【報　告】

土木計画における産業連関分析と Linear Programming の適用（追補）

鈴　木　雅　次*
川　北　米　良**

要　旨　土木学会誌第44巻 第4号に掲載の「土木計画における産業連関分析と Linear Programming の適用」の中の一項目「Linear Programming の適用による立地産業の業種・規模の選定」に関する例題の算式 (36)～(41) の解法は，紙面の都合で割愛した。しかるに，その後各方面からこれに関する照会をしばしば受けるので，ここにその解法を記し，前文の追補とする。

1. Linear Programming の適用による立地産業の業種・規模の選定に関する例題の解法

本誌第44巻 第4号 13～14 ページに掲載の，臨海工業地帯の開発計画における適正立地産業の業種・規模の選定に関する例題は

（制約条件式）

$$
\left.
\begin{aligned}
&(1-a_{11}^{RR})X_1^R-a_{11}^{RS}X_1^S-a_{13}^{RR}X_3^{R'}-a_{13}^{RS}X_3^S-a_{14}^{RR}X_4^{R'}-a_{14}^{RS}X_4^S\geqq V_1^R\\
&-a_{11}^{SR}X_1^R+(1-a_{11}^{SS})X_1^S-a_{13}^{SR}X_3^{R'}-a_{13}^{SS}X_3^S-a_{14}^{SR}X_4^{R'}-a_{14}^{SS}X_4^S\geqq V_1^S\\
&a_{21}^{RR}X_1^R+a_{21}^{RS}X_1^S+a_{23}^{RR}X_3^{R'}+a_{23}^{RS}X_3^S+a_{24}^{RR}X_4^{R'}+a_{24}^{RS}X_4^S\leqq V_2^R\\
&a_{21}^{SR}X_1^R+a_{21}^{SS}X_1^S+a_{23}^{SR}X_3^{R'}+a_{23}^{SS}X_3^S+a_{24}^{SR}X_4^{R'}+a_{24}^{SS}X_4^S\leqq V_2^S\\
&-a_{31}^{RR}X_1^R-a_{31}^{RS}X_1^S+(1-a_{33}^{RR})X_3^{R'}-a_{33}^{RS}X_3^S-a_{34}^{RR}X_4^{R'}-a_{34}^{RS}X_4^S\geqq V_3^R\\
&-a_{31}^{SR}X_1^R-a_{31}^{SS}X_1^S-a_{33}^{SR}X_3^{R'}+(1-a_{33}^{SS})X_3^S-a_{34}^{SR}X_4^{R'}-a_{34}^{SS}X_4^S\geqq V_3^S\\
&-a_{41}^{RR}X_1^R-a_{41}^{RS}X_1^S-a_{43}^{RR}X_3^{R'}-a_{43}^{RS}X_3^S+(1-a_{44}^{RR})X_4^{R'}-a_{44}^{RS}X_4^S\geqq V_4^R\\
&-a_{41}^{SR}X_1^R-a_{41}^{SS}X_1^S-a_{43}^{SR}X_3^{R'}-a_{43}^{SS}X_3^S-a_{44}^{SR}X_4^{R'}+(1-a_{44}^{SS})X_4^S\geqq V_4^S\\
&\qquad b_3X_3^{R'}-b_3X_3^R\geqq B_3\\
&\qquad b_3X_3^{R'}-b_3X_3^R\leqq pB_3\\
&\qquad b_4X_4^{R'}-b_4X_4^R\geqq B_4\\
&\qquad b_4X_4^{R'}-b_4X_4^R\leqq pB_4\\
&b_3X_3^{R'}-b_3X_3^R+b_4X_4^{R'}-b_4X_4^R=B\\
&X_1^R\geqq 0,\quad X_3^{R'}\geqq 0,\quad X_4^{R'}\geqq 0,\quad X_j^R\geqq 0\quad (j=1,3,4)
\end{aligned}
\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots[36]
$$

のもとで

（目的式）

$$
Y=c_1^RX_1^R+c_1^SX_1^S+c_3^RX_3^{R'}+c_3^SX_3^S+c_4^RX_4^{R'}+c_4^SX_4^S\cdots\cdots\cdots\cdots[37]
$$

を最大ならしめる，という linear programming の問題であつた。ただし

$$
X_3^{R'}=X_3^R+\Delta X_3^R,\quad X_4^{R'}=X_4^R+\Delta X_4^R\cdots\cdots[38]
$$

[36] の右辺定数項 V_1^R, V_1^S, V_3^S, V_4^S は

$$
V_i^k=a_{i\,2\max}^{kR}X_2^R+a_{i\,2\max}^{kS}X_2^S+\sum_l\bar{F}_i^{kl}\cdots\cdots[39]
$$

$$
\begin{pmatrix}k=R\ \text{の場合}\quad i=1,\quad l=R,S\\ k=S\ \text{の場合}\quad i=1,3,4\end{pmatrix}
$$

V_2^R, V_2^S は

$$
V_2^k={}_{\max}X_2^k-a_{22\max}^{kR}X_2^R-a_{22\max}^{kS}X_2^S-\sum_lF_2^{kl}\cdots\cdots\cdots\cdots[40]
$$

$$
(k=R,S\quad l=R,S)
$$

V_3^R, V_4^R は

$$
V_i^R=a_{i\,2\max}^{RR}X_2^R+a_{i\,2\max}^{RS}X_2^S+\sum_l\bar{F}_i^{Rl}\quad (i=3,4)\cdots\cdots\cdots\cdots[41]
$$

[ ] 内の数字は前記第4号に示した式の番号を示す。この問題を simplex 判定法で解く。

まず制約条件式 [36] の最初の 12 個の不等式の左辺に，それぞれ調整変数（左辺と右辺の差）$X_5, X_6, \cdots\cdots, X_{16}$ を付加して等式化すれば次式のようになる。

* 名誉員　工博　元土木学会会長　日本大学教授
** 正員　工修　日本大学理工学部土木工学科教室

（制約条件式）

$$
\left.\begin{aligned}
&(1-a_{11}^{RR})X_1^R-a_{11}^{RS}X_1^S-a_{13}^{RR}X_3^{R'}-a_{13}^{RS}X_3^S-a_{14}^{RR}X_4^{R'}-a_{14}^{RS}X_4^S-X_5=V_1^R\\
&-a_{11}^{SR}X_1^R+(1-a_{11}^{SS})X_1^S-a_{13}^{SR}X_3^{R'}-a_{13}^{SS}X_3^S-a_{14}^{SR}X_4^{R'}-a_{14}^{SS}X_4^S-X_6=V_1^S\\
&a_{21}^{RR}X_1^R+a_{21}^{RS}X_1^S+a_{23}^{RR}X_3^{R'}+a_{23}^{RS}X_3^S+a_{24}^{RR}X_4^{R'}+a_{24}^{RS}X_4^S+X_7=V_2^R\\
&a_{21}^{SR}X_1^R+a_{21}^{SS}X_1^S+a_{23}^{SR}X_3^{R'}+a_{23}^{SS}X_3^S+a_{24}^{SR}X_4^{R'}+a_{24}^{SS}X_4^S+X_8=V_2^S\\
&-a_{31}^{RR}X_1^R-a_{31}^{RS}X_1^S+(1-a_{33}^{RR})X_3^{R'}-a_{33}^{RS}X_3^S-a_{34}^{RR}X_4^{R'}-a_{34}^{RS}X_4^S-X_9=V_3^R\\
&-a_{31}^{SR}X_1^R-a_{31}^{SS}X_1^S-a_{33}^{SR}X_3^{R'}+(1-a_{33}^{SS})X_3^S-a_{34}^{SR}X_4^{R'}-a_{34}^{SS}X_4^S-X_{10}=V_3^S\\
&-a_{41}^{RR}X_1^R-a_{41}^{RS}X_1^S-a_{43}^{RR}X_3^{R'}-a_{43}^{RS}X_3^S+(1-a_{44}^{RR})X_4^{R'}-a_{44}^{RS}X_4^S-X_{11}=V_4^R\\
&-a_{41}^{SR}X_1^R-a_{41}^{SS}X_1^S-a_{43}^{SR}X_3^{R'}-a_{43}^{SS}X_3^S-a_{44}^{SR}X_4^{R'}+(1-a_{44}^{SS})X_4^S-X_{12}=V_4^S\\
&b_3X_3^{R'}-b_3X_3^R-X_{13}=B_3\\
&b_3X_3^{R'}-b_3X_3^R+X_{14}=pB_3\\
&b_4X_4^{R'}-b_4X_4^R-X_{15}=B_4\\
&b_4X_4^{R'}-b_4X_4^R+X_{16}=pB_4\\
&b_3X_3^{R'}-b_3X_3^R+b_4X_4^{R'}-b_4X_4^R=B
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)
$$

また，この際目的式［37］を次のように考える。

（目的式）

$$
\begin{aligned}
Y=&c_1^RX_1^R+c_1^SX_1^S+c_3^RX_3^{R'}+d_3^RX_3^R+c_3^SX_3^S+c_4^RX_4^{R'}\\
&+d_4^RX_4^R+c_4^SX_4^S+d_5X_5+d_6X_6+\cdots\cdots+d_{16}X_{16}\\
&\rightarrow\max\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)
\end{aligned}
$$

ここに*

$$
\begin{aligned}
*\quad & d_3^R=d_4^R=d_5=d_6=\cdots\cdots=d_{16}=0
\end{aligned}
$$

とする。

(1) の左辺各項の係数を元素とする matrix を A，右辺定数項を成分とする列 vector を V とすれば，A は 13 行，20 列の matrix となり (3) 式のとおりとなる。

$$
A=\begin{bmatrix}
(1-a_{11}^{RR}) & -a_{11}^{RS} & -a_{13}^{RR} & 0 & -a_{13}^{RS} & -a_{14}^{RR} & 0 & -a_{14}^{RS} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-a_{11}^{SR} & (1-a_{11}^{SS}) & -a_{13}^{SR} & 0 & -a_{13}^{SS} & -a_{14}^{SR} & 0 & -a_{14}^{SS} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_{21}^{RR} & a_{21}^{RS} & a_{23}^{RR} & 0 & a_{23}^{RS} & a_{24}^{RR} & 0 & a_{24}^{RS} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_{21}^{SR} & a_{21}^{SS} & a_{23}^{SR} & 0 & a_{23}^{SS} & a_{24}^{SR} & 0 & a_{24}^{SS} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-a_{31}^{RR} & -a_{31}^{RS} & (1-a_{31}^{RR}) & 0 & -a_{33}^{RS} & -a_{34}^{RR} & 0 & -a_{34}^{RS} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-a_{31}^{SR} & -a_{31}^{SS} & -a_{33}^{SR} & 0 & (1-a_{33}^{SS}) & -a_{34}^{SR} & 0 & -a_{34}^{SS} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-a_{41}^{RR} & -a_{41}^{RS} & -a_{43}^{RR} & 0 & -a_{43}^{RS} & (1-a_{44}^{RR}) & 0 & -a_{44}^{RS} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-a_{41}^{SR} & -a_{41}^{SS} & -a_{43}^{SR} & 0 & -a_{43}^{SS} & -a_{44}^{SR} & 0 & (1-a_{44}^{SS}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & b_3 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & b_3 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & -b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & -b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & b_3 & -b_3 & 0 & b_4 & -b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}\cdots(3)
$$

$$
V=\{V_1^R,\ V_1^S,\ V_2^R,\ V_2^S,\ V_3^R,\ V_3^S,\ V_4^R,\ V_4^S,\ B_3,\ pB_3,\ B_4,\ pB_4,\ B\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)
$$

ここに｛　｝は列 vector を意味する。

目的式 (2) の右辺の係数を成分とする列 vector を C とすれば

$$
C=\{c_1^R,\ c_1^S,\ c_3^R,\ d_3^R,\ c_3^S,\ c_4^R,\ d_4^R,\ c_4^S,\ d_5,\ d_6,\ \cdots\cdots,\ d_{16}\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)
$$

また

$$
X=\{X_1^R,\ X_1^S,\ X_3^{R'},\ X_3^R,\ X_3^S,\ X_4^{R'},\ X_4^R,\ X_4^S,\ X_5,\ X_6,\cdots\cdots,X_{16}\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)
$$

と置けば (1),(2) は (3)～(6) を用いて次のように matrix で表示される。

（制約条件式）

$$
\left.\begin{aligned}
&AX=V\\
&X\geqq 0
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)
$$

（目的式）

$$
Y=C'X\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)
$$

ただし C' は C の転置 vector である。

Matrix A から任意に 13 個の列 vector を選択し，これを A の最前部に移し，その部分の matrix (13 行，13 列の matrix) を A_1，その後部に残された 7 個の列 vector でできた matrix (13 行，7 列の matrix) を A_2

とすれば

$$A=(A_1, A_2) \quad \cdots\cdots(9)$$

(9) に対応して成分の配置変えを施こした (4),(5),(6) の列 vector をそれぞれ

$$V=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(10)$$

ここに V_1, C_1, X_1 はいずれも A_1 に対応する 13 個の成分の列 vector であり，V_2, C_2, X_2 は A_2 に対応する 7 個の成分の列 vector である。

いま選択した 13 個の列 vector が制約条件式 (7) を満足し，目的式 (8) の値 Y を最大にする最適解であるための必要十分条件は

$$\left.\begin{array}{l} C_2'-C_1'A_1^{-1}A_2<0 \\ A_1^{-1}V>0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(11)$$

で，そのときに求める最適解は

$$X_1=A_1^{-1}V \quad \cdots\cdots(12)$$

で与えられる。(11),(12) を simplex 判定法という。

ただし C_1', C_2' はそれぞれ C_1, C_2 の転置 vector, A_1^{-1} は A_1 の逆 matrix である。

もし選択した列 vector について (11) が成立しなければ，再び A_1, A_2 の列 vector の選択を変え，(11) が成立するまで同様の手法をくり返す。(11) が成立したとき，求める最適解 X_1 は (12) で得られる。こうして求められた最適解の $X_3^{R'}, X_3^R, X_4^{R'}, X_4^R$ を [38] に代入して，ΔX_3^R および ΔX_4^R を求めれば，これがわが国の輸出額を最大ならしめるための，当地域の開発における適正立地産業の生産規模である。また計算の結果，ΔX_3^R または ΔX_4^R のいずれかが 0 となることがある。この場合は 0 となつた業種は，当地域の開発計画によつて輸出を最大限に伸展させる目的からは，新しく立地させる産業として，あまり適正ではないことを示す。

なお (11),(12) の計算は簡単ではないが，G.B. Dantzig あるいは Charnes の simplex 表にしたがえば，一定方式の演算を機械的に有限回数くり返すことにより，最適解を求めることができる。

この例題について simplex 表による計算法を説明することは，いたずらに理解しにくいものとなるから，その説明は他の文献[1)2)3)]にゆずる。

2. 結　　言

以上のようにして，linear programming により得られた最適解は，開発計画の目的達成のための立地適正産業の業種・規模を与えると同時に，この開発計画が実現したときの，他の関連産業に対する波及効果が予測される。

本誌第 44 巻 第 4 号に掲載の「土木計画における産業連関分析と Linear Programming の適用」は本文による追補をもつて一応完結した。これらはいずれも土木計画に関する Operations Research の一部を構成するものである。

参 考 文 献

1) A. Charnes, W.W. Cooper and A. Henderson : An Introduction to Linear Programming. (1953)
2) 鈴木雅次・川北米良：産業連関論における Linear Programming の応用。港湾，1958. No.12, Vol.XXXV.
3) 鈴木雅次・川北米良：総合開発計画における Linear Programming の適用。港湾，1959. No.1, Vol.XXXVI.

本誌第 44 巻 第 4 号 登載の本報告の正誤表

ページ	行	誤	正
7	最下欄外	日本大学工学部……	日本大学理工学部……
9	右 1	→| ← 外生部門 → | …, $n, n+1$	→ | ← 外生部門 → | …, n, $n+1$
11	左下より 5	$i=1,2,\cdots,g,r+1,\cdots,n.$	$i=1,2,\cdots,h,r+1,\cdots,n.$
12	左 12	$\sum_{i=1}^{n} P_j=$	$\sum_{i=1}^{n} P_i=$
13	左下より 3	(29)～(31) 式の右辺……	(29)～(31)は一次形式で式の右辺…
13	左下より 2	……コの X_j^l と……	……コの X_j^k と……
13	右 1	$X_j^l \geqq 0 (l=\cdots\cdots$	$X_j^k \geqq 0 (k=\cdots\cdots$
13	右下より 13	……で与えられた $\{g+h\cdots\cdots$	…で与えられた一次形式の $\{g+h\cdots$
14	13	$-a_{44}^{RS}X_4^{R'}+(1-a_{44}^{SS})X_4^S$	$-a_{44}^{SR}X_4^{R'}+(1-a_{44}^{SS})X_4^S$
14	左下より 12	$+\sum_i \bar{F}_i^{kl}$	$+\sum_i \bar{F}_i^{Rl}$
14	右下より 8	生産コストを構成因子	生産コストの構成因子