円筒シェル水槽の耐震計算について*

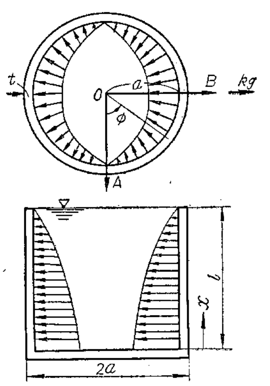
飯　島　延　恵**
萩　原　敏　雄***

要　旨　円筒シェル水槽が満水時に水平震度 k なる地震力を受けた場合に，壁体に生ずる応力を求める一般解式を誘導した。あわせて鉄筋コンクリートあるいはプレストレスト　コンクリートの円筒シェル水槽の地震応力をただちに算定できるように，応力解式を図表化し，この種水槽の設計の便に供するものである。

1. 地震時動水圧

図—1 のごとき円柱座標 x, ϕ を用いる。円柱の半径を a，壁厚を t，高さを l にて表わす。水槽側壁が満水のまま OB 方向に一定水平加速度 kg で動いている場合，壁面に生ずる動水圧は近似的に（1）式[1]により表わされる。

図—1



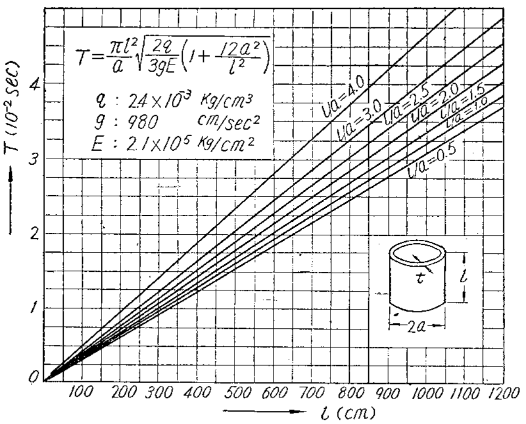
p_0：動水圧

q_0：液体の単位容積重量とすると，

$$p_0=q_0k\frac{\sqrt{3}\,l}{2}\tanh\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{l}\right)\cdot\left\{1-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right\}\sin\phi\cdots(1)$$

2. 固有振動周期

図—2　空虚時円筒シェル水槽の固有周期



* 土木学会第 14 回年次学術講演会に一部発表
** 東京電力 KK 工務部水路課長
*** 正員　東京電力 KK 工務部水路課

（1）空虚時円筒シェル水槽の固有振動周期[2]

$$T=\frac{\pi l^2}{a}\sqrt{\frac{2q}{3gE}\left\{1+12\left(\frac{a}{l}\right)^2\right\}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ただし　q：壁体（コンクリート）の単位容積重量

E：ヤング率

g：重力の加速度

（2）満水時円筒シェル水槽の固有振動周期

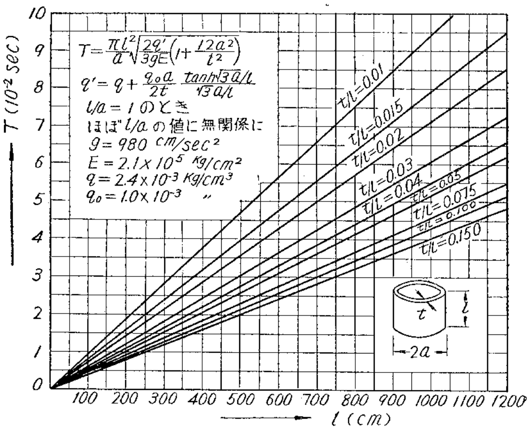
$$T=\frac{\pi l^2}{a}\sqrt{\frac{2q'}{3gE}\left\{1+12\left(\frac{a}{l}\right)^2\right\}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ここに　$q'=q+\frac{q_0 a}{2t}\cdot\frac{\tanh\sqrt{3}\,a/l}{\sqrt{3}\,a/l}$

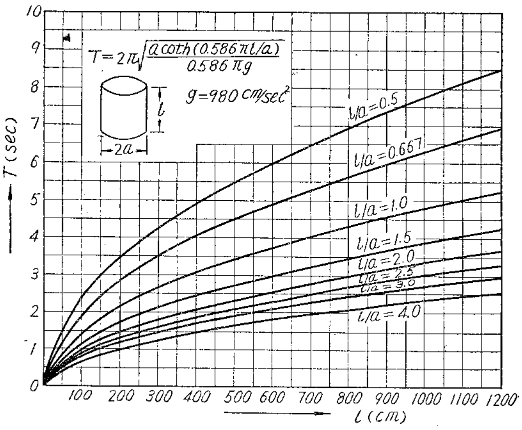
（3）貯留液体の固有振動周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{a\coth\,(0.586\,\pi\,l/a)}{0.586\,\pi\,g}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

図—3　満水時円筒シェル水槽の固有周期

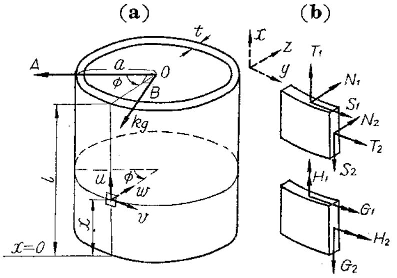


図—4　貯溜液体の固有周期



3. 応 力 解 式

図—5



（1） 平衡方程式

壁体の一部をとり母線の方向を x，壁面に垂直方向を z，切線方向を y とし，各方向の応力，変位および変形を次のごとく表わす（図—5 参照)。

T, N, S：合応力（巾単位長さ，厚さ t）

H, G　：合応力モーメント（　〃　）

u, v, w ：変位

なおその他に次の常数を用いる。

$$D=\frac{E t^3}{12(1-\sigma^2)}\ ,\qquad \sigma：ポアソン比$$

平衡方程式を求めるにあたり，外力として動水圧および壁体の慣性力をとる。弾性理論により変位の基本形は

$u=U(x)\cdot\sin\phi,\ v=V(x)\cdot\cos\phi,\ w=W(x)\cdot\sin\phi$ により与えられる。壁体の一部の平衡を考え，かつ力と変形，変位と変形との関係を用いれば，次のごとく U, V, W で表わされる平衡方程式をうる。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{24D}{t^3}\left[\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{1-\sigma}{2a^2}U-\frac{1+\sigma}{2a}\frac{dV}{dx}-\frac{\sigma}{a}\frac{dW}{dx}\right]\\
&\qquad+\frac{2D}{t}\left[\frac{2-2\sigma-3\sigma^2}{2(1-\sigma)a}\frac{d^3W}{dx^3}\right]=0\\
&\frac{24D}{t^3}\left[\frac{1+\sigma}{2a}\frac{dU}{dx}-\frac{1}{a^2}(W+V)+\frac{1-\sigma}{2}\frac{d^2V}{dx^2}\right]\\
&+\frac{2D}{t}\left[\frac{3-5\sigma-\sigma^2}{2(1-\sigma)a^2}\frac{d^2W}{dx^2}+\frac{3(1-\sigma)}{2a^2}\frac{d^2V}{dx^2}\right]\\
&=-2qk \qquad \frac{24D}{t^3}\left[\frac{\sigma}{a}\frac{dU}{dx}-\frac{1}{a^2}(W+V)\right]\\
&-\frac{2D}{t}\left[\frac{d^4W}{dx^4}-\frac{4-5\sigma-2\sigma^2}{2(1-\sigma)a^2}\frac{d^2W}{dx^2}-\frac{2-\sigma}{a^2}\frac{d^2V}{dx^2}\right]\\
&=2qk+q_0k\frac{\sqrt{3}\,l}{t}\tanh\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{l}\right)\cdot\left\{1-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

（2） 平衡方程式の一般解

（5） 式を解くと U, V, W はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}
U=&\left(\frac{a}{l}\right)C_2+6\left(\frac{a}{l}\right)^3(2+\sigma)\,C_4+\frac{2a}{l^2}C_3x\\
&+\frac{3a}{l^3}C_4x^2-\frac{B}{60\,al^2(1-\sigma^2)}x^5\\
&+e^{\alpha x}[(\beta C_5-\gamma C_6)\cos\alpha x+(\gamma C_5+\beta C_6)\\
&\sin\alpha x]+e^{-\alpha x}[(-\beta C_7-\gamma C_8)\cos\alpha x\\
&+(\gamma C_7-\beta C_8)\sin\alpha x]\\
V=&-C_1+2\left(\frac{a}{l}\right)^2\sigma C_3+\left(-\frac{1}{l}C_2+\frac{6a^2\sigma}{l^3}C_4\right)x\\
&-\frac{1}{l^2}C_3x^2-\frac{1}{l^3}C_4x^3+\frac{1}{24(1-\sigma^2)a^2}\\
&\left\{A+\frac{2(2+\sigma)a^2}{l^2}B\right\}x^4+e^{\alpha x}[(-\delta C_5-\zeta C_6)\\
&\cos\alpha x+(\zeta C_5-\delta C_6)\sin\alpha x]\\
&+e^{-\alpha x}[(-\delta C_7+\zeta C_8)\cos\alpha x+(-\zeta C_7\\
&-\delta C_8)\sin\alpha x]\\
W=&C_1+\frac{1}{l}C_2x+\frac{1}{l^2}C_3x^2+\frac{1}{l^3}C_4x^3\\
&-\frac{1}{24(1-\sigma^2)a^2}\left\{2A+\left(1+\frac{4a^2}{l^2}\right)B\right\}x^4\\
&+\frac{B}{360(1-\sigma^2)a^2l^2}x^6+e^{\alpha x}(C_5\cos\alpha x\\
&+C_6\sin\alpha x)+e^{-\alpha x}(C_7\cos\alpha x+C_8\sin\alpha x)
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha^4=\frac{3(1-\sigma^2)}{a^2t^2},\quad \beta=\frac{\sigma}{2a\alpha}-\frac{1}{4a^3\alpha^3},\\
&\gamma=\frac{\sigma}{2a\alpha}+\frac{1}{4a^3\alpha^3},\quad \delta=\frac{1+2\sigma}{4a^4\alpha^4},\\
&\zeta=\frac{2+\sigma}{2a^2\alpha^2}\ ,\qquad A=\frac{qkt^3}{12D},\\
&B=\frac{t^3}{24D}q_0k\frac{\sqrt{3}\,l}{t}\tanh\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{l}\right),\\
&C_i(i=1,2,\cdots,8)\ \text{は積分常数である。}
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

（3） 積分常数の決定

$C_1\sim C_8$ なる積分常数は次の境界条件により決める。

$x=0$ において

$$\left.\begin{aligned}
&U=0,\ V=0,\ W=0,\ \frac{d^2W}{dx^2}=0\ \text{（ヒンジ）}\\
&\qquad\text{あるいは}\quad \frac{dW}{dx}=0\ \text{（固定）}\\
&x=l\ \text{において}\\
&\frac{dU}{dx}-\frac{\sigma}{a}(W+V)=0,\ \frac{d^2W}{dx^2}-\frac{\sigma}{a^2}(W+V)=0,\\
&\frac{d^3W}{dx^3}-\frac{\sigma}{a^2}\left(\frac{dW}{dx}+\frac{dV}{dx}\right)=0\ ,\\
&\frac{1}{a^2}\frac{dW}{dx}+\left(\frac{4}{t^2}+\frac{1}{a^2}\right)\frac{dV}{dx}+\frac{4}{t^2}\frac{U}{a}=0
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

これら 8 コの条件式に（6）式を代入し，微小項を省略してこれを解くと次のごとく積分常数が決定できる。なお積分常数を nondimension にするため

$$c_i=\frac{E}{k\,l^2q_0}C_i\quad \text{を用いる。}$$

$$\begin{aligned}
e^{\alpha l}c_6=&\frac{1}{\mu w-\mu' w'}\left\{\frac{q}{q_0}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2a^2}{l^2}\right)K\right\}\\
&(\mu\cos\alpha l+\mu'\sin\alpha l)-\frac{a}{l}\left\{\left(2+\frac{1-3\sigma}{12}\frac{l^2}{a^2}\right)\frac{q}{q_0}\right.\\
&\left.+\left(1+\frac{4a^2}{l^2}-\frac{\sigma}{6}+\frac{\sigma^2}{6}-\frac{1+17\sigma}{120}\frac{l^2}{a^2}\right)K\right\}
\end{aligned}$$

$$(w'\cos\alpha l+w\sin\alpha l)\Big]$$

$$e^{\alpha l}c_5=\frac{1}{\mu w-\mu' w'}\Big[\Big\{\frac{q}{q_0}+\Big(\frac{1}{3}+\frac{2a^2}{l^2}\Big)K\Big\}(\mu'\cos\alpha l-\mu\sin\alpha l)-\frac{a}{l}\Big\{\Big(2+\frac{1-3\sigma}{12}\frac{l^2}{a^2}\Big)\frac{q}{q_0}+\Big(1+\frac{4a^2}{l^2}-\frac{\sigma}{6}+\frac{\sigma^2}{6}-\frac{1+17\sigma}{120}\frac{l^2}{a^2}\Big)K\Big\}(w\cos\alpha l-w'\sin\alpha l)\Big]$$

$$c_4=-\frac{1}{12(1+\sigma)}\Big(\frac{l}{a}\Big)^3\Big\{(\lambda_1\cos\alpha l-\lambda_1'\sin\alpha l)e^{\alpha l}c_5+(\lambda_1'\cos\alpha l+\lambda_1\sin\alpha l)e^{\alpha l}c_6\Big\}-\frac{q/q_0+\{-1/10+2(2+\sigma)a^2/l^2\}K}{72(1-\sigma^2)(1+\sigma)}\Big(\frac{l}{a}\Big)^4 \qquad (9)$$

$$c_3=-3c_4-\frac{1}{2(1-\sigma^2)}\Big(\frac{l}{a}\Big)^2\Big\{(\psi\cos\alpha l-\psi'\sin\alpha l)e^{\alpha l}c_5+(\psi'\cos\alpha l+\psi\sin\alpha l)e^{\alpha l}c_6\Big\}+\frac{K}{24}\Big(\frac{l}{a}\Big)^2-\frac{\sigma(q/q_0+14K/15)}{48(1-\sigma^2)}\Big(\frac{l}{a}\Big)^4$$

底辺ヒンジの場合

$$c_1=\Big\{2\Big(\frac{a}{l}\Big)^2\sigma+\frac{\zeta}{l^2\alpha^2}\Big\}c_3,\quad c_7=-c_1-c_5,$$

$$c_8=\frac{c_3}{l^2\alpha^2}+c_6,\quad c_2=-6\Big(\frac{a}{l}\Big)^2(2+\sigma)c_4-\Big(\frac{l}{a}\Big)\beta(c_5-c_7)+\Big(\frac{l}{a}\Big)\gamma(c_6+c_8)$$

底辺固定の場合

$$c_8=\frac{1}{\zeta+\dfrac{a\alpha+\gamma}{a\alpha-\beta}}\Big\{-2\Big(\frac{a}{l}\Big)^2\sigma c_3+6\Big(\frac{a}{l}\Big)^3\frac{2+\sigma}{a\alpha-\beta}c_4-2c_5+\Big(\zeta-\frac{a\alpha+\gamma}{a\alpha-\beta}\Big)c_6\Big\}$$

$$c_7=-2\Big(\frac{a}{l}\Big)^2\sigma c_3-c_5+\zeta(c_6-c_8),\quad c_1=-c_5-c_7,$$

$$c_2=l\alpha(-c_5-c_6+c_7-c_8)$$

ただし

$$\psi=a\alpha(\beta+\gamma)-\sigma(1-\delta),$$
$$\psi'=a\alpha(\beta-\gamma)\sigma\zeta;$$
$$w=2a^2\alpha^2+\sigma\zeta,\quad w'=\sigma(1-\delta);$$
$$\mu=2a^3\alpha^3-a\alpha(-1+\delta-\zeta),$$
$$\mu'=2a^3\alpha^3-a\alpha(1-\delta-\zeta);$$
$$\lambda_1=\frac{t^2}{4a^2}a\alpha+\beta-a\alpha\delta\div a\alpha\zeta,$$
$$\lambda_1'=\frac{t^2}{4a^2}a\alpha-\gamma-a\alpha\delta-a\alpha\zeta;$$
$$K=\frac{2}{3}\,\frac{a}{t}\,\frac{\tanh\sqrt{3}\,a/l}{\sqrt{3}\,a/l} \qquad (10)$$

(4) 合応力および合応力モーメントの解式

上記の諸式を応力と変位の関係式に代入すれば，次のごとく主要な応力を求める一般解式が得られる。

$$G_1=-D\Big[\frac{d^2W}{dx^2}-\frac{\sigma}{a^2}(W+V)\Big]\sin\phi$$
$$=-\frac{t^3kq_0}{12(1-\sigma^2)}\Big[2(1-\sigma^2)c_3+6(1-\sigma^2)c_4\frac{x}{l}-\Big\{\frac{q}{q_0}+\Big(\frac{1}{2}+\frac{2a^2}{l^2}\Big)K\Big\}\frac{l^2}{a^2}\frac{x^2}{l^2}+\frac{1}{24}\Big\{\sigma\frac{q}{q_0}+\Big(\sigma+2\,\overline{1-\sigma}\,\frac{a^2}{l^2}\Big)K\Big\}\frac{l^4}{a^4}\frac{x^4}{l^4}-\frac{\sigma Kl^4}{360a^4}\cdot\frac{x^6}{l^6}+\frac{l^2}{a^2}e^{\alpha x}\{(-w'c_5+wc_6)\cos\alpha x+(-wc_5-w'c_6)\sin\alpha x\}+\frac{l^2}{a^2}e^{-\alpha x}\{(-w'c_7-wc_8)\cos\alpha x+(wc_7-w'c_8)\sin\alpha x\}\Big]\sin\phi$$

$$N_1=-D\Big[\frac{d^3W}{dx^3}-\frac{1}{a^2}\Big(\frac{dW}{dx}+\frac{dV}{dx}\Big)\Big]\sin\phi$$
$$=-\frac{t^3kq_0}{12(1-\sigma^2)l}\Big[6(1-\sigma)c_4-\Big\{\frac{2q}{q_0}+\Big(1+\frac{4a^2}{l^2}\Big)K\Big\}\frac{l^2}{a^2}\frac{x}{l}+\frac{1}{6}\Big\{\frac{q}{q_0}+\Big(1+\frac{2(1-\sigma)a^2}{l^2}\Big)K\Big\}\frac{l^4}{a^4}\frac{x^3}{l^3}-\frac{Kl^4}{60a^4}\frac{x^5}{l^5}+\frac{x^3}{a^3}e^{\alpha x}\{(-\mu c_5+\mu'c_6)\cos\alpha x+(-\mu'c_5-\mu c_6)\sin\alpha x\}+\frac{l^3}{a^3}e^{-\alpha x}\{(\mu c_7+\mu'c_8)\cos\alpha x+(-\mu'c_7+\mu c_8)\sin\alpha x\}\Big]\sin\phi \qquad (11)$$

$$T_1=\frac{12D}{t^2}\Big[\frac{dU}{dx}-\frac{\sigma}{a}(W+V)\Big]\sin\phi$$
$$=\frac{tkq_0l}{(1-\sigma^2)}\Big[2(1-\sigma^2)\frac{a}{l}c_3+6(1-\sigma^2)\frac{a}{l}c_4\frac{x}{l}+\frac{1}{24}\Big\{\sigma\frac{q}{q_0}+\Big(\sigma-2\,\overline{1+\sigma^2}\,\frac{a^2}{l^2}\Big)K\Big\}\frac{l^3}{a^3}\frac{x^4}{l^4}-\frac{\sigma Kl^3}{360a^3}\frac{x^6}{l^6}+\frac{l}{a}e^{\alpha x}\{(\psi c_5+\psi'c_6)\cos\alpha x+(-\psi'c_5+\psi c_6)\sin\alpha x\}+\frac{l}{a}e^{\alpha x}\{(\psi c_7-\psi'c_8)\cos\alpha x+(\psi'c_7+\psi c_8)\sin\alpha x\}\Big]\sin\phi$$

$$S_1=\frac{2D(1-\sigma)}{t^2}\Big[3\Big(\frac{dU}{dx}+\frac{U}{a}\Big)-\frac{t^2}{4a^2}\Big(\frac{dW}{dx}+\frac{dV}{dx}\Big)\Big]\cos\phi$$
$$=\frac{tkq_0l}{6(1+\sigma)}\Big[36(1+\sigma)\frac{a^2}{l^2}c_4+\Big\{\frac{2q}{q_0}+\frac{(2+\sigma)a^2}{l^2}K\Big\}\frac{l^2}{a^2}\frac{x^3}{l^3}-\frac{Kl^2}{20a^2}\frac{x^5}{l^5}+\frac{l}{a}e^{\alpha x}\{(-\lambda_2'c_5-\lambda_2c_6)\cos\alpha x+(\lambda_2c_5-\lambda_2'c_6)\sin\alpha x\}$$

$$+\frac{l}{a}e^{-\alpha x}\{(\lambda_2'c_7-\lambda_2 c_8)\cos\alpha x+(\lambda_2 c_7+\lambda_2'c_8)\sin\alpha x\}\Big]\cos\phi \qquad (11)$$

ただし
$$\left.\begin{aligned}\lambda_2&=\frac{t^2}{4a^2}a\alpha+3(\gamma+a\alpha\delta+a\alpha\zeta),\\ \lambda_2'&=\frac{t^2}{4a^2}a\alpha-3(\beta-a\alpha\delta+a\alpha\zeta)\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

（5） 計 算 例 題

$l=1\,000$ cm, $a=1\,500$ cm, $t=30$ cm, $E=3\times10^5$ kg/cm², $\sigma=0.2$, $q=2.4\times10^{-3}$ kg/cm³, $q_0=1\times10^{-3}$ kg/cm³

なる円筒シェル水槽が満水時に水平震度 $k=0.35$ なる地震力を受けた場合の応力を求む。ただし水槽側壁下端支承部はヒンジ構造であると仮定する。

$\alpha=0.6141\times10^{-2}$/cm, $\beta=0.1058\times10^{-1}$

$\gamma=0.1118\times10^{-1}$, $\delta=0.0005\times10^{-1}$, $\zeta=0.1295\times10^{-1}$

$\mu=1\,572$, $\mu'=1\,553$, $\lambda_1=0.130$, $\lambda_1'=-0.130$

$\psi=0.075$, $\psi'=-0.0033$, $w=169.6$, $w'=0.2$,

$\lambda_2=0.391$, $\lambda_2'=-0.391$, $K=28.6$

$e^{\alpha l}c_6=0.747$, $e^{\alpha l}c_5=0.656$, $c_4=-0.671$,

$c_3=2.518$, $c_1=2.268$, $c_7=-2.270$,

$c_8=0.0684$, $c_4=19.95$

以上により決定された常数を用い応力を求めることができる。下部における水平断面内の応力を計算し表示すれば**表—1**のごとくなる。

表—1 巾 1 cm, 厚さ t に対する最大応力

x (cm)	0	50	100	150	200	300	400
G_1 (kg-cm)	0	32.2	45.4	46.2	39.5	19.1	4.8
N_1 (kg)	0.85	0.39	0.11	−0.06	−0.13	−0.13	−0.07
S_1 (kg)	96.0	95.6	95.3	94.7	94.3	92.7	89.2
T_1 (kg)	74.4	71.7	68.0	66.2	63.5	57.3	51.2

4. 応力計算図表

単位面積に対する応力を直接求めるために

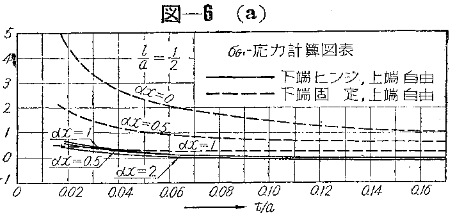
$$\sigma_{G_1}=\frac{6}{t^2}G_1,\quad \sigma_{T_1}=\frac{T_1}{t},\quad \tau_{N_1}=\frac{N_1}{t},\quad \tau_{S_1}=\frac{S_1}{t} \qquad \cdots\cdots(13)$$

なる関係を用いれば

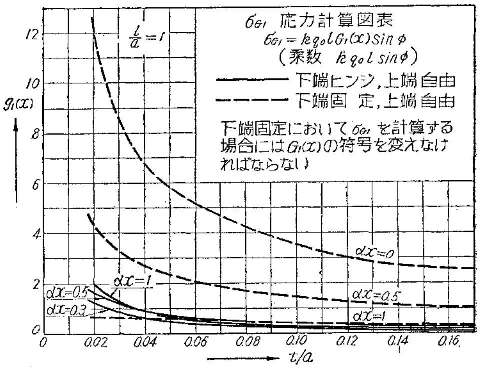
$$\left.\begin{aligned}\sigma_{G_1}&=kq_0lg_1(x)\cdot\sin\phi,\quad \sigma_{T_1}=kq_0lt_1(x)\cdot\sin\phi,\\ \tau_{N_1}&=kq_0ln_1(x)\cdot\sin\phi,\quad \tau_{S_1}=kq_0s_1(x)\cdot\cos\phi\end{aligned}\right\}(14)$$

と表わすことができる。$g_1(x)$, $t_1(x)$, $n_1(x)$, $s_1(x)$ なる nondimension の関数を，l/a および $a\alpha$ を parameter として各 t/a の値に対し計算し，図表化したものを次にかかげる。

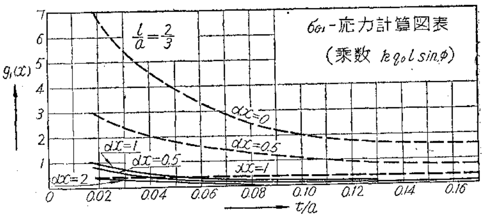
図—6 (a)



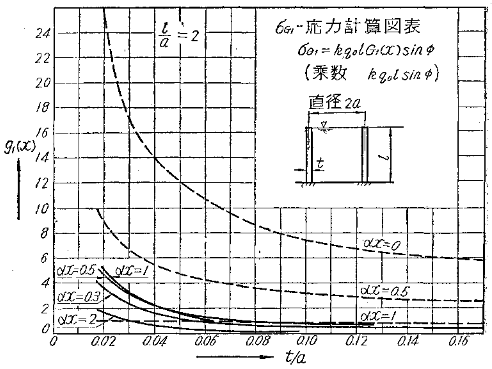
図—6 (b)



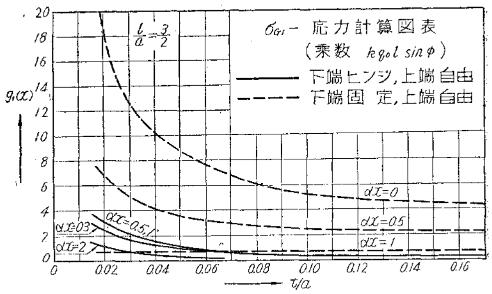
図—6 (c)



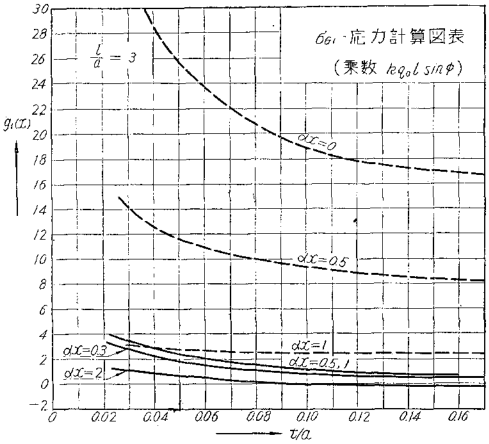
図—6 (d)



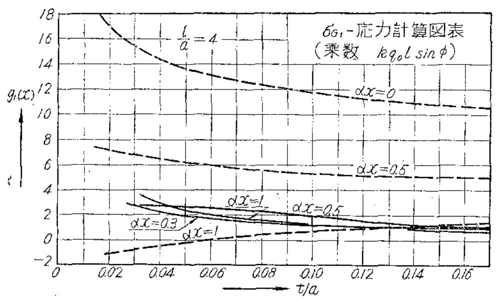
図—6 (e)



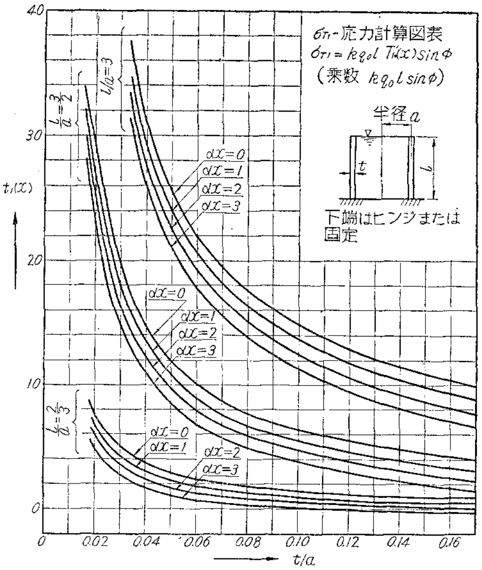
図—6 (f)



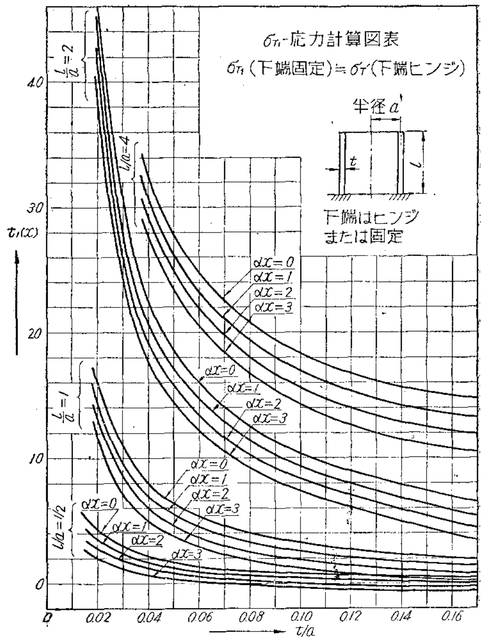
図—6 (g)



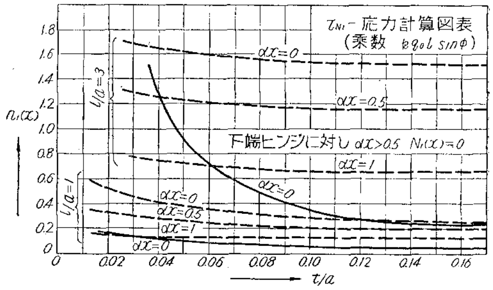
図—7 (a)



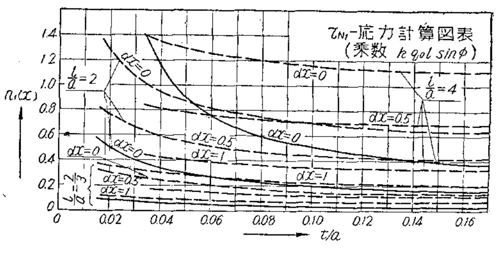
図—7 (b)



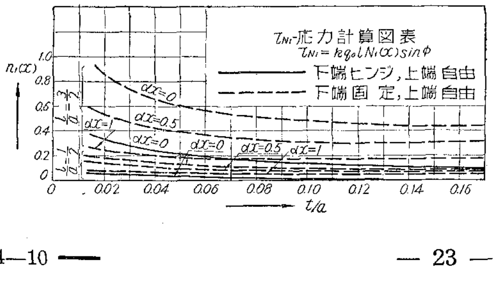
図—8 (a)



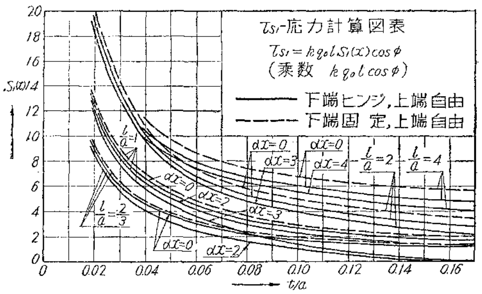
図—8 (b)



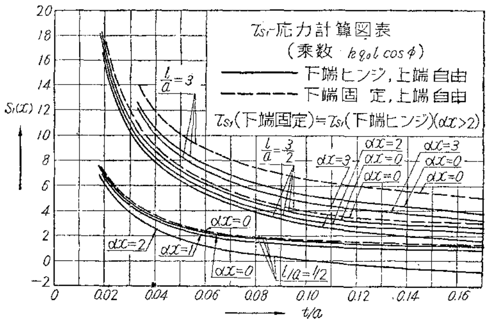
図—8 (c)



図—9 (a)



図—9 (b)



参 考 文 献

1) G.W. Housner: "Earthquake Pressure on Fluid Containers." Cal. Ins. of Tech. Aug. 1954

2) 酒井忠明:「中空円筒殻体の強制振動による応力の一般解式及び実用解式」,土木学会論文集第 18 号

日本学術会議第5期会員候補者推薦

当学会は,来る 11月 20 日の日本学術会議第 5 期会員選挙に次の者を候補者として推薦した。

(全国区・第 5 部 土木工学) **石 原 藤 次 郎** 工学博士
主な勤務先・職名 京都大学工学部 防災研究所
京都大学教授 工学部長

(全国区・第 5 部 土木工学) **福 田 武 雄** 工学博士
主な勤務先・職名 東京大学教授
東京大学 生産技術研究所長