めるに

$$e^{n\theta i} + e^{-n\theta i} = 2\cos(n\theta)$$

なることに注意すれば

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \varepsilon^2 e^{2\theta i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \varepsilon^2 e^{-2\theta i}\right)^{\frac{1}{2}} \\
& = 1 + \varepsilon^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right) 2\cos(2\theta)\right] \\
& + \varepsilon^4 \left[-\left(\frac{1}{2.4}\right) 2\cos(4\theta) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\
& + \varepsilon^6 \left[\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right) 2\cos(6\theta) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2.4}\right) 2\cos(2\theta)\right] \\
& + \varepsilon^8 \left[-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\right) 2\cos(8\theta) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right) 2\cos(4\theta) + \left(\frac{1}{2.4}\right)\left(\frac{1}{2.4}\right)\right] + \varepsilon^{10} \dots
\end{aligned}$$

これ等の値を(5)式に入れ且整理すれば

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} = B_0 + 2B_1 \cos(2\theta) + 2B_2 \cos(4\theta) + 2B_3 \cos(6\theta) + \dots$$

$$\text{茲に, } B_0 = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^4 + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 \varepsilon^8 + \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 \varepsilon^{12} + \dots\right] \quad (7)$$

$$B_1 = \frac{1}{1+\varepsilon^2} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2.4}\right) \varepsilon^6 - \left(\frac{1}{2.4}\right)\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right) \varepsilon^{10} \dots\right] \quad (8)$$

又一般に

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n\theta) d\theta = 0$$

及て $R \Rightarrow 2$ なるとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos(2n\theta) d\theta = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos(2\theta) d\theta = -\frac{\pi}{8}$$

なることにより

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta = B_0 \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta = B_0 \frac{\pi}{4} + 2B_1 \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{4} (B_0 - B_1)$$

上式の B_0 及 B_1 に(7)(8)式を代入すれば

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon^2} \left[1 + \frac{1}{4} \varepsilon^4 + \frac{1}{64} \varepsilon^8 + \dots\right] \quad (9)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1+\epsilon^2} \left[1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 + \frac{1}{4} \epsilon^4 - \frac{1}{16} \epsilon^6 + \frac{1}{64} \epsilon^8 - \dots \right] \dots (10)$$

上式を(4)式に代入すれば

$$X_a = q \frac{1}{2} (a^2 - b^2) \left[1 - \frac{1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 + \frac{1}{4} \epsilon^4 - \frac{1}{16} \epsilon^6 + \frac{1}{64} \epsilon^8 - \dots}{2 \left[1 + \frac{1}{4} \epsilon^4 + \frac{1}{64} \epsilon^8 + \dots \right]} \right]$$

今 $X_a = qb^2 K_a$ と置き K_a を求めるに $\frac{a}{b} = \xi$ とすれば

$$K_a = \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) \left[2 + \epsilon - \frac{3}{8} \epsilon^6 \frac{1 + \frac{1}{12} \epsilon^4 + \dots}{1 + \frac{1}{4} \epsilon^4 + \dots} \right]$$

而して(6)式より

$$\epsilon^2 = \frac{a-b}{a+b} = \frac{\xi-1}{\xi+1}$$

K_a を ξ のみの函数として

$$K_a = \frac{1}{8} (\xi-1) (3\xi+1) \left[1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{(\xi-1)^2}{(3\xi+1)(\xi+1)^2} (1+\Delta) \right]$$

茲に Δ は 1 に對して甚だ小なる値を示す

ξ	括弧内の値
1.1	1.0000
1.2	0.9999
1.3	0.9996
1.4	0.9992
1.5	0.9986
1.6	0.9979

上式に於て最後の項の値は 1 に非常に近く、 ξ の種々の値に對して次表の如くである。而して實際上用ひらるれ ξ の値は 1.2—1.5 位であり、少くとも 1.6 でなければ側壁の斷面は設計出来ないから、この項を 1 とするも實用上差支へない。その誤差は 0.2% 以下である。よつて K_a は次式によつて示される。

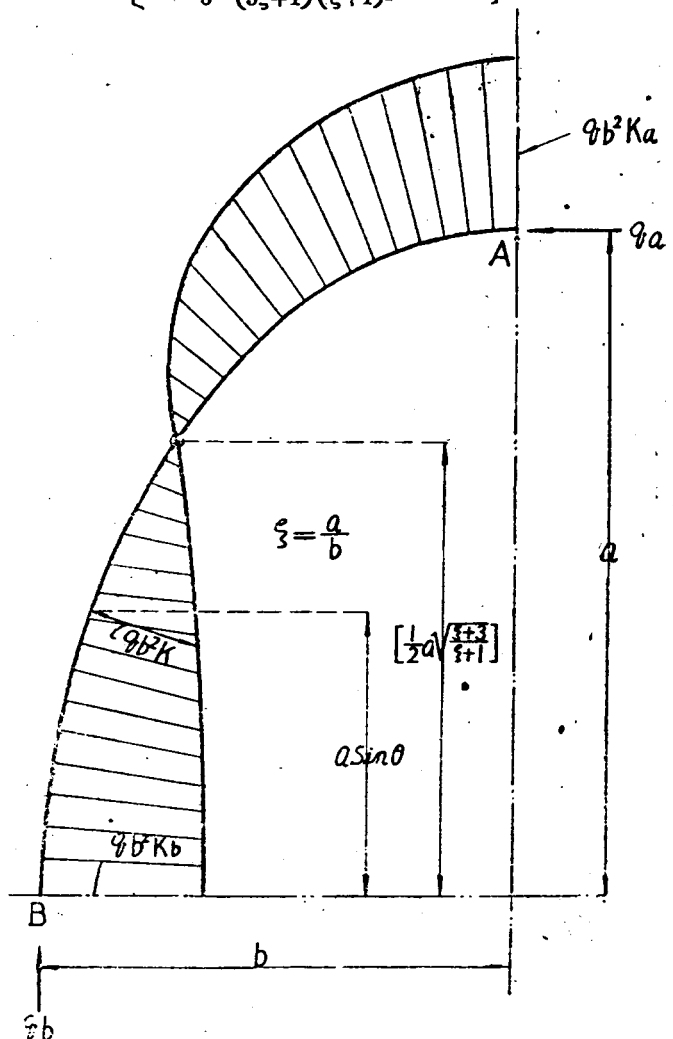
$$K_a = \frac{1}{8} (\xi-1) (3\xi+1) \dots (11)$$

而して $X_a = qb^2 K_a$

更に B に於ける曲ゲモーメント X_b を求むれば

$$\begin{aligned} X_b &= X_a - qa^2 + \frac{q}{2} (a^2 + b^2) \\ &= qb^2 K_b \end{aligned}$$

$$\text{茲に } K_b = K_a - \frac{1}{2} (\xi^2 - 1)$$



$$= -\frac{1}{8}(\xi-1)(\xi+3) \dots \dots \dots (12)$$

又任意點 $[b \cos \theta, a(1-\sin \theta)]$ の曲ゲ

メント M は $M = qb^2K$

$$\text{茲に } K = Ka - \frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(1 - \sin^2 \theta)$$

$$= Kb + \frac{1}{2}(\xi^2 - 1)\sin^2 \theta \dots \dots \dots (13)$$

次に $K=0$ の點即ち反曲點の位置を求める。今この點と楕圓の中心との距離を r とすれば 第4圖 第2圖より

$$r = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

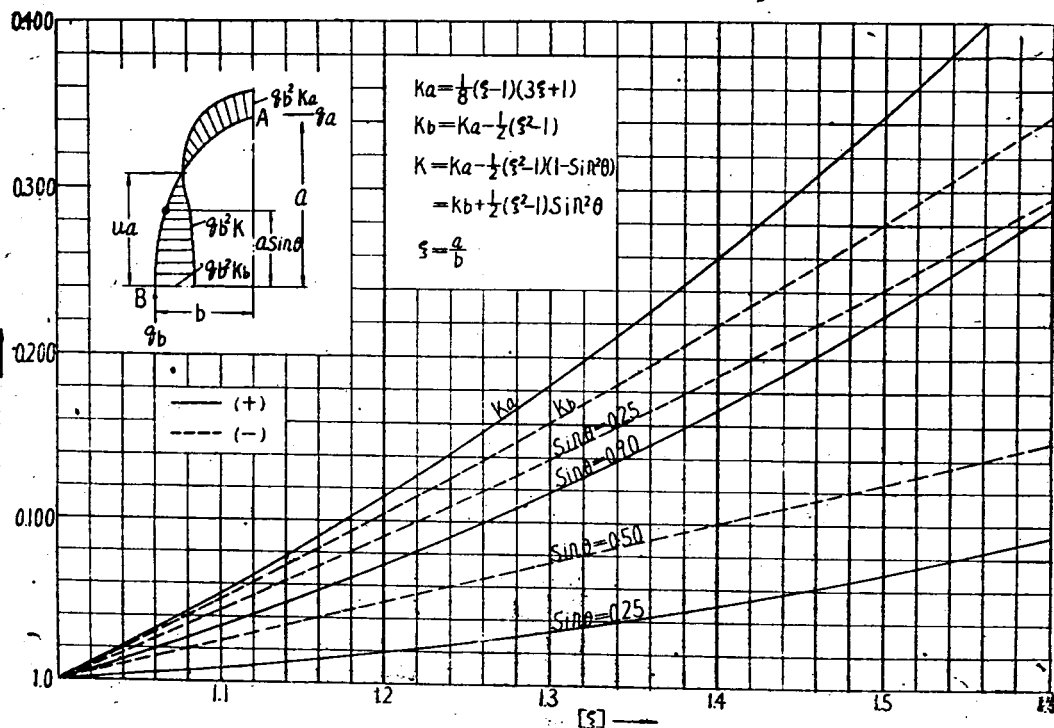
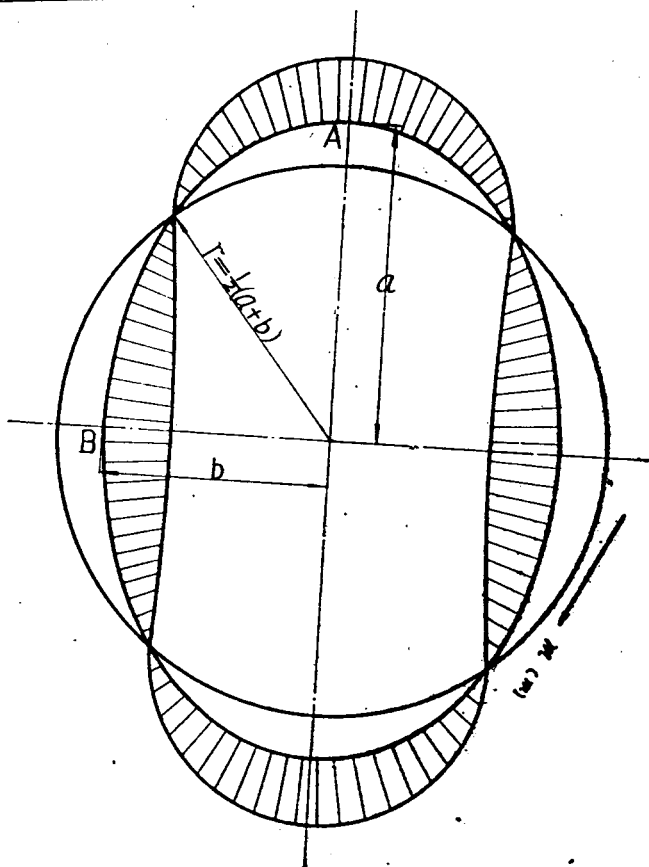
$$= b\sqrt{1 + \sin^2 \theta (\xi^2 - 1)}$$

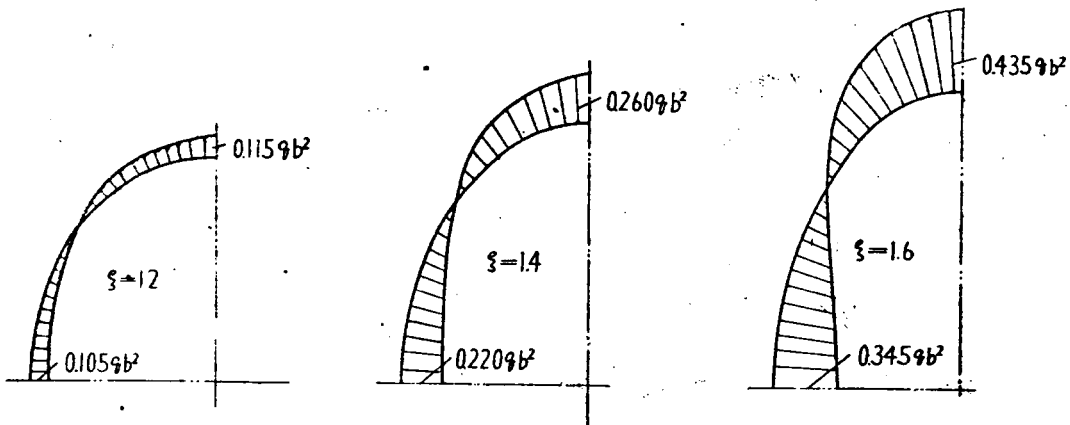
今(13)式を0と置き $\sin^2 \theta$ を求むれば

$$\sin^2 \theta = \frac{\frac{1}{8}(\xi-1)(\xi+3)}{\frac{1}{2}(\xi^2-1)} = \frac{1}{4} \frac{(\xi+3)}{(\xi+1)}$$

r の式に代入して

$$r = b\sqrt{1 + \frac{1}{4}(\xi-1)(\xi+3)} = \frac{b}{2}(1+\xi) \\ = \frac{1}{2}(a+b) \dots \dots \dots (14)$$





即ち反曲點の位置は中心より $\frac{1}{2}(a+b)$ の距離にある。今第4圖に於て0を中心として兩軸の平均長を半径とする圓を畫けばこの圓が精圓を切る點が反曲點である。この解法に於けるこの簡単な關係は甚だ幸運な結果であつた。この圓の存在はモーメントの分布狀態の大約を知るに甚だ便利である。

又各點の推力Nは次式により求めることが出来る。

$$N = qb \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) \sin^2 \theta \right] - \frac{1}{2} \dots \dots \dots (15)$$

以上は純精圓に関する解法であるが、實用上3心又は2心の近似精圓を用ひることが多いのである。この場合、この解法によつて得た値を用ひて差支へないかどうかにかつて一應の検討を試みて置く必要がある。こゝでは第5圖に示すが如き近似精圓を假定して解法に使用したのである。同圖に於ける2つの半径 r_1 及 r_2 を b 及 ξ によつて示せば

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \alpha b & r_2 &= \beta b \\ \alpha &= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) - \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1) \xi \\ \beta &= \frac{1}{2} (3 + \sqrt{3}) \xi - \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

今(3)式に於ける各項の積分値を求むれば

$$\begin{aligned} \int_A^B ds &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} r_1 d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{6}} r_2 d\theta = \frac{\pi}{6} (2r_1 + r_2) \\ \int_A^B y ds &= \int_A^{\frac{\pi}{3}} r_1 (1 - \cos \theta) r_1 d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{6}} (a - r_2 \sin \theta) r_2^2 d\theta \\ &= r_1^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + r_2^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) + \frac{\pi}{6} a r_2 \\ \int_A^B (x^2 + y^2) ds &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [r_1^2 (1 - \cos \theta)^2 + r_1^2 \sin^2 \theta] r_1 d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{6}} [(a - r_2 \sin \theta)^2 + (b - r_2 (1 - \cos \theta))^2] r_2 d\theta \\ &= 2r_1^3 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\pi}{6} r_2 (a^2 + b^2) - 2a r_2^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \right) r_2^2 (b - r_2) \end{aligned}$$

$$X_a = q \frac{\left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \gamma_1^2 (a-r_1) + \left(1 - \frac{3}{\pi}\right) r_2^2 (b-r_2) + \frac{1}{2} \gamma_2 (a^2 - b^2)\right)}{2r_1 + r_2} = qb^2 K_a$$

上式に(16)式の α 及 β の値を代入しこれを簡単にすれば

即ち(17)式によつて近似精圓のKaの値を求めることが出来るこの値と(11)式によつて求めた値との比較は次表及第3圖表によつて示された如く大差を有するものでないことが明かになつた。

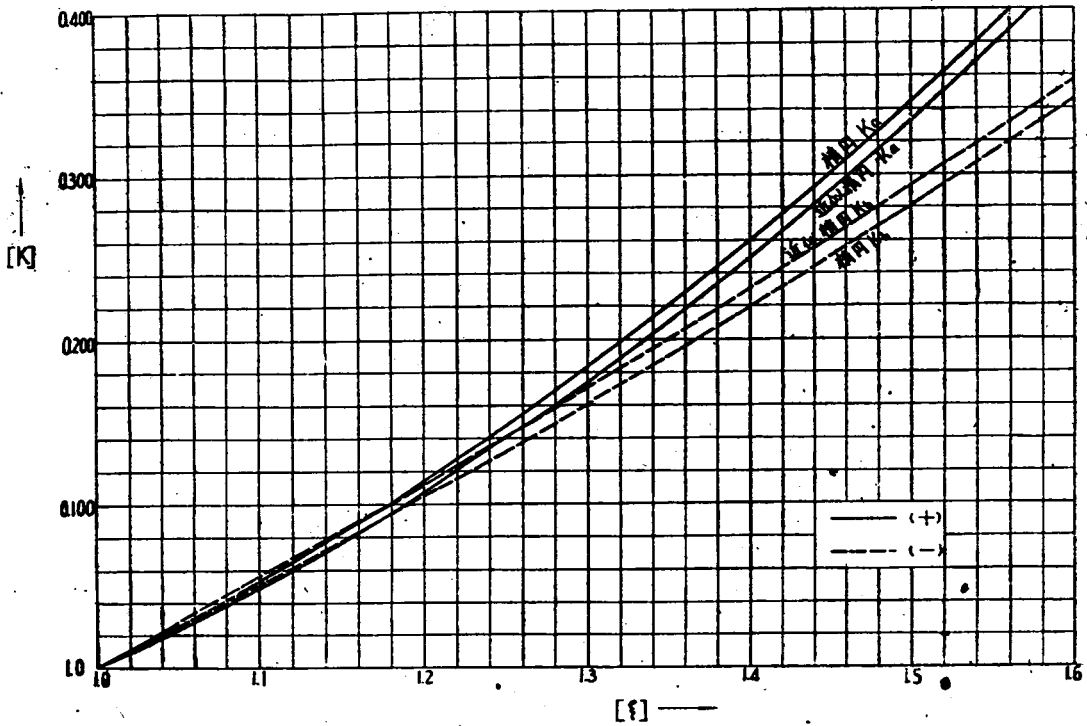
ξ	精 圆		近似精圆	
	K_a	K_b	K_a	K_b
1.0	000	000	000	000
1.1	.054	-.051	.050	-.055
1.2	.115	-.105	.108	-.112
1.3	.184	-.126	.174	-.171
1.4	.260	-.201	.249	-.231
1.5	.344	-.281	.332	-.293
1.6	.435	-.345	.423	-.357

上式の精度は $\bar{z}=1.6$ に於て0.4%の誤差であり實用上充分の値を有する。

$$X_b = qb^2 K_b$$

第3圖表は2つの形のKの値の比較圖であるが、これによつて見れば K_a の値は近似精圖の方が小さく K_b は反つて

大きく示されてゐる。實際の設計に當つてはKの大なる値即ち Ka の値のみで斷面は定まるであらうから近似橢圓を使用する場合本解法の Ka の値を用ふことは實用上差支へない、と云へると思ふ。



お ね が ひ

「土木満洲」も本日第二號の發刊となつた。互の雜誌皆んなで盛り立てる雜誌として將來の指針になる様な御批判を願ひ度い。

卷末に葉書を添へてありますから机の抽出に藏はずに直ぐ出して下さい。