

階 差 法 に 関 す る 文 献

成 岡 昌 夫*

土木学会誌 第 43 卷 第 7 号 (昭.33.7) の講座欄に、“階差法とその応用”に関する記事がのせられたが、紙数の都合上、文献を省略した。せつかく準備したものがあるので、資料として改めて紹介する。

digital computer の発達にともない、computer analysis が逐次活潑となつてくるので、この方面の既往の文献集が多少とも参考になれば幸いである。外国の雑誌は米・独のおもなるもののみとした。もちろん、見逃しているものが多いので、追つて補備訂正を加えたい。

階差法で解こうとする場合、たとえば、連立多元一次方程式のような数式が求められたとしても、これを解くことは、次の重要な、軽視しえない問題である。文献 1), 2), 3) において、図—3, 4, 10, 式 (3.5), (3.10) とあるのは、さきの講座中の番号に対応する。

1. 著 書

1) H. Marcus : Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten (弾性網理論とその板計算への応用), Berlin 1924. 薄い平板の曲げの問題を階差法で解いた結果をまとめたものである。ドイツの R C の標準示方書に採用されている Marcus の略算法は、板を二方向の細長帯をもつて代用させて考える Grashof-Rankine 式に、ねじりの項を代数的に付加したものであるが、その根拠は、実に、階差法による豊富な数値計算と、それから生ずる板に関する物理的性質の深い認識にあるのであつて、“床板の計算”の著書において“strenge Berechnung”というのは、階差法による計算値を意味する。

2) 日高 孝次：数値積分法，上巻，昭 11；下巻，昭 18，岩波書店。数値積分法全般にわたつて述べられているが階差法についても相当のページ数がさかれている。

3) T.H. Higgins : A Survey of the Approximate Solution of Two-Dimensional Methods and Finite Procedure (二次元問題の変分法と階差法による近似解法の展望)。これは、L.E. Grinter 編著：Numerical Methods of Analysis in Engineering, New York 1949 の第 10 章となつており、階差法に関する多くの文献があげられている。ただし、著者は電気工学の教授であるので、土木工学に関係のある文献を欠除している。

4) L. Collatz : Numerische Behandlung von Diffe-

rentialgleichungen (微分方程式の数値解析法), Berlin 1951. 階差法についても、くわしく述べられている。

2. 論 文

1) 坂：自由辺をもつ矩形板の設計曲げモーメント，建築学会論文集，1 (昭 11), p. 100. 三辺固定，一辺自由の矩形板に、等分布荷重・等変分布荷重が作用する場合を、図—3, 4 の公式を用いて解いたものである。

2) 水野・吉村：三辺固定，一辺自由の矩形板の計算及びその応用，土木学会誌，36 (昭 26), p. 178. 対象は 1) と同一であるが、式 (3.5), (3.10) の二段の計算によつて解いている。 $\nu=1/6$ としている点が、前者と異なる。しかし、著者の私見によれば、固定辺をふくむ場合であるので、network はもつと密にするか、高精度階差法のいずれかによるようにすべきであつて、ここに掲げられた計算値をそのまま使うのは、再考すべきであると思う。

著者は、後記の Zührmül の改良階差法を応用して、この問題のより正しい解をうるべく努力しているので、結果は遠からず発表されよう。

3) 西原・吉田：階差法による正方形板の撓みの解法，日本機械学会論文集，13.45 (昭 22), p. 105. 四辺固定から四辺単純支持までの各種の境界条件の組合わせに対して、図—10, b) より一段と精度の高い高精度階差法を用いて解いている。四辺固定の場合には、高精度階差法は、特に威力を発揮する。

支 持 条 件	等分 数	中心点のタワミ	正しい値 (誤差)
四 辺 固 定	6	0.001 26 qa^4/N	0.001 27 qa^4/N (0.8%)
三辺固定，一辺単純支持	4	149	—
相対する二辺固定，他の二辺単純支持	4	182	0.001 91 (4.7%)
一辺固定，三辺単純支持	4	258	275 (6.2%)
四 辺 単 純 支 持	6	391	406 (3.7%)

4) 砂谷・根来：平面調和函数の近似解法について，日本機械学会論文集，3 (昭 12), p. 68, 東北大学工学報告，12 (昭 13), p. 339, 根来：円形の孔をもつ正方形真直棒の捩り弾性応力，日本機械学会論文集，5.21 (昭 14), p. 142. 一連の研究であつて、前記の Higgins の文献に、邦人としてあげられている唯一の論文であり、また、日高孝次：数値積分法，下巻，p. 100 にも紹介されている。従来階差法では、辺点は二直線群の交点にあるようにしなければならなかつたが、交点と辺点とが一致し

* 正員 工博 京都大学教授，工学部土木工学教室

なくても応用できるように改良し、ねじりの問題 $\Delta^2 u = c$ に応用したものである。

5) 坪井：二重曲面をもつ Shell の諸公式，日本建築学会発行：RC 構造の問題（昭 30），第 4 編シャーレン構造の第 2 章の解説のなかで，直角座標における Shell の曲げ応力の解析のところで，

$$D \Delta^2 \Delta^2 w - (\Delta^2 \phi / R) = p, \\ (R/Eh) \Delta^2 \Delta^2 \phi + \Delta^2 w = 0$$

ただし， $\Delta^2 = (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2)$

$$\Delta^2 \Delta^2 = (\partial^4 / \partial x^4) + 2(\partial^4 / \partial x^2 \partial y^2) + (\partial^4 / \partial y^4)$$

R: 曲率半径，p: 自重，E: ヤング係数

なる連立偏微分方程式をとくのに階差法を用いている。

6) Masao Naruoka und H. Yonezawa: Über die Anwendung der Biegungstheorie orthotroper Platten auf die Berechnung schiefer Balkenbrücken, Bauingenieur, **32** (1957), S. 391, および，米沢：直交異方性板理論の斜桁橋構造への適用に関する研究，土木学会誌，**40.10** (昭 30.10), p. 501. 斜桁橋を直交異方性板 ($\kappa=1$) となし，rectangular network で解いたものである。模型実験結果との比較にもふれている。

7) Masao Naruoka and Hiroshi Omura: The Skew Network Difference Equation for the Orthotropic Parallelogram Plate and Its Application to the Experimental Study on the Model Skew Composite Grillage Girder Bridge, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, **20.3** (1958), p. 139, および，成岡・大村・西島：直交異方性平行四辺形板の斜交座標による階差方程式について(1)，土木学会論文集，**55** (昭 33), p. 29. 直交異方性平行四辺形板 ($\kappa=1$) の skew network による階差方程式を誘導したものである。邦文は誘導方法を論じ，英文は，模型斜合成格子桁橋への適用を論じたものである。なお，この適用例は，邦文として，成岡・大村・永井：斜合成格子桁橋，斜合成桁橋模型の実験的研究，土木学会論文集，**60** (昭 34.1), p. 1 に発表されている。

8) 成岡・大村・深田：直交異方性平行四辺形板の斜交座標による階差方程式について(2)，土木学会論文集，**59** (昭 33.11), p. 7. 前著にひきつづき， $0 \leq \kappa \leq 1$ の場合の階差式を誘導したものである。

9) Sukeo Kawashima: On the Vibration of Right Triangular Cantilever Plates, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu Univ., **18.1** (1958), p. 9. 直角三角形の直角をはさむ一辺を固定した片持板の固有振動数を，rectangular network を用いて，階差法によつて求めたものである。

a) Ingenieur Archiv

10) W.L. Schwalbe: Die Torsion von Walzeisensträgern, **5** (1934), S. 179. 型鋼バリのねじり応力

の研究。

11) F. Tölke: Über die Spannungszustände in dünnen Rechteckplatten, **5** (1934), S. 187. 第 4 章，p. 210 以下において薄い矩形板の曲げ応力状態の研究が述べられている。

12) E. Wiedemann: Der Formänderungszustand einer quadratischen Platten mit quadratischer Öffnung (Nährungslösung mit Hilfe der Differenzenrechnung), **7** (1936), S. 56. 正方形板中央に同心正方形の穴のある場合の板の曲げ変形状態の研究。

13) W. Burchard: Beulspannungen der Quadratischen Platten mit Schrägsteife unter Druck bzw. Schub, **8** (1938), S. 332. 正方形板の対角線に沿うて補剛材がある場合，圧縮およびせん断による座屈応力を求めたもので， $\Delta^2 \Delta^2 w + (q/D)(\partial^2 w / \partial x^2) = 0$ ，あるいは， $\Delta^2 \Delta^2 w \pm 2(\tau/D)(\partial^2 w / \partial w \partial y) = 0$ を階差法によつて解いたものである。

14) H. Göttlicher: Die ringsum fest eingespannte Dreieckplatte von gleich-bleibender und von steig veränderlicher Dicke, **9** (1938), S. 12. 周辺固定の三角形板の等厚および変厚の場合について，正三角形の network を用いて解いたものである。

15) R. Ohlig: Zwei- und Vierseitig aufgelargerte Rechteckplatten unter Einzelkraftbelastung, **16** (1947), S. 51. 第 5 章以下が二辺あるいは四辺固定の固定辺を有する矩形板に集中荷重が作用する場合の曲げモーメント，タワミの研究であるが，普通精度の階差法によつており，高精度階差法を用いていない。

b) Transaction of ASCE

16) N.M. Newmark: Numerical Procedure for Computing Deflections, Moments and Buckling Loads, **108** (1946), p. 1161.

17) F. L. Ehasz: Structural Skew Plates, **111** (1946), p. 1011.

18) M.G. Salvadori: Numerical Computation of Buckling Loads by Finite Differences, **116** (1951), p. 1. 1951 年の ASCE 賞となつた論文で，高精度階差法，得られた多くの近似値より正しい値を推定する方法などにも言及しており，参考となる点が多い。

c) Proceedings of ACI

19) A. Parmer: Solution of Difficult Structural Problems by Finite Differences, **47** (1951), p. 237. 矢板壁，ダ円形ドーム，斜平板の計算があげられ，連立多元一次方程式の解法として Crout 法が紹介されている。

d) Journal of Applied Mechanics

20) D.L. Holl: Analysis of Plate Examples by Difference Methods and the Superposition Principle, **3** (1936), p. 81.

21) D.L. Holl: Cantilever Plate with Concentrated Edge Load, **4** (1937), p. 8. 縁に集中荷重の作用する片持板を解いたもので, 解析的に解くのは非常に困難である(能町: 土木学会論文集, **60** (昭 34.1), p.20) が, 階差法によれば, 近似的ではあるが, 容易にとける。

22) N.M. Newmark: Note on Calculation of Influence Surfaces in Plates by Use of Difference Equation, **3** (1941), p. 92.

e) **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)**

23) D. Panow: Über die angenäherte numerische Lösung des Problems der Wärmeleitung, **12** (1932), S. 185 熱伝導の問題の数値解析法。

24) L. Collatz: Die Berechnung von Eigenschwingungen einer gleichseitig dreieckigen Membran mit Hilfe Sechsecknetzen, **14** (1934), S. 315. 正三角形膜の正六角形の network による固有振動数の計算。

25) R. Kaiser: Rechnerische und Experimentelle Ermittlung der Durchbiegung und Spannungen von quadratischen Platten bei freier Auflagerung an den Rändern, gleichmäßig verteilter Last und grossen Ausbiegungen, **16** (1936), S. 73. 大きいタワミを生ずる場合の平板の問題は,

$$\Delta^2 \Delta^2 w = \frac{h}{D} \left(\frac{p}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\Delta^2 \Delta^2 F = E \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\}$$

を連立的に解くことに帰する。しかし, この連立偏微分方程式は解析的に解けないので, Ritz の方法が階差法によるのが便利である。Kaizer は, 周辺単純支持の正方形板が等分布荷重をうけて大きなタワミを生ずる場合を, 階差法で解いて, 実験値との比較を行つている。

26) L. Collatz: Über die Differenzenverfahren bei Anfangswertproblemen partieller Differentialgleichungen, **16** (1936), S. 239. 偏微分方程式の初期値問題における階差法についての研究。

27) L. Collatz: Genährte Berechnung von Eigenwerten, **19** (1939), S. 224, 297. 固有値問題の計算法を展望したもので, 第4章が階差法に関する記述で, 高精度階差法が述べられている。第7章の数値計算例は非常に参考になる。

28) L. Collatz: Differenzenverfahren zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen n -ter Ordnung, **29** (1949), S. 199. n 階の常微分方程式の数値積分用の階差法を述べたものである。

29) L. Collatz: Einige neuere Forschungen

über numerische Behandlung von Differentialgleichungen, **31** (1951), S. 230. 第1章第1節が階差法に関する記述である。

30) W. Swida: Zum Problem der schiefen Platte, **31** (1951), S. 274. 斜平板に関する研究を述べている。

31) L. Collatz: Einschliessungssatz bei Iteration und Relaxation, **32** (1952), S. 76.

32) J. Albrecht: Taylor-Entwicklungen und Finite Ausdrücke für νu , $\nu \nu u$, **33** (1953), S. 41.

33) J. Schröder: Zum Lösung von Potentialaufgaben mit Hilfe des Differenzenverfahren, **33** (1953), S. 260, **34** (1954), S. 241. ポテンシャル問題の階差法による解法についての研究(要旨, 本文)。

34) E. Schwarz: Numerische Lösung des Randwertproblems der Potentialgleichung mit Hilfe von Lochkarten, **34** (1954), S. 237.

35) J. Schröder: Über das Differenzenverfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben, **35** (1955), S. 336. (要旨のみ)。

36) R. Zurmühl: Behandlung der Plattengaufgabe nach dem verbesserten Differenzenverfahren, **37** (1957), S. 1. タワミの二次導関数の精度を高めるために, L. Collatz の高精度階差法を等方性板の曲げの問題に応用したものである。直交する直線で作られる境界に限つてはいるが, 正方形の network を用いて, ただちに応用しうるよう, 自由辺, 単純支持辺, 固定辺の各境界条件に応ずる辺点, 凸および凹角の隅点に関する式, タワミの導関数を求めるための式に至るまで, きわめて詳細に各種の場合の式を分類してあげてあり, この種の問題について, ほとんど完備したものととなっている。集中荷重の取り扱い方にもふれており, また, より一般的な問題の取扱いについての一節を付している。固有値問題にはふれていない。精度を示すために, 解析的な解の得られている問題の数値例が述べられているが, 正方形板の一辺を4等分した network で, タワミのみならず, 曲げモーメントについても, きわめてよい結果が得られており, 注目すべき論文である。

f) **その他**

37) F. Stüssi: Berechnung der Beulspannungen gedruckten Rechteckplatten, Publication of IABSE, **8** (1947), p. 237. 圧縮応力を受ける矩形板の座屈応力の計算。

38) H. Favre: Le calcul des plaques obliques par laméthode des équations aux differences, Publication of IABSE, **7** (1943/44). 階差法による平行四辺形の平板の計算。

39) R. Berenter: Theoretische Untersuchungen über die Eigenfrequenz parallelogrammformige Pla-

ten, Publication du Laboratoire de Photo-Élasticité de l'École Polytechnique Fédérale, Zürich, 1946.

平行四辺形板の固有振動数の計算。

40) G. Herrmann : Untersuchungen über die Durchbiegung parallelogrammformiger Platten unter zentrischer Einzellast, ibd., Zurich, 1950. 中心集中荷重による平行四辺形板のタワミの研究。

41) V.P. Jensen : Analysis of Skew Slab, Univ. of Illinois Bull. No. 332 (1941). 斜め平行四辺形板の研究. 内容は土木学会誌, 43. 7 (昭 33) に紹介。

42) T.Y. Chen, C.P. Siess und N.M. Newmark : Studies of Slab and Beam Highway Bridges, Part 6, Moments in Simply Supported Skew I-Beam Bridges, Univ. of Illinois Bull., No. 439 (1957). 斜桁橋の曲げモーメント, タワミの研究. 内容は土木学会誌, 43.7 (昭 33) に紹介。

43) Nielsen : Skävinklede plader, Ingeniørvidenskabelige skrifter, Nr. 3, Kopenhagen 1944 (デンマーク). 相対する二辺が単純支持, 他の二辺が自由な等方性平行四辺形板の skew network による計算。

44) T. Jávör : Riešenie Všeobecne Šikmých Ortotropnych Dosiek Aplikaciou Metody Sieti (Schiefe Orthotropen Platten), Stavebnický Časopis Sov VI. 6-- Bratislava 1958, p. 348 (チエッコソロバキア). 相対する二辺が単純支持, 他の二辺が自由な直交異方性平行四辺形板の, triangular network による計算。

る計算。

45) W. Moheit : Zur Feuerwiderstandsfähigkeit rechteckiger Stützen, Stahlbau, 13 (1940), S. 1. 熱伝導の問題の研究。

46) W. Moheit : Schubbeulung rechteckiger Platten mit eingespannten Rändern, Stahlbau, 13 (1940), S. 39. 周辺固定矩形板の挫屈剪断応力の研究。

47) F.S. Shaw and N. Perrone : A Numerical Solution for the Nonlinear Deflection of Membranes, Journal of Applied Mechanics, 21 (1954), p. 117. 25) と同一の問題を取り扱ったものである。

48) M. Herzog : Über die Berechnung beliebig geformter Gewölbstaumauern nach der Schalentheorie, Bautechnik, 33 (1956), S. 268. 任意形状のアーチダムの殻理論による解析を述べ, 連立偏微分方程式の解に階差法を利用することを述べている。5) とにしている。

49) W. Mudrak : Zur Randbedingung bei Scheiblösungen mit Differenzen, Bauingenieur, 31 (1956), S. 20. シェイベ (平盤) の解析における境界条件の階差法による表示を述べている。

50) E. Strels : Die einseitig eingespannte Kragplatte unter Einzellaste Kinzellasten, Stahlbau, 36(1959), S. 62. 辺長比 2 : 8 (長辺固定) の片持板の自由縁の 8 等分点に集中荷重が作用する場合を, 普通精度の階差法によつて, 解いたものである。

(昭. 33. 7. 21)

設計技術に志す人に最適な内容!!

古川 一郎 著 【最新刊】

橋 梁 工 学

[A 5 判・384 頁・函入・¥ 600・〒 50 円]

総論, 荷重, 単純桁の応力, リバット接合, 溶接合, プレートガーダー橋, 合成桁, 単純トラス橋の構造など。新示方書に完全に準拠して, 特に実際応用の面を詳述した。各章末に演習問題を設け, なお設計実例を示して詳しく解説している。

日大教授 工博 小野竹之助著 [図書館協会選定]

コンクリート工学 材料篇

コンクリートの標準示方書の改訂に準拠し, 旧版を増補改訂し, 内容を一新した。好評 3 版発売中

[A 5・P. 494・定価 680 円・〒 50 円]

日大教授 工博 小野竹之助著 [図書館協会選定]

コンクリート工学 施工篇

新示方書に基づいて, 最も新しい合理的なコンクリートの施工方法を逐一詳述した好著。新刊

[A 5・P. 400・定価 600 円・〒 50 円]

好評各重版出来

杉本礼三著 (各 8 版)

応用力学演習上・下

A 5・各 P 280・価各 700 円

理博 小貫義男著 (5 版)

土 木 地 質

A 5・P 384・価 550 円

工博 河上房義著 (6 版)

土 質 力 学

A 5・P 296・価 480 円

工博 河上房義著 (3 版)

土 質 工 学 計 算 法

A 5・P 232・価 350 円

工博 横井増治著 (3 版)

土 木 施 工 法

A 5・P 280・価 480 円

工博 本間仁他著 (5 版)

水 理 学 入 門

A 5・P 168・価 220 円

工博 岩崎富久・田中寅男著 (再版)

衛 生 工 学

A 5・P 424・価 800 円

森北出版株式会社

東京都千代田区神田小川町 3 の 10
振替 東京 34757 電 (29) 2616・4510・3068