

# 三辺固定、一辺自由な矩形板が等分布荷重および等変分布荷重を受ける場合のタワミおよび曲げモーメントについて

成岡昌夫\* 船越三郎\*\* 山本知弘\*\*\*  
小林昭一\*\*\*\* 桜井春輔\*\*\*\*

## 1. はしがき

三辺固定、一辺自由の等方性矩形板の曲げの問題は、解析的には解けない問題とされていて、まず、坂教授は、普通の階差法 ( $\mu=0$  と仮定する) を用いて、タワミを求め、次いで曲げモーメントを計算した<sup>1)</sup>。次いで水野教授、吉村芳男氏は、まず、モーメント和を、次いでタワミを求めるという、二段の操作で、この問題を解いた<sup>2)</sup>。

この研究では、ポアソン比  $\mu=0$  とせず、 $\mu=1/6$  とし、 $\mu$  の影響が相当あることを示している。しかし、普通精度の階差法によっているので、解の精度に問題があり、 $\mu$  の影響は二次的なものである。かつ、等変分布荷重の場合しか取扱っていない。

一方、この問題は、等分布荷重満載の場合にかぎり、解析的に解けるが<sup>3)</sup>、膨大な手数を要し、任意の点のタワミ、曲げモーメントを求めるのは、むしろ、階差法による方がよい。

この問題は、ケーソンの側壁の設計計算に関連して、最近注目されているが、一般には、普通精度の階差法によっているようである。著者らは、Zurmühl の板に対する改良階差法を三辺固定・一辺自由の矩形板に適用して、若干の結果を得たので、以下これらについて述べたいと思う。

## 2. Zurmühl の板に対する改良階差法

Zurmühl の板に対する改良階差法について、以下簡単に式のみを紹介しよう。等方性薄板の中央面の釣合の方程式は、次のように表わされる。

$$\Delta \Delta u = p/N \quad (1)$$

ここに、 $u$ : 板の中央面のタワミ、 $p$ : 分布荷重の強度  $N$ : 板剛度、である。

断面力は、次のように表わされる。

曲げモーメント

$$m_x = -N(u_{xx} + \mu u_{yy}), \quad m_y = -N(u_{yy} + \mu u_{xx}) \quad (2)$$

ねじりモーメント

$$m_{xy} = -N(1-\mu)u_{xy} \quad (3)$$

\* 正員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室  
\*\* 正員 播摩造船所教構設計課  
\*\*\* 正員 京都大学助手, 工学部土木工学教室  
\*\*\*\* 正員 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻 修士課程学生

せん断力

$$q_x = -N(u_{x_{xx}} + u_{x_{yy}}), \quad q_y = -N(u_{y_{yy}} + \mu u_{x_{xy}}) \quad (4)$$

$$\bar{q}_x = -N\{u_{x_{xx}} + (2-\mu)u_{x_{yy}}\} \quad (5)$$

$$\bar{q}_y = -N\{u_{y_{yy}} + (2-\mu)u_{x_{xy}}\}$$

境界条件は、辺  $x=\text{const.}$  で次のようになる。

固定辺:  $u=0, u_x=0$  (6)

単純支持辺:  $u=0, m_x=0$ , すなわち,  $u_{xx}=0$  (7)

自由辺:  $m_x=0$ , すなわち,  $u_{xx} + \mu u_{yy}=0$

および  $\bar{q}_x=0$ , すなわち,  $u_{x_{xx}} + (2-\mu)u_{x_{yy}}=0$  (8)

自由隅: さらに  $m_{xy}=0$  すなわち  $u_{xy}=0$  (9)

板の支持状態を区別するために、次のように図示する。

二重実線——固定辺 ( $u=0, u_x=0$ ), 一重実線——単純支持辺 ( $u=0, u_{xx}=0$ ), 点線……自由辺 ( $m_x=0, \bar{q}_x=0$ )

### A) 一般内点に対する階差式

$$\text{A) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -10 & -2 & 1 \\ 1 & -10 & 36 & -10 & 1 \\ 1 & -2 & -10 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} u = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^2)$$

### B) 支持辺に隣接する内点および支持辺上の点に対する階差式

$$\text{R 1) } 60 u_x h = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 16 & -80 & 16 \\ -149 & 336 & -144 & 32 & -3 \\ 16 & -80 & 16 \\ 2 & 8 & 2 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^2),$$




$$\text{R 2) } -180 u_{xx} h^2 = \begin{bmatrix} 13 & 124 & -59 \\ 248 & -1240 & 824 & -144 \\ -969 & 5480 & -2772 & 816 & -87 \\ 248 & -1240 & 824 & -144 \\ 13 & 124 & -59 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 13 \\ 0 & 124 & -72 \\ 13 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^2),$$

$$\text{R 2a) } 180 u_{yy} h^2 = \begin{bmatrix} -17 & 4 & 4 \\ 248 & -4 & -40 & 12 \\ -456 & -24 & 108 & -48 & 6 \\ 248 & -4 & -40 & 12 \\ -17 & 4 & 4 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^2),$$

$$\text{R 3) } 24 \bar{q}_x h^3 = \begin{bmatrix} 15 & 16 & -13 \\ -64 & -136 & 160 & -32 \\ 56 & 384 & -474 & 160 & -18 \\ -64 & -136 & 160 & -32 \\ 15 & 16 & -13 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 3 \\ 6 & 24 & -18 \\ 3 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4$$

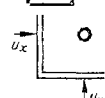
$$- \mu \cdot \begin{bmatrix} 9 & -16 & 25 \\ -80 & 172 & -208 & 44 \\ -80 & 172 & -208 & 44 \\ 9 & -16 & 25 \end{bmatrix} u + \mu \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 & -12 & 21 \\ 3 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^2).$$

### C) B) にかかった4つの公式の適用に関する注意一覧表

境界	境界条件	公式	適用
固定 	$u_x = 0$	R 1	境界に隣接する点
単組支持 	$u_{xx} = 0$	R 2	境界に隣接する点
自由 	$u_{xx} + \mu u_{yy} = 0$ $u_{xxx} + (2-\mu)u_{xyy} = 0$	R 2, R 2a R 3	境界に隣接する点 境界上の点

D) 隅角部の内点および隅角辺上の点に対する階差式

**ES1**

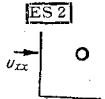


-2	1	-2
8	16	8
10	-124	0
-149	<b>448</b>	-124
20	-149	10

0
12
0

$$\Delta \Delta u h^4 = 60(u_x^{(2)} + u_y^{(2)})h + (h^7),$$
  

**ES2**

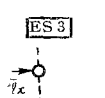


11	-37	11
-44	328	-44
377	-1586	432
-1041	<b>3296</b>	-1586
322	-1041	377

12
12
12

$$\Delta \Delta u h^4 = -180(u_{xx}^{(2)} + u_{yy}^{(2)})h^2 + (7^7),$$
  

**ES3**



55	-80	55
-148	248	-148
85	-388	360
<b>156</b>	160	-388
-190	<b>156</b>	85

44
32
32

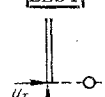
7	-20	7
-64	152	-64
325	-664	360
-564	1120	-664
290	-564	325

$$\Delta \Delta u h^4 + \mu \cdot$$
  

7
1
1

$$+ \mu \cdot \Delta \Delta u h^4 = 72(\bar{q}_x^{(2)} + \bar{q}_y^{(2)})h^3 + (h^7),$$

**EES1**

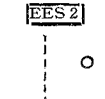


-21	24	-18
80	-48	48
-138	0	-72
168	96	0
-214	<b>168</b>	-138

14
2
2

$$\Delta \Delta u h^4 = 30(u_x^{(2)} + u_y^{(2)})h + (h^7),$$
  

**EES2**

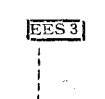


-68	76	-63
232	-104	152
-311	-192	-156
148	<b>592</b>	-192
-176	148	-311

-163
-13
-13

$$\Delta \Delta u h^4 = -60(u_{xx}^{(2)} + u_{yy}^{(2)})h^2 + (h^7),$$
  

**EES3**




159	-228	141
-712	984	-600
1653	-2544	1782
-2412	<b>1384</b>	-2544
1653	-2544	1782

84
12
12

$$\Delta \Delta u h^4 = 360 u_{xy}^{(2)} h^2 + (h^7).$$

**E1**



-38	76	-38
152	-304	152
238	212	-72
-1375	<b>1264</b>	-880
428	-168	118

1
-5
1

$$\Delta \Delta u h^4 = 300 u_x^{(2)} h + 360 u_y^{(2)} h^2 + (h^7).$$

**E 2**

$$\begin{bmatrix} -83 & 166 & -83 \\ 332 & -664 & 332 \\ 691 & 290 & 36 & -106 & -11 \\ -2496 & 2008 & -1996 & 752 & -68 \\ 1106 & -540 & 451 & -106 & -11 \end{bmatrix} u - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 & 292 & -151 \\ 5 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 = -180 u_{xx}^{(3)} + 900 u_{yy}^{(3)} h^2 + (h^7),$$

**E 3°**

$$\begin{bmatrix} -23 & 23 \\ 92 & -92 \\ -136 & 192 & -90 & 34 \\ 118 & -308 & 324 & -152 & 18 \\ -21 & 77 & -90 & 34 \end{bmatrix} u + \mu \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \\ -16 & 30 & -18 & 4 \\ 40 & -68 & 36 & -8 \\ -21 & 35 & -18 & 4 \end{bmatrix} u - 21 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 = -12 \bar{q}_x^{(3)} h^3 + (h^5),$$

**F 3**

$$\begin{bmatrix} 55 & -110 & 55 \\ -220 & 440 & -220 \\ 320 & -836 & 750 & -320 & 86 \\ -306 & 1238 & -1808 & 1268 & -438 & 46 \\ 45 & -286 & 475 & -320 & 66 \end{bmatrix} u + \mu \begin{bmatrix} -5 & 10 & -5 \\ 20 & -40 & 20 \\ 20 & -32 & 30 & -20 & 2 \\ -78 & 134 & -80 & 20 & 6 & -2 \\ 45 & -82 & 55 & -20 & 2 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 0 \\ 49 & -102 & 53 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 - \mu \begin{bmatrix} 0 \\ -2 & 6 & -4 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 = 24 \bar{q}_y h^3 + (h^7).$$

**RM 1**

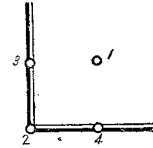
$$\begin{bmatrix} 25 & -48 & 36 & -16 & 3 \\ -50 & 96 & -72 & 32 & -6 \\ 25 & -48 & 36 & -16 & 3 \end{bmatrix} u - 12 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u_{xx} h + (h^7),$$

**RM 2**

$$\begin{bmatrix} 35 & -104 & 114 & -56 & 11 \\ -70 & 208 & -128 & 64 & -22 \\ 35 & -104 & 114 & -56 & 11 \end{bmatrix} u + 12 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u_{xx} h^2 + (h^7).$$

E) D) にかかけた12の公式の適用に関する注意一覧表 (点の表わし方は次の図による)

隅角縁	境界条件	公式	適用
	$u_x = 0$ in 3 $u_y = 0$ in 4	ES 1	点 1
	$u_{xx} = 0$ in 3 $u_{yy} = 0$ in 4	ES 2	点 1
	$u_x = 0$ in 3	E 1 または RM 1	点 1
	$u_x = 0$ in 3 $u_x = 0$ in 2	E 1 または RM 1 EES 1	点 1 点 4
	$u_{xx} = 0$ in 3 $u_{xx} = 0$ in 2	E 2 または RM 2 EES 2	点 1 点 4
	$u_{xx} = u_{yy} = 0$ in 2 $u_{xy} = 0$ in 2	EES 2 EES 3	点 1 点 2
	$\bar{q}_x = 0$ in 3 $\bar{q}_y = 0$ in 4 完全に対象の場合	E 3 または E 3° ES 3 ES 3	点 3 点 4 点 3=4



F) 二次微係数の階差式

(a) 一般公式

$$\boxed{\text{B}} -180 u_{xxx} h^2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 4 & -24 & 40 & -24 & 4 \\ 7 & -196 & \boxed{378} & -196 & 7 \\ 4 & -24 & 40 & -24 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^5),$$

(b) 境界辺に隣接する内点に対する公式

$$\boxed{\text{BR 1}} -180 u_{xx} h^2 = \begin{bmatrix} -2 & -11 & 1 \\ -22 & 110 & -46 & 6 \\ -129 & \boxed{150} & -72 & -24 & 3 \\ -22 & 110 & -46 & 6 \\ -2 & -11 & 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 & 11 & -3 \\ 2 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^7),$$

$$\boxed{\text{BR 2}} -180 u_{yy} h^2 = \begin{bmatrix} 2 & 11 & -4 \\ -8 & -236 & 40 & -12 \\ 6 & \boxed{474} & -108 & 48 & -6 \\ -8 & -236 & 40 & -12 \\ 2 & 11 & -4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ -1 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + (h^7).$$

(c) 境界辺上の点に対する公式 R2, R3 を用いる。

(d) 隅角部の内点および隅角辺上の点に対する公式

$$\boxed{\text{BE 1}} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} u_{xx} \\ \circ \end{array} -720 u_{xxx} h^2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 8 & -16 & 8 \\ -16 & 40 & -36 & 16 & -4 \\ -1269 & \boxed{2352} & -1204 & 128 & -7 \\ -6 & 20 & -26 & 16 & -4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 - 330 u_x^{(3)} h + (h^7),$$

$$\boxed{\text{BE 2}} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} u_{yy} \\ \circ \end{array} -720 u_{yyy} h^2 = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 6 \\ -24 & 48 & -24 \\ -76 & -584 & -36 & -32 & 8 \\ 765 & \boxed{112} & 660 & -96 & -1 \\ -106 & -524 & -66 & -32 & 8 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 & 56 & 0 \\ 2 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + 300 u_x^{(3)} h + (h^7),$$

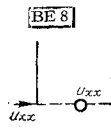
$$\boxed{\text{BE 3}} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} u_{xx} \\ \circ \end{array} -1800 u_{xxx} h^2 = \begin{bmatrix} 7 & -14 & 7 \\ -28 & 56 & -28 \\ 56 & -140 & 126 & -56 & 14 \\ -2231 & \boxed{4728} & -2806 & 352 & -43 \\ 21 & -70 & 91 & -56 & 14 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -7 & 14 & -7 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + 180 u_x^{(3)} h^2 + (h^7),$$

$$\boxed{\text{BE 4}} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} u_{yy} \\ \circ \end{array} -1800 u_{yyy} h^2 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -12 & 24 & -12 \\ -286 & -1220 & -306 & 16 & -4 \\ 971 & \boxed{1432} & 1446 & -272 & 23 \\ -301 & -1190 & -321 & 16 & -4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 5 \\ 12 & 116 & 12 \\ 5 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 - 180 u_x^{(3)} h^2 + (h^7),$$

$$\boxed{\text{BE 5}} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} u_{xx} \\ \circ \end{array} -360 u_{xxx} h^2 = \begin{bmatrix} 24 & -48 & 24 \\ -96 & 192 & -96 \\ 192 & -480 & 432 & -192 & 48 \\ \boxed{1883} & -2304 & 408 & 64 & -51 \\ 72 & -240 & 312 & -192 & 48 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -24 & 48 & -24 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + 1500 u_x^{(3)} h + (h^7),$$

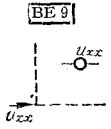
$$\boxed{\text{BE 6}} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} u_{xx} \\ \circ \end{array} -360 u_{xxx} h^2 = \begin{bmatrix} 24 & -48 & 24 \\ -96 & 192 & -96 \\ 192 & -480 & 432 & -192 & 48 \\ -192 & +576 & -672 & 384 & -96 \\ \boxed{2147} & -3120 & 1392 & -512 & 93 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -24 & 48 & -24 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 + 1500 u_x^{(3)} h + (h^7),$$

$$\boxed{\text{BE 7}} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} u_{xx} \\ \circ \end{array} -720 u_{xxx} h^2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 8 & -16 & 8 \\ -16 & 40 & -36 & 16 & -4 \\ 16 & -48 & 56 & -32 & 8 \\ -1291 & \boxed{2420} & -1286 & 176 & -19 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \Delta u h^4 - 300 u_x^{(3)} h + (h^7),$$



7	-14	7		
-28	56	-28		
56	-140	126	-56	14
-56	168	-196	112	-28
-2154	4490	-2519	184	-1

$$u + \begin{matrix} 0 \\ -7 & 14 & -7 \\ 0 \end{matrix} \Delta \Delta u h^4 + 1800 u_{xx}^{(2)} h^2 + (h^2),$$



-23	-104	-23		
-208	1016	-208		
316	-1240	-414	584	-146
-3516	7048	-2056	-1168	292
-544	1440	-1709	824	-161

$$u + \begin{matrix} 175 \\ -2 & -46 & -2 \\ 25 \end{matrix} \Delta \Delta u h^4 + 180 u_{xx}^{(2)} h^2 + (h^2),$$

G) F, d) の9つの公式の適用に関する注意一覧表

隅角辺	点番号	適用公式	
		$u_{xx}$	$u_{yy}$
	1	BE 1	BE 1*
	2	0	0
	3	BE 5	0
	4	0	BE 5*
	1	BE 3	BE 3*
	2	0	0
	3	0	0
	4	0	0
	1	BE 9	BE 9*
	2	0	0
	3	$u_{xx} = -\mu u_{yy}$	BE 8*
	4	BE 8	$u_{yy} = -\mu u_{xx}$
	1	BE 1	BE 2
	2	BE 6	0
	3	BE 5	0
	4	0	0
	1	BE 1	BE 2
	2	BE 6	0
	3	BE 5	0
	4	BE 7	$u_{yy} = -\mu u_{xx}$
	1	BE 3	BE 4
	2	0	0
	3	0	0
	4	BE 8	$u_{yy} = -\mu u_{xx}$

備考: \* は x と y を交換して用いることを示す。

3. Zurmühlの板に対する改良階差法による三辺固定、一辺自由の矩形板の階差方程式とその解

解析の対称とした矩形板は 図-1 のように、三辺固定・一辺自由で、短辺が  $a$ 、長辺が  $b=a$ ,  $b=5a/4$ ,  $b=6a/4$ ,  $b=7a/4$ ,  $b=8a/4$  の5種類とした。この矩形板を  $h=a/4$  の square network でおおう。図-2 は square network の格点番号を示す。図-2 の  $b/a=6/4$  の矩形板に対する階差方程式のみを表-1 に示す。右辺は  $qa^4/256 N$  を単位にとつてある。

図-1 解析の対象とする矩形板

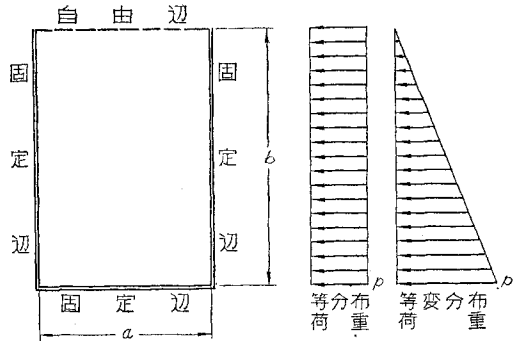


図-2 square network と格子点の符号

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$a/b=4/4$	$a/b=4/5$	$a/b=4/6$	$a/b=4/7$	$a/b=4/8$
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c
d	d	d	d	d
e	e	e	e	e
f	f	f	f	f
g	g	g	g	g
h	h	h	h	h
i	i	i	i	i
j	j	j	j	j
k	k	k	k	k
l	l	l	l	l

4. 三辺固定・一辺自由の矩形板のタワミの値

図-2 の5種の矩形板に対する階差方程式を、Crout

表-1 図-2(c) ( $b/a=6/4$ ) の場合の階差方程式

格点	公式	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$	$w_{10}$	$w_{11}$	$w_{12}$	等分布	等変分布
1	EES 1	24.8	-13.8	4.8	0	4.8	-7.2	-4.8	4.8	2.4	-1.8			0	-0.2
2	R 3	-12.8	5.6	-27.2	38.4	32.0	-47.4	-6.4	16.0	0	-1.8			1.8	-0.1
3	E 1	-1.72	1.18	15.52	-8.80	2.08	-0.72	-3.04	1.52	0.76	-0.38			0.3	0.05
4	R 2	4.96	-9.69	-24.80	34.80	16.48	-27.72	-2.88	8.16	0	-0.87			0.78	0.010
5	R 1	0.8	0.2	-8.0	1.6	36.8	-14.4	-8.0	1.6	0.8	0.2			1.2	0.4
6	A	2.0	1.0	-4.0	-10.0	-20.0	36.0	-4.0	-10.0	2.0	1.0			3.0	1.0
7	R 1			0.8	0.2	-8.0	1.6	36.8	-14.4	-8.0	1.6	0.8	0.2	1.2	0.6
8	A			2.0	1.0	-4.0	-10.0	-20.0	36.0	-4.0	-10.0	2.0	1.0	3.0	1.5
9	R 1					0.8	0.2	-8.0	1.6	36.8	-14.4	-8.0	1.6	1.2	0.8
10	A					2.0	1.0	-4.0	-10.0	-20.0	36.0	-4.0	-10.0	3.0	2.0
11	ES 1					0.1	-0.2	1.6	0.8	-11.6	0	46.4	-12.4	1.2	1.0
12	R 1						-0.3	0	3.2	3.2	-14.4	-16.0	33.6	1.2	1.0

表-2 1000・ $\bar{u}$  の値

荷重	矩形板の種類	$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	$\bar{u}_3$	$\bar{u}_4$	$\bar{u}_5$	$\bar{u}_6$	$\bar{u}_7$	$\bar{u}_8$	$\bar{u}_9$	$\bar{u}_{10}$	$\bar{u}_{11}$	$\bar{u}_{12}$	$\bar{u}_{13}$	$\bar{u}_{14}$	$\bar{u}_{15}$	$\bar{u}_{16}$	
等分布荷重	4:4 (図-2,a)	1.4662	2.6214	1.3737	2.4288	1.1049	1.9244	0.5387	0.9076									
	4:5 (図-2,b)	1.4734	2.6317	1.4569	2.5852	1.3687	1.1029	2.4115	1.9191	0.5383	0.9067							
	4:6 (図-2,c)	1.4694	2.6183	1.4717	2.6150	1.4526	2.5739	1.3664	2.4066	1.1021	1.9175	0.5381	0.9064					
	4:7 (図-2,d)	1.4660	2.6085	1.4693	2.6124	1.4693	2.6097	1.4513	2.5713	1.3659	2.4057	1.1020	1.9172	0.5381	0.9063			
	4:8 (図-2,e)	1.4649	2.6048	1.4667	2.6076	1.4689	2.6110	1.4689	2.6089	1.4511	2.5710	1.3658	2.4056	1.1020	1.9172	0.5381	0.9063	
等変分布荷重	4:4 (図-2,a)	0.3194	0.6103	0.4336	0.7775	0.4825	0.8294	0.3006	0.4887									
	4:5 (図-2,b)	0.2583	0.4925	0.3954	0.7134	0.5421	0.9513	0.5796	0.9941	0.3429	0.5615							
	4:6 (図-2,c)	0.2120	0.4007	0.3385	0.6130	0.5063	0.8984	0.6561	1.1483	0.6609	1.1361	0.3748	0.6173					
	4:7 (図-2,d)	0.1792	0.3364	0.2885	0.5234	0.4455	0.7948	0.6220	1.1000	0.7529	1.3812	0.7235	1.2464	0.3982	0.6588			
	4:8 (図-2,e)	0.1560	0.2916	0.2503	0.4543	0.3894	0.6963	0.5571	0.9898	0.7217	1.2756	0.8292	1.4532	0.7711	1.3306	0.4158	0.6899	

法によつて解いた結果を、 $u_i = \bar{u}_i (pa^4/N)$  の形で表わし  $1000 \cdot \bar{u}_i$  の値を表-2 および、図-3~7 の格子点の上側に示す。図-3, 5 で格子点の下に記入したのは坂教授の求めた値である。

連立方程式は、それぞれ、8元、10元、12元、14元、16元となるが、8~12元の場合はモンローの電動計算機により、14元、16元の場合は、Facom-128 B によつて解いた。Zurmühl の方法によれば、タワミの値が相当小さくなり、比較的粗な network でも、よい値が得られている。

### 5. 三辺固定・一辺自由の矩形板の曲げモーメントの値

以上で求められたタワミの値をもとにして、Zurmühl の二次微係数の公式によつて  $M_x, M_y$  ( $x$  は短辺方向、 $y$  は長辺方向を示す) を求めた結果を図-3~7 の  $M_x, M_y$  欄の格子点の上側に示す。ただし、この図では、

$$M_x = \bar{m}_x pa^2, M_y = \bar{m}_y pa^2$$

図-3  $b/a=4/4$  の場合の  $1000 \bar{u}, 1000 \bar{m}_x, 1000 \bar{m}_y$  の値

	$u$	$M_x$	$M_y$
等	0 1.4662 2.6214 -0.34761 10.3835 41.7801 2.401 3.797 -76.53 16.08 44.61	0 0 0	0 0 0
介	0 1.3737 2.4288 -0.76590 10.1843 38.2032 2.192 3.450 -1.074 14.95 40.45	0 2.7837 4.9063 3.44 5.74	0 2.7837 4.9063 3.44 5.74
布	0 1.1049 1.9244 -0.71848 9.1019 29.4506 1.788 2.756 -56.58 12.48 31.62	0 5.0859 8.9027 6.10 9.44	0 5.0859 8.9027 6.10 9.44
荷	0 0.5387 0.9076 -32.1991 3.7639 16.5572 0.958 1.463 -30.66 7.25 16.16	0 2.2949 3.5069 2.31 2.72	0 2.2949 3.5069 2.31 2.72
重	0 0 0 0 0 0	0 -32.1991 -56.5529 -30.66 -46.82	0 -32.1991 -56.5529 -30.66 -46.82
等	0 0.3194 0.6103 -16.5500 1.1054 10.5762 0.452 0.750 -14.46 2.46 9.54	0 0 0	0 0 0
変	0 0.4336 0.7775 -27.2091 2.9112 12.2948 0.642 1.071 -20.54 4.27 12.00	0 0.8095 1.4038 1.34 2.21	0 0.8095 1.4038 1.34 2.21
介	0 0.4875 0.8294 -30.9047 4.3166 12.3208 0.748 1.145 -23.94 5.60 12.74	0 3.8761 6.7195 5.72 7.74	0 3.8761 6.7195 5.72 7.74
布	0 0.3006 0.4887 -17.8353 3.3338 8.8999 0.534 0.791 -17.09 4.48 8.22	0 4.0223 3.4745 5.12 6.98	0 4.0223 3.4745 5.12 6.98
荷	0 0 0 0 0 0	0 -20.7692 -25.3292 -17.09 -25.31	0 -20.7692 -25.3292 -17.09 -25.31
重	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0

図-4  $b/a=5/4$  の場合の  $1000 \bar{u}, 1000 \bar{m}_x, 1000 \bar{m}_y$  の値

	$u$	$M_x$	$M_y$
等	0 1.4734 2.6317 -83.5133 10.1469 42.4771	0 0 0	0 0 0
介	0 1.4569 2.5852 -84.4636 10.5120 41.7239	0 1.0341 1.8356	0 1.0341 1.8356
布	0 1.3687 2.4115 -80.0003 12.3868 37.8856	0 2.7348 4.9943	0 2.7348 4.9943
荷	0 1.1029 1.9191 -67.8497 9.1375 29.3120	0 5.0996 9.0724	0 5.0996 9.0724
重	0 0.5383 0.9067 -32.2008 5.2003 13.1109	0 2.1950 2.4855	0 2.1950 2.4855
	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 -32.2009 -56.6771

	$u$	$M_x$	$M_y$
等	0 0.2583 0.4925 -13.0717 0.9029 5.7098	0 0 0	0 0 0
変	0 0.3954 0.7134 -21.9118 2.5149 11.9249	0 -0.3795 -0.6530	0 -0.3795 -0.6530
介	0 0.5471 0.9513 -32.0020 4.2264 14.8251	0 1.6464 2.9955	0 1.6464 2.9955
布	0 0.5796 0.9941 -37.3284 5.2455 14.6962	0 4.6007 8.1143	0 4.6007 8.1143
荷	0 0.3429 0.5615 -21.6934 3.7798 7.6215	0 3.8556 5.3710	0 3.8556 5.3710
重	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 -22.9911 -38.4992

図-7 (b)  $b/a=8/4$  の場合の  $1000 \bar{u}, 1000 \bar{m}_x, 1000 \bar{m}_y$  の値 (等変分布荷重の場合)

	$u$	$M_x$	$M_y$
等	0 0.1560 0.2916 -79.325 0.6963 5.0520	0 0 0	0 0 0
変	0 0.2503 0.4543 -13.5455 1.5097 7.5395	0 -0.7953 -1.4285	0 -0.7953 -1.4285
介	0 0.3894 0.6963 -21.7226 2.6486 11.2705	0 -0.4565 -0.8404	0 -0.4565 -0.8404
布	0 0.5571 0.9699 -31.6917 3.9796 15.8225	0 0.0204 0.0776	0 0.0204 0.0776
荷	0 0.7217 1.2756 -41.6844 5.3531 20.1753	0 0.8253 1.6010	0 0.8253 1.6010
重	0 0.8792 1.4532 -49.2074 6.5244 22.5816	0 2.5383 4.6862	0 2.5383 4.6862
	0 0.7711 1.3306 -48.6621 6.7272 19.2528	0 4.9974 8.8492	0 4.9974 8.8492
	0 0.4158 0.6899 -25.6727 4.3240 9.6445	0 3.2912 4.8093	0 3.2912 4.8093
	0 0 0 0 0 0	0 0 0	0 -20.0083 -58.5962

図-6(a)  $b/a=7/4$  の場合の  $1000 \bar{u}$ ,  $1000 \bar{m}_x$ ,  $1000 \bar{m}_y$  の値 (等分布荷重の場合)

	$u$	$M_x$	$M_y$
0	1.4660 2.6085	-83.2996 10.3608 41.7957	0 0 0
等			
分	0 1.4695 2.6124	-83.5168 10.4577 41.7922	0 0.0400 0.0793
布			
荷	0 1.4693 2.6097	-83.7515 10.5195 41.6799	0 0.2360 0.4929
重			
0	1.4513 2.5713	-83.3039 10.5804 40.8645	0 0.9750 1.8895
0	1.3659 2.4057	-79.9182 10.3923 37.7656	0 2.7521 5.0646
0	1.1020 1.9172	-67.8150 9.1381 29.2750	0 5.1184 9.0615
0	0.5381 0.9063	-32.2005 5.2008 13.1028	0 2.2033 2.5022
0	0 0 0	0 0 0	0 -32.2004 -56.6844

図-6(b)  $b/a=7/4$  の場合の  $1000 \bar{u}$ ,  $1000 \bar{m}_x$ ,  $1000 \bar{m}_y$  の値 (等分布荷重の場合)

	$u$	$M_x$	$M_y$
0	0.1792 0.3364	-96.674 0.7644 5.8509	0 0 0
等			
変	0 0.2885 0.5234	-15.6404 1.7479 8.6666	0 -0.0670 -1.5520
介			
布	0 0.4455 0.7948	-24.9805 3.0804 12.8115	0 -0.3400 -1.0161
荷			
重	0 0.6220 1.1000	-35.8684 4.5915 17.4107	0 0.6499 1.7689
0	0.7529 1.3812	-44.7957 5.9603 20.4440	0 2.4584 4.5342
0	0.7235 1.2464	-45.9019 6.3771 18.6778	0 4.9640 8.7961
0	0.3982 0.6588	-24.7308 4.1974 9.1524	0 3.4475 5.1261
0	0 0 0	0 0 0	0 -25.6408 -44.0915

表-3(a)  $b/a=6/4$  の場合の  $u_{xx}$  を求めるための計算表

格点	適用公式	$u_{xx}h^2$ の係数	$u_{xx}$ を求めるために $u_i$ に乗すべき係数の値												$\Delta \Delta u h^4$ の係数				
			$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$	$u_9$	$u_{10}$	$u_{11}$	$u_{12}$					
1	BE 7	-720	2596	-1286	-80	56	56	-36	-16	8	4	-2					0	0	
2	R 2a	180	496	-456	-8	-24	-80	108	24	-48	0	6					-6	-2	
3	BE 1	-720	36	-26	2480	-1204	56	-36	-16	8	4	2					0	0	
4	BR 2	-180	-16	6	-472	474	80	-108	-24	48	0	-6					6	2	
5	BR 1	-180	-11	1	116	-46	126	-72	116	-46	-11	1					12	4	
6	B	-180	4	-4	-48	40	-392	378	-48	40	4	-4					0	0	
7	BR 1	-180			-11	1	116	-46	126	-72	116	-46	-11	1			12	4	
8	B	-180			4	-4	-48	40	-392	378	-48	40	4	-4			0	0	
9	BR 1	-180					-11	1	116	-46	126	-72	116	-46	-11	1	-46	12	8
10	B	-180						4	-4	-48	40	-392	738	-48	40	40	0	0	
11	BE 1	-720						4	-2	-16	8	56	-36	2480	-1204		0	0	
12	BR 2	-180						-6	-24	48	80	-108	-472	474		6	4		
a	BE 6	-360	-3632	1392	960	-672	-72	432	192	-96	-48	24				0	0		
b	BE 5	-360	-432	-312	-2240	408	-672	432	192	-96	-48	24				0	0		
c	R 2	-180	124	-59	-1384	824	4296	-2772	-1384	824	124	-59				-78	-26		
d	R 2	-180			124	-59	-1384	824	4296	-2772	-1384	824	-59			-78	-39		
e	R 2	-180				124	-59	-1384	824	4296	-2772	-1384	824	-59		-78	-52		
f	BE 5	-360						-48	24	192	-96	-672	432	-2240	408	0	0		

表-3(b)  $b/a=6/4$  の場合の  $u_{yy}$  を求めるための計算表

格点	適用公式	$u_{yy}h^2$ の係数	$u_{yy}$ を求めるために $u_i$ に乗すべき係数の値												$\Delta \Delta u h^4$ の係数		
			$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$	$u_9$	$u_{10}$	$u_{11}$	$u_{12}$			
3	BE 2	-720	-556	-66	16	660	-616	-36	48	-24	-12	6				60	10
4	BR 1	-180	-44	-129	220	150	-92	-72	12	-24	0	3				12	1.5
5	BR 2	-180	11	-4	-248	40	522	-108	-248	40	11	-4				6	2
6	B	-180	8	7	-48	-196	80	378	-48	-196	8	7				0	0
7	BR 2	-180			11	-4	-248	40	522	-108	-248	40	11	-4		6	3
8	B	-180			8	7	-48	-196	80	378	-48	-196	8	7		0	0
9	BR 2	-180					11	-4	-248	40	522	-108	-248	40	6	4	4
10	B	-180						8	7	-48	-196	80	378	-48	-196	0	0
11	BE 2	-720					-12	6	48	-24	-616	-36	16	660	60	50	
12	BR 1	-180					0	3	12	-24	-92	-72	220	150	12	10.5	
i	BE 5	-360					-51	48	64	-192	312	432	-2112	-480	0	0	
j	R 2	-180					0	-87	-288	816	1648	-2772	-2480	3480	-78		

として、 $10^3 \bar{m}_x$ ,  $10^3 \bar{m}_y$  の値を示してある。図-3.5で格子点の下に記入してあるのは坂教授の求めた値である。なお、参考までに、 $b/a=6/4$  の矩形板(図-2(c))に

おいて、各格子点の  $u_{xx}$ ,  $u_{yy}$  をいかにして計算するかを、表-3(a),(b)に示す。

図-7(a)  $b/a=8/4$  の場合の  $1000 \bar{u}$ ,  $1000 \bar{m}_x$ ,  $1000 \bar{m}_y$  の値 (等分布荷重の場合)

	$M_x$				$M_y$		
$u$	0	1.4649	2.6048	-83.2983	10.3931	41.6747	0
等	0	1.4687	2.6076	-83.4300	10.4263	41.7263	0
分	0	1.4689	2.6110	-83.5738	10.4570	41.7648	0
布	0	1.4689	2.6089	-83.7317	10.5184	41.6649	0
荷	0	1.4571	2.5710	-83.2966	10.5799	40.8595	0
重	0	1.3658	2.4056	-78.9164	10.3423	37.7637	0
	0	1.1020	1.9172	-67.8150	9.1582	29.2746	0
	0	0.5381	0.9063	-32.2007	5.2009	11.6469	0
	0	0	0	0	0	0	0

## 6. 考 察

以上において、三辺固定、一辺自由の矩形板が、等分布荷重・等変分布荷重を受ける場合の、タワミおよび曲げモーメントを求めたが、これらの図表は、設計計算に役立つことと思う。

普通精度の階差法と Zurmühl の板に対する改良階差法による曲げモーメントの値は、相当のちがいがある。一般に、固定辺の曲げモーメントは、後者による値は前者による値にくらべて 1~2 割大きく、逆に、スパン中央の曲げモーメントは、1~2 割小さくなっていることは、注意すべきである。

## 7. む す び

著者の一人、成岡は、土木学会誌、第 33 巻第 7 号で階差法について講座欄に執筆したが、その際、Zurmühl の階差法にふれる紙数がなかつたので、割愛した。今回、これを紹介し、三辺固定、一辺自由の矩形板が等分布荷重および等変分布荷重を満載する場合に応用し、従

図-5  $b/a=6/4$  の場合の  $1000 \bar{u}$ ,  $1000 \bar{m}_x$ ,  $1000 \bar{m}_y$  の値


	$M_x$				$M_y$		
$u$	0	1.4694	2.6183	-83.4007	10.2649	42.0030	0
等	0	1.4717	2.6150	-83.790	10.6795	41.7751	0
分	0	1.4576	2.5739	-83.3601	10.5916	40.9444	0
布	0	1.3664	2.4066	-79.9385	10.3430	37.7636	0
荷	0	1.1021	1.9175	-67.8182	9.1579	29.3911	0
重	0	0.5381	0.9064	-32.2002	5.2005	11.6468	0
	0	0	0	0	0	0	0

来の解法による値と比較を試みた。

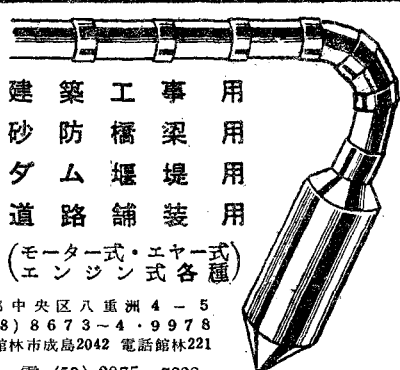
今後、digital computer の発達にともない、階差法による板の計算が増加することと思われるが、この Zurmühl の方法は、格子点の数を多くとらずに、相当よい値が得られる点で、注目に値すると思う。等方性板に対しては、普通精度の階差法のみならず、この方法にも習熟していただきたいと思う。

## 参 考 文 献

- 1) 坂：建築学会論文集，1 (1936)，p. 100
- 2) 水野，吉村：土木学会誌，36 (1951)，p. 178
- 3) 山田：日本機械学会論文集，20. 99 (1954)，p. 707.
- 4) Zurmühl: ZAMM, 37 (1957), S. 1.



三笠産業株式会社



建築工事用  
砂防橋梁用  
ダム堰堤用  
道路舗装用  
(モーター式・エヤー式)  
エンジン式各種

本社営業所 東京都中央区八重洲 4-5  
電話 (28) 8673-4, 9978  
工 場 群馬県館林市成島 2042 電話館林 221

西部地区総発売元 三笠建設機械株式会社 大阪市西区立売堀北通 4 電 (53) 2875・7888