

構 造 力 学 (II)

平 板

倉 田 宗 章*

序 言 いわゆる板とは棒とともに構造物の組成に最も広く用いられているもので、その縦横の寸法にくらべ厚さの小さい物体をいうことは常識どおりであるが、外力の働かし方によつて力学的取り扱いが多少異なつてくるため、さらに区別される。すなわち板の面内に外力が働いて側方へはらみ出し(タワミ)の生じていない場合は盤(Scheibe)といい、また板が初めから彎曲しているいわゆる曲面板の場合は殻(Schale)と呼ぶのが普通である。ところで平らな板の表面上に垂直成分をもつ荷重が働いてタワミを生ずるとき場合を、とくに平板(Platte, plate)と呼ぶことが多い。本文ではかかる平板について概観的な解説を試み参考供しよう。平板の平衡および振動に関する理論ならびに実験はかなり古く、棒の場合と同様弾性学の基礎理論の完成する以前から研究されており、その発展の歴史は有名な著書 Love: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity の巻頭で、あるいはもつと詳細には Todhunter and Pearson: History of the Theory of Elasticity and Strength of Materials によつて知ることができる。

1. 平板の種類と意義

(1) 材 料

板を構成する材料はきわめて多いが、構造物として最も多く用いられるものは鋼、鉄筋コンクリート、木材等であろう。これらの材料の相違は、力学的取り扱いにおいては弾性諸常数の相違となつて現われる。このことは多くの金属材料のごとく、均質等方性の場合には取り扱い上の差異はほとんどないが、鉄筋コンクリート、木材等のごとく、方向によつて弾性常数の異なるいわゆる異方性の場合には、その一般的取り扱いにはなほだ困難であつて、わずかに直交二方向に異方性なる場合が等方性の場合と類似の数式によつて扱うことができるもので、これを A. Föppl 氏は Orthotrope Platte と名づけた。

(2) 薄板と厚板

板面積にくらべその厚さが薄く彎曲に際し板断面につき、ハリの場合と同様な Bernoulli-Euler 則を適用しう

るとみなされる場合を薄板(Thin plate)と称し、板厚が比較的大で上のごとき仮定の適用が無理な場合を厚板(Moderately thick plate)と呼んで区別している。一般に厚板は応力の変化が三次元的で厳密な取り扱いがむづかしく、応力分布が平面応力状態になるごとき彎曲の場合等、二、三の特例が論ぜられている程度である。しかし板のタワミが微小で、板厚の半分以下ならば、前記薄板の近似理論は十分正確であることが厚板理論との比較および種々の実験で確かめられている。従つて平板理論とはほとんど薄板の理論であるといつてよい。

(3) 環境条件

板面の輪かくおよびそれに沿つた支持状態等により、いろいろのものがあろうが、実用上から形状としては矩形板、円板が最も多く用いられ、また研究もされている。その他三角形、平行四辺形、台形、正多角形、半円形、欠円形、ダ円形等の板、特殊なものとしては孔あき板等も二、三研究されている。また非常に長い矩形板、あるいは特に局所的性質を調べる場合は遠い周辺からの影響は微小であるから、取り扱いを簡単にするため、一方の長さが無限大となつた極限を考えるのが便利なことがある。かかる板を Plattenstreifen といい、特に半直線的に延びたものを Halbstreifen という。また周辺の支持状態としてはハリの端末条件と同様、単純支持辺、固定辺、自由辺の三つの場合が典型的であつて、これらの中間的な支持状態として、単純支持と固定の中間の弾性固定、弾性バリによる支持等の場合がある。周辺のみならず中間において支持線があるような板は、連続バリと同様連続板と称せられる。またこの中間支持が多くの柱頭であるような場合は建築構造においてしばしば見られるもので無バリ板(Pilzdecken, flat slab)と呼ばれている。なお舗装版のごとく地盤反力によつて支持されるものは弾性基礎上の板と称する。要するに構造要素としての平板の研究とは、種々の荷重のもとに、さまざまな周辺支持条件を持つ等方性、あるいは異方性の薄板の彎曲の研究にはかならない。これは理論的には薄板の彎曲を表現する微分方程式と、与えられた種々の周辺条件を満足する解を求めることを意味する。

2. 薄板の応力

板厚を h とすれば、 h を二等分する位置で上下両面に平行な面を考え、これを中立面と称する。これはハリの中立面と全く同意義のものである。通常この中立面上に x, y 座標軸をとり、垂直に下方に向つて z 軸をとる。さて既述のごとく薄板の理論はハリの理論と全く同様な仮定に立つているもので、種々の点で平行に論ぜられる。すなわち変形に対し次の仮定を基本とする。

a) 彎曲前の中立面上の任意点の法線は彎曲後も中立面のその点の法線となる。

* 正員 工博 大阪市立大学教授、理工学部土木工学科

b) z 方向の垂直応力度 σ_z は他の応力にくらべ微小であつて無視する。

c) 中立面は彎曲によつて伸縮しない。

ここに a) の仮定は断面と中立面が常に直交関係を保つことを表わし、従つてせん断ヒズミ度 r_{xz} , r_{yz} が生じないから、中立面に沿つてせん断応力度が 0 である場合にかぎり正しい仮定である。しかし一般の場合でもせん断応力度による変形は微小で、その影響の無視できることはハリの場合と同様である。ところがせん断応力を断面全体について積分した断面力としてのせん断力は、荷重および断面力としての曲げモーメントに比し無視することができないもので、このことはハリの場合と同じく材料力学的な近似の結果であつて、せん断ヒズミ度とせん断応力度とを二元的に取り扱わなければならない点に注意を要する。また b) の仮定は、本来 σ_z は板の載荷面で荷重強度 q に等しく、板背面で 0 となるべき性質のものであるはずであるが、これも影響が小であるとして無視することはハリの場合と同様である。さらに c) の仮定は微小タワミにおいては、中立面上の点の変位は z 軸方向の変位 w のみとみなすことを示す。さて a) と c) の仮定より板厚断面上的の垂直ヒズミ度、従つてまた垂直応力度は、ハリの曲げの場合と同様な直線分布となるから、断面力としての曲げモーメントを知られば、縁維応力はただちに求められる。いま u, v をもつてそれぞれ x, y 方向の変位を表わす記号とすれば、彎曲前の中立面法線は彎曲後 x, y 方向にそれぞれ

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}$$

なる角度だけ傾くから、その法線上にあつて中立面より z だけ離れた点は x, y 方向にそれぞれ

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad \dots\dots\dots(1)$$

なる変位をなす。上式右辺の負号は前述のごとく定めた座標系においては $\partial w/\partial x$ と $u, \partial w/\partial y$ と v は互いに符号相反するからつけたものである。さて x, y 方向の垂直ヒズミ度を ϵ_x, ϵ_y , せん断ヒズミ度を r_{xy} とすれば、変位とヒズミ度との一般関係式に (1) を代入すると

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$r_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots(2)$$

さらにヒズミ度と応力度との一般関係式において前記 a), b) の仮定にもとづき $\sigma_z = 0, r_{xz} = r_{yz} = 0$ とおくと、残りの垂直応力度 σ_x, σ_y , せん断応力度 τ_{xy} は次のように書かれる。

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x),$$

$$r_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

ただし E : ヤング係数, G : 剛性率, ν : ポアソン比。これより応力度をヒズミ度で表わし (2) 式を代入すると

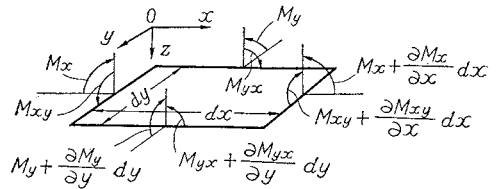
$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= G r_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

さて x, y 軸に垂直な板断面の断面力を断面の単位幅について考えると、曲げモーメントは

$$M_x = \int \sigma_x z dz, \quad M_y = \int \sigma_y z dz$$

で計算される。ただし積分は $-h/2$ より $h/2$ まで板厚 h にわたつて行われるものとする。また各モーメントは図-1 に示すごとき向きを正と約束する。上式に (3) 式

図-1



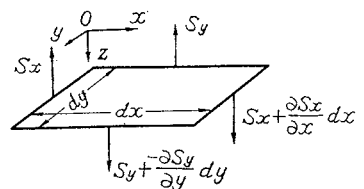
を代入すると、断面力としての曲げモーメントおよびねじりモーメントの表示式として次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= M_{yx} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

ただし $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$; この値は板の曲げ剛度を表わし、ハリの場合における EI に相当する量である。

次に板面に垂直なせん断力 S を上同様にタワミ度 w の項で表わすには、既述のごとく仮定 1) によりヒズミ度より求めることはできないから、ハリの場合にその微小切断部分の平衡より導いた、せん断力と曲げモーメントとの周知の関係式 $S = dM/dx$ と類似の式を類似の方法で導くのである。すなわち板面内に x, y 軸に平行な二辺を持つ微小矩形領域を考え、その周囲に働らく断面力の平衡を考え

図-2



るのである。ただしせん断力は図-2 に示す向きを正と約束する。そうすると

$$S_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, \quad S_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

をうるから、これに (4) 式を代入すると次のごとき表示

式をうる。

$$S_x = -D \frac{\partial \Delta w}{\partial x}, \quad S_y = -D \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \dots\dots\dots (5)$$

ただし $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ 。次に仮定 b) によれば、中立面に平行な層ではすべて平面応力の状態にあると考えてよいから、その面内で x 軸と α なる角度をなす方向を法線とする断面 n 上の法線応力を σ_n 、切線応力を τ_{nt} とし、これに直交する断面 t 上の法線応力 σ_t 、切線応力を $\tau_{tn} (= \tau_{nt})$ とすれば、これらはよく知られた平面応力度間の関係式によつて $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ で表わされる。ゆえにその各式に中立面からの距離 z を乗じて板厚 h にわたつて積分すれば

$$\left. \begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha \\ M_t &= M_x \sin^2 \alpha + M_y \cos^2 \alpha - M_{xy} \sin 2\alpha \\ M_{nt} &= \frac{1}{2} (M_y - M_x) \sin 2\alpha + M_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

なるモーメント間の関係式をうる。ここに M_n, M_t, M_{nt} は断面 n および t 上の曲げモーメント並びに、ねじりモーメントである。これよりただちに

$$M_n + M_t = M_x + M_y = -D(1+\nu)\Delta w \dots\dots\dots (7)$$

なる関係をうる。すなわち平板上任意の位置において直交二方向の曲げモーメントの和は、座標軸の回転に対し不変量であることがわかる。次にセン断力に関して同様な関係式を導ける。すなわち前記に断面上のセン断力を S_n とすれば x, y 軸に平行な二断面と n -断面とよりなる微小直角三角形領域の z 方向の平衡を考へて、

$$S_n = S_x \cos \alpha + S_y \sin \alpha \dots\dots\dots (8)$$

をうる。上記のごとく断面力を取り扱うことによつて、平板の問題が簡明化されることもハリの場合と同様である。ところで曲げモーメントより応力度を求めるには(3), (4) 式より

$$\sigma_x = \frac{12z}{h^3} M_x, \quad \sigma_y = \frac{12z}{h^3} M_y, \quad \tau_{xy} = \frac{12z}{h^3} M_{xy} \dots (9)$$

と書けるから容易であるが、セン断応力度については既述のごとくヒズミ度とは無関係に、応力の釣り合いより間接に導かなければならない。物体力のない場合、応力の一般平衡条件式より

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right)$$

と書けるから、(19) 式を代入して z につき板厚にわたつて積分し、板の上下両表面で垂直セン断応力が 0 となる条件より積分定数を決めると

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right),$$

$$\tau_{zy} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)$$

を得て、セン断応力度は板厚に沿つて放物線分布である

ことがわかり、これもハリの場合と同様である。

3. 基本微分方程式と周辺条件

板面に垂直荷重を受けて彎曲した薄板中において成立する応力の釣り合い式は、応力度がすでに(3)式のごとく変位で表わされているので、弾性学でいうところの変位の項で表わした平衡条件式に帰着しうる。さてその式の誘導は板面を x 軸および y 軸に垂直な各一對の相隣る平行断面でかざられる微小矩形板要素を考へて、その周辺に働らく外力ならびに、断面力の釣り合いから導かれる。これはハリの微分方程式の場合同様で、たいていの教科書で容易に参照することができる。また 1850年 G. Kirchhoff 氏は初めて仮想仕事の原理よりも誘導できることを示した。以下簡単にこれを説明しよう。

単位体積中に蓄えられるヒズミ エネルギー V の一般表示式において $\sigma_z = 0$ および $\tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$ とおけば

$$V = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})$$

となるから、これに(2), (3) 式を代入し板全体について積分するとヒズミ エネルギーの総量 U は次のごとく表わされる。

$$U = \int V dx dy dz = D \int \left[\frac{1}{2} (\Delta w)^2 - (1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \dots\dots\dots (10)$$

右辺の積分は板厚について積分ずみのもので中立面の全領域についての積分を意味する。仮想仕事の原理によれば平衡の位置から任意の仮想変位 δw によつて生ずるヒズミ エネルギーの変化 δU はその間に外力がなす仕事 δW に等しい。ところで δU を(10)式より導くのであるが、途中の変分計算(微分が関数値の変化を意味するのに対し変分とは関数形の変化を意味する、いまの場合演算形式に大差はない)は冗長であるので省略して結果のみ書くと

$$\delta U = D \int_F \delta w \Delta \Delta w dF + D \int_C \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) \left[\Delta w - (1-\nu) A \right] dS - D \int_C \delta w \left[\frac{\partial \Delta w}{\partial n} - (1-\nu) \frac{dB}{dS} \right] dS \dots\dots\dots (11)$$

ここに

$$A = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 \theta$$

$$B = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

$$\Delta \Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$= \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

上式中右辺第一項の積分は中立面の全領域 F にわたつての面積分、第二項、第三項の積分は F の周辺 C に沿

つての線積分である。また n は C に立てた外方に向う法線方向を示し、 θ はこの法線と x 軸とのなす角である。次に板表面に z 方向の分布荷重 q が載っているものとすれば、変位 δw によつてなす仕事は

$$\int_F q \delta w dF$$

また周辺においてその線素 ds を軸としてモーメント M_n が作用すれば、仮想変位中の角変位は $\delta(\partial w/\partial n)$ と書けるから仕事は

$$-\int_C M_n \delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right) ds$$

ただし負号は板面における正の δw による周辺の角変位 $\delta(\partial w/\partial n)$ は負号をとるからつけたものである。さらに周辺に沿つて z 方向の分布外力 R_n が作用し周辺の変位も許す場合は、その仮想仕事は

$$\int_C R_n \delta w ds$$

ゆゑに外力全体のなす仮想仕事 δW は

$$\delta W = \int_F q \delta w dF - \int_C M_n \delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right) ds + \int_C R_n \delta w ds \dots\dots\dots (12)$$

ところで仮想仕事の原理により

$$\delta U - \delta W = 0$$

これに (11), (12) 式を代入すると

$$\int_F \delta w (D \Delta \Delta w - q) dF + \int_C \delta\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right) \left[D \{ \Delta w - (1-\nu)A \} + M_n \right] ds + \int_C \delta w \left[D \left\{ (1-\nu) \frac{dB}{ds} - \frac{\partial \Delta w}{\partial n} \right\} - R_n \right] ds = 0$$

$\delta w, \delta(\partial w/\partial n)$ は任意の微小量であるから上式が成立つためには左辺の各種積分が消失しなければならない。第一の積分が消失するためには板面内で常に

$$D \Delta \Delta w - q = 0 \quad \text{あるいは} \quad D \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right\} = q \quad \dots\dots\dots (13)$$

が成立たなくてはならない。これは平板の微分方程式として周知の式である。とくに $q=0$ なる場合は平面問題において応力関数が満足すべき微分方程式と同形であつて、その解は平面重調和関数と呼ばれる。次に第二、第

三の周辺積分が消失する条件を調べよう。まず板の周辺が固定されている場合は周辺に沿つて撓度 w , 傾斜 $\partial w/\partial n$ は、常に 0 でなければならぬから、当然また $\delta w = \delta(\partial w/\partial n) = 0$, 従つてこれらの積分の消失は満足される。ところが周辺に沿つて $\delta w \neq 0, \delta(\partial w/\partial n) \neq 0$ なるものとすれば、これらの積分が消えるためには

$$M_n = -D \{ \Delta w - (1-\nu)A \}, \\ R_n = -D \left\{ \frac{\partial \Delta w}{\partial n} - (1-\nu) \frac{dB}{ds} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

が成立たねばならない。これは周辺に沿つて外力 M_n, R_n が作用するときの周辺条件である。また上式において $M_n=0, R_n=0$ とおけば、なんらの外力も作用しない場合すなわち自由辺の条件を表わす。次に $w=0, M_n = -D \{ \Delta w - (1-\nu)A \} = 0$ なるときも前記周辺積分は消失し、これは単純支持辺の条件を表わしている。また $\partial w/\partial n=0, R_n = -D \{ \partial \Delta w/\partial n - (1-\nu)dB/ds \} = 0$ においても周辺積分は消失する。これは V. Lewe 氏が等分布荷重を受ける無バリ板の解に用いたものである。さて (14) 式において $\theta=0$ とおけば法線方向は x 軸と一致するから y 軸に平行な周辺上での式となる。すなわち

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ R_x = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

また x 軸に平行な周辺上での式は $\theta=\pi/2$ において同様に求められ (15) 式において x, y を入れかえたものを用いる。これらは矩形板周辺の固定モーメント、反力等の計算に用いられる式である。ところが R_x を反力とすれば、これは (5) の第一式のせん断力 S_x の表示式と等しくない。これはハリの場合と異なる。このことはハリの場合にはなかつた M_{xy} の影響のためで

$$R_x = S_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

の関係にあることが Lord Kelvin および P.G. Tait 氏によつて解明された。通常これを換算せん断力 (Ersatzscherkraft) と呼ぶ。次に $x=0, a; y=0, b$ をそれぞれ周辺とする矩形板が、分布荷重 q を受ける場合を考えてみる。

(13) 式の両辺のこの板全面についての積分を多少変形すると、次式のようなになる。

$$\int_F q dF = D \int_0^a \int_0^b \Delta \Delta w dx dy = D \int_0^a \int_0^b \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\} dx dy + \int_0^a \int_0^b \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right\} dx dy - 2(1-\nu) \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy = \int_0^b [R_x]_{x=0} dy - \int_0^b [R_x]_{x=a} dy + \int_0^a [R_y]_{y=0} dx - \int_0^a [R_y]_{y=b} dx - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]_{x=0, y=0}^{x=a, y=b} + 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]_{x=0, y=b}^{x=a, y=0} + 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]_{x=a, y=0}^{x=0, y=b} - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]_{x=a, y=b}^{x=0, y=0}$$

前式左辺は板面上の全荷重であり右辺はそれにつり合うべき周辺上の反力である。ただし符号はせん断力の符号規約に従っている。さて初めの四項は四辺に沿って分布する反力の総和であるから、板が全体として平衡するためには、なお四隅で

$$2(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

なる集中力が存在しなければならないことがわかる。これは単純支持板の場合四隅における浮上りを防せぐ働らきをなす下向きの力である。一般に単純支持で周辺の方向が不連続に変る隅角部では、かかる集中力の存在することが説明されるのである。従つて隅の自由な板ではそこで $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$ がみだされていなければならない。また隅付近が固定ならば $\partial w / \partial x = \partial w / \partial y = 0$ であるから集中力は存在しない。

4. 板の微分方程式の種々の形

前節において等方性薄板の曲げに関する基本微分方程式の最も普通の形について解説したが、これを基本として種々の変形または補正をして特殊な問題に適應する式が導かれている。以下それらの数種を列挙して簡単に説明しよう。一般の異方性薄板に対して M. T. Huber 氏は下のごとき微分方程式を導いている¹⁾。

$$B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 K_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4 K_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q$$

上式各項の係数は弾性常数により決まる常数係数であるが、この式の実際問題への応用は困難であることを著者も述べている。なお同氏並びに H. Marcus 氏は x, y の直交二方向に異方性のいわゆる Orthotrope Platte に対して次の式を導いた²⁾。

$$B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \dots \dots \dots (16)$$

ただし係数は両氏によつて多少内容に差異がある。とくに $B_1 = H = B_2$ ならば等方性の場合であつて (13) 式に帰着する。板厚が一樣でないいわゆる変厚板では板の曲げ剛度 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ が x, y の関数となる。かかる板は R. Gran Olsson 氏によつて論ぜられ、基本式は次のごとく導かれている³⁾。

$$D \Delta \Delta w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta D \Delta w - (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q \dots \dots \dots (17)$$

もし y 方向にのみ板厚 h が変化するならば上式は

$$D \Delta \Delta w + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q$$

となる。特に $D = D_0 + D_1 y$ のように表わされるときは

$$\Delta[(D_0 + D_1 y) \Delta w] = q$$

板周辺の形状が曲線である場合は直交曲線座標が有効に用いられる。例えば円板に対しては (13) 式を極座標 r, θ で表わすと

$$D \Delta \Delta w = D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w = q \dots \dots (18)$$

もし荷重が中心対称分布ならば θ に無関係となり上式は次のように書ける。

$$D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\} \right] = q$$

また複素解析関数 $\zeta = \xi + i\eta = \log[(z-c)/(z+c)]$ によれば ζ -面における $\xi = \text{const.}, \eta = \text{const.}$ なる直交直線群は z -面における Apollonius の円群とそれに直交する円群に写像され、 x 軸上で $x = \pm c$ の位置に極をもつ、いわゆる双極座標を構成する。そして $\xi = \text{const.}$ は一つの円周を表わすから、円板の周辺の表示とすることができる。この場合便宜上 $\xi = \lambda, \eta = \pi - \varphi$ とおけば (13) 式は次の形に表わされる⁴⁾。

$$\frac{D}{c^4} \left[(\cosh \lambda + \cos \varphi)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right] w = q \dots \dots (19)$$

また複素変数による一般的解法は A. E. H. Love, N. I. Muskhelishvili 氏等によつて研究された。 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ なる共軛複素変数を用いると (13) 式は

$$16 D \frac{\partial^4 w}{\partial z \partial \bar{z}} = q \dots \dots \dots (20)$$

のように表わされる。斜交座標系は平行四辺板等の解法に利用された。いま x, y を斜交座標、これと原点を共有する直角座標を \bar{x}, \bar{y} とし、 x, \bar{x} 両軸は重さなり y, \bar{y} 両軸のはさむ角を φ とすれば

$$x = \bar{x} - \bar{y} \tan \varphi, \quad y = \bar{y} / \cos \varphi$$

の関係があるから (13) 式は次のごとく表わされる。

$$\frac{D}{\cos^4 \varphi} \left[\Delta \Delta w - 4 \sin \varphi \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} - \sin \varphi \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right] = q \dots \dots \dots (21)$$

次に荷重 q のほかに中立面内の外力により x 方向では N_x, y 方向へは N_y なる直応力度が働らき x, y 軸に平行してせん断応力度 N_{xy} が作用している場合を考えると、板面が彎曲して撓度を生ずると、それにともなつてこれらの応力は、タワミの方向にせん断応力としての成分を持つから、これを (13) 式の右辺荷重項に加えて次の式が得られる⁵⁾。

$$D \Delta \Delta w = q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dots (22)$$

なお板が直交異方性の場合には上式左辺の代りに (16) 式左辺をもつてあてればよい。周辺に均等に分布外力 N_r を受ける円板の場合には上式を極座標に変換すると、

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w = q + N_r \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w \dots \dots (23)$$

となる。これらの式は中立面内荷重による座屈荷重の算定に利用される。中立面内荷重を受けている板が初めから板厚にくらべ、微小な、しかし無視できない程度の元タワミ w_0 があるような場合は、それに対する面内荷重の影響がきいてくるから (22) 式に代り次式を解かなくてはならない⁶⁾。

$$D \Delta \Delta w = q + N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + 2 N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \dots \dots \dots (24)$$

すなわち元タワミは中立面内荷重の増加に相当することがわかる。平板が自由振動している場合は、板の密度を ρ とすれば、板の単位面積当りの慣性抵抗は $-\rho h (\partial^2 w / \partial t^2)$ と書かれるから (13) 式右辺の荷重項の代りに用いて

$$D \Delta \Delta w = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots \dots \dots (25)$$

と書ける。さらに強制振動である場合は、上式右辺に強制力の項を付加すればよい。弾性基礎にある板では地盤の基礎係数を k とすれば、 $-kw$ が地盤反力として働らくから、これを荷重項に加えて次のごとく書ける。

$$D \Delta \Delta w = q - kw \dots \dots \dots (26)$$

次に平板の熱応力による彎曲を考えよう。まず温度分布が x, y のみの関数で板厚方向には一定であるときは、熱膨脹にもとづく温度応力は平面応力状態となるから、単位幅当りの断面力を T_x, T_y, T_{xy} とする。つぎに温度分布が厚さの方向に一次変化をし、中立面で 0 であるような、すなわち $\frac{2z}{h} t(x, y)$ なる分布をなす場合を考えたと線膨脹係数を α とすればヒズミは $\alpha \frac{2z}{h} t(x, y)$ と書ける。これは板の曲げヒズミと同形式のものであつてこのために板は彎曲を生ずるのである。このとき前記 T_x, T_y, T_{xy} が同時に働らいているものとすれば、これらは彎曲に対し (22) 式における N_x, N_y, N_{xy} と同じ役割をなす。これらのことを考慮して熱応力による平板の彎曲を表わす基本式は

$$D \Delta \Delta w = -\frac{2}{h} D \Delta t(x, y) + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dots \dots \dots (27)$$

のごとく与えられている⁷⁾。ところで (16), (22), (24), (25), (26), (27) の各式はすべて線形であるから、これらの式の右辺を全部加えたものを右辺とし、(16)式左辺を左辺とする式を作れば、各場合を全部考慮した基本式であるといえる。

さて前出 (22), (23), (24) の各式における中立面内荷重 N_x, N_y, N_{xy} は微小タワミの間一定とみなして取り

扱っている。これは微小タワミの理論では、板の彎曲によつて中立面内になんらのヒズミも、従つてまた応力も生じないものと仮定しているために、彎曲前の面内荷重は、微小タワミ中その値を変じないことになるからである。ところがタワミが大きくなり、板厚に匹敵する程度になると、中立面のヒズミを無視できなくなる。したがつてこのヒズミにもとづいた中立面内応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ が発生することになる。これを膜応力 (Gewölbspannung, Membrane stress) という。これはもはやタワミに関係した応力であるが、平面応力問題として Airy の応力関数 F を導入すると、中立面内応力の平衡条件式はみたされ、また断面力を N_x, N_y, N_{xy} とすれば

$$N_x = h \sigma_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = h \sigma_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},$$

$$N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

と書けるから (22) 式に代入すると、板面に垂直な方向の平衡条件式として次式をうる。

$$D \Delta \Delta w = q + h \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \dots \dots \dots (28.1)$$

この式は未知関数として w, F の二つを含んでいるから、この式のみから解を求めることができない。すなわちもう一つの式を必要とする。ところが先に平面応力問題として F を導入したから F はヒズミ間の適合の条件式を満足しなければならない。しかるに板面内のヒズミ成分 $\epsilon_x, \epsilon_y, \tau_{xy}$ は普通の平面問題の場合と異なり、この場合は既述のごとく z 方向のタワミ w による曲げヒズミと中立面内の線素の伸びヒズミおよび線素間の角ヒズミより成つていて、幾何学的考察によつてヒズミ成分をタワミ w の関数として表示することができ、適合の条件式として次式をうる。

$$\Delta \Delta F = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \dots \dots \dots (28.2)$$

ただし E はヤング係数。すなわち中立面内の伸びをともなう程度にたわむ板の基本式は (28.1), (28.2) の 2 式より成る非線形連立微分方程式で、Th.v. Karman 氏により初めて導かれたものである⁸⁾。通常 large deflection の平板と呼ばれるものは上のごときものをいうのである。そして平板の理論解と実験値との差異は、薄板としての仮定によりもタワミが大となるにつれて面内応力が発生する影響による方が大であるといわれる。

5. 解法概説

平板の問題は結局前節に列挙したような基本微分方程式を、種々の周辺条件のもとに解くことであつて、たいていの場合、解は撓度関数 w の形で求められる。そうす

ると応力は (3) 式または (4), (5) 式で計算されるわけである。一般に平板問題の解法はハリにくらべて困難な数値計算をとまうことが多く、実用化の点でかなりのひらきがある。最も簡単な解法はよく知られたいわゆる Grashof-Rankine の Streifenmethode で板を直交二ハリで置きかえ、双方の荷重分担率を決めるやり方で、はなはだ粗雑であるが、簡便さのゆえに広く用いられてきたものである。H. Marcus 氏はこの方法を改良し、ねじりモーメントの影響による補正を加えた実用公式を提案した。1821 年 C.L.M.H. Navier 氏は初めて $x=0, a; y=0, b$ なる四辺で単純支持された矩形板の解を複式無限級数の形で与えた。その周辺条件は既述のごとく $w=0, M_n=0$ であるが、この場合また $w=0, \Delta w=0$ の形に書くこともできる。これを Navier の境界条件と呼ぶことがある。基本微分方程式の解を

$$w = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (m, n=1, 2, 3, \dots) \dots\dots (29)$$

のごとく仮定すると、この式は上記の周辺条件を初めから満足しているから、後の微分方程式 (13) を満足するごとく未定係数 C_{mn} が決定できればよい。実際に (29) 式を (13) 式に代入し右辺の荷重関数 q を $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ の複式 Fourier 級数で表示しておけば、 x, y に無関係な係数決定方程式が得られて C_{mn} が定まる。例えば等分布荷重 q_0 に対しては

$$C_{mn} = \frac{2q_0}{\pi^6 D} \frac{[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

(ξ, η) なる座標位置に集中荷重 P が載るときは

$$C_{mn} = \frac{4P}{\pi^4 abD} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

となる。これに対し 1899 年 M. Levy 氏は荷重項に対応する特解 ϕ と、荷重項を 0 とおいた同次方程式の解よりなる補足解とより

$$w = \sum_m Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} + \phi, \quad (m=1, 2, 3, \dots) \dots (30)$$

$$Y_m = A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}$$

なる単式無限級数の形に解を与えた。この式は ϕ を $\sin \frac{m\pi x}{a}$ についての Fourier 級数に展開すると $x=0, a$ において初めから単純支持の条件をみたしている。従つて式中の 4 組の未定係数は $y=0, b$ における周辺条件から定まるものである。また (13) 式が x, y に関して対称式であることより、 Y_m 中の y を x で a を b で置換してうる式を X_n とすれば、これもまた補足解として用い

うる。すなわち

$$w = \sum_m Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} + \sum_n X_n \sin \frac{n\pi y}{b} + \phi \dots\dots (31)$$

とおけばこれは 8 組の未定係数を含んでいて、周辺固定板等の解に用いるものである。また特解 ϕ としては比較的容易に求められる Plattenstreifen の解を利用することが多い。

一般に複式級数で表わされた解は単式級数にくらべて簡明であるが、実際の数値計算は後者の方がはるかに便利である。しかし E. Estanave 氏は等分布荷重を受ける単純支持板に対する Navier 氏の解と Levy 氏の解が一致することを示した。一般に三角級数の総和公式を利用すれば、複式級数は単式級数に書きかえうものである。H. Hencky 氏は座標原点を中心とし $x = \pm a/2, y = \pm b/2$ を周辺とする矩形板が等分布荷重 q を受ける場合の解を次のごとく与えた⁹⁾。

$$w = \frac{q}{8} \left[\left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{1,3,5,\dots} \left\{ \frac{A_n a^3 Y_n \cos \frac{n\pi x}{a}}{n^2 \cosh^2 \frac{n\pi x}{2a}} + \frac{B_n b^3 X_n \cos \frac{n\pi y}{b}}{n^2 \cosh^2 \frac{n\pi y}{2b}} \right\} \right]$$

ここに

$$X_n = a \sinh \frac{n\pi a}{2b} \cosh \frac{n\pi x}{b} - 2x \cosh \frac{n\pi a}{2b} \sinh \frac{n\pi x}{b}$$

$$Y_n = b \sinh \frac{n\pi b}{2a} \cosh \frac{n\pi y}{a} - 2y \cosh \frac{n\pi b}{2a} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

上式中の係数は周辺単純支持の場合は

$$A_n = B_n = \frac{8}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

周辺固定の場合は、例えば $a=b$: 正方形板に対し I.A. Wojtaszak 氏は次表のごとき係数値を与えた。

係数値表

n	1	3	5	7	9	11
$A_n = B_n$	1.4138	0.0943	-0.1096	0.0765	-0.0523	0.0365

なお周辺固定板の解は多くの学者によつて求められ、例えば A. Nadai 氏は任意関数列の直交化の方法によつて無限級数解の係数を定めた。また A.E.H. Love 氏はその重調和関数論において応用例として論じている。S. Timoshenko 氏は周辺に分布モーメントの作用する矩形板の解を、荷重を受ける単純支持板の解に重ね合わせ、周辺で撓曲面の勾配が消失するよう前記不静定分布モーメントを決定する方法を用いている。M.K. Huang および H.D. Conway 氏等は、同様な重ね合せの方法によつて相隣る二辺が固定残りの二隣辺が単純支持かまたは完全自由の場合を解いた¹⁰⁾。三辺固定一辺自由な板は難解として知られたものであるが、同様な方法によつて

山田和英氏が解いた。しかしこの問題もポアソン比を0とすれば周辺条件が簡単となり取り扱いが楽になる。かかる場合は、K. Goriupp 氏がくわしく研究している¹¹⁾。井口鹿象博士は Navier の解式をさらに一般化して次のとき解式を与えた¹²⁾。

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \left[\frac{C_{mn}}{3} \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{x}{a} \right) - \frac{C'_{mn}}{3} \left(\frac{x^3}{a^3} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x}{a} \right) + \frac{C''_{mn}}{3} \frac{x}{a} + C'''_{mn} \left(1 - \frac{x}{a} \right) + \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \right] \\ \times \left[\frac{d_{mn}}{3} \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{y}{b} \right) - \frac{d'_{mn}}{3} \left(\frac{y^3}{b^3} + \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y}{b} \right) + \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{b} y \right], \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

式中 C_{mn} , C'_{mn} , C''_{mn} , C'''_{mn} , d_{mn} , d'_{mn} なる係数は周辺条件の種々の組み合わせに対し前もって定められるもので、多くは簡単な整数値をとる。また A_{mn} は上式が(13)式を満足するごとく定むべき未定係数である。同博士はこの方法によつて9通りの周辺条件に対する解を与えた。最近 H.J. Fletcher および C.J. Thorne 氏等は矩形板の各辺につき単純支持、固定、自由のあらゆる組み合わせ 81 通りの場合につき無限級数解の係数決定方程式を導き、特定のものについては S. Timoshenko 氏等の解に一致することを確かめている¹³⁾。しかし数値的結果はまだ示していないようである。円形板については極座標、双極座標が用いられ種々の荷重、および周辺条件について A. Clebsch, A. Nadai, W. Flügge 氏等によつて研究された。J.H. Michell 氏は周辺: $x^2 + y^2 = a^2$ で固定された円板の (ξ, η) なる位置に集中荷重 P を受ける円板の解を次のように与えた¹⁴⁾。

$$w = \frac{Pa^2}{16\pi D} \left[(1 - z\bar{z})(1 - \zeta\bar{\zeta}) + (z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta}) \ln \frac{(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta})}{(1 - z\bar{\zeta})(1 - \bar{z}\zeta)} \right]$$

ただし $z = \frac{x}{a} + i\frac{y}{a}, \quad \zeta = \frac{\xi}{a} + i\frac{\eta}{a}$
 $\bar{z} = \frac{x}{a} - i\frac{y}{a}, \quad \bar{\zeta} = \frac{\xi}{a} - i\frac{\eta}{a}$

この問題は W. Flügge 氏が双極座標を用いて解いている。複素関数を用いる方法は、等角写像の利用ができて原理的には種々の形状を対称とすることができる。N.I. Muskhelishvili 氏は平面問題の一般的解法を示し、その基本微分方程式が(20)式の荷重項を0とおいたものと同形であるところより、同氏の手法が平板の問題に適用できることを述べている¹⁵⁾。一般に平板の問題は二、三の特定の場を除き、解がいわゆる closed form に表わされないため、しばしば近似解であるといわれるが、数値的結果は有効数字の意味で十分正解と考へうるものである。次に解法の簡易化ならびに近似解法の研究も数多く行われ、例えば成岡、横田氏等は撓角法の形式を導

入した¹⁶⁾。また前出仮想仕事の原理を

$$\delta(U - W) = 0$$

と書けば平衡状態は $U - W$ の極小値に対応することを示している。いま周辺条件をみたとす、互いに独立な任意の関数項 f_1, f_2, \dots, f_n をとり a_1, a_2, \dots, a_n を未定常数としてその線形結合をもつて

$$w = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n \dots \dots \dots (32)$$

と仮定して $U - W$ の表示式:

$$I = U - W = \int \left[\frac{(dw)^2}{2} - (1 - \nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} - \frac{qw}{D} \right] dx dy \dots \dots \dots (33)$$

に代入し I を極小ならしめるよう

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial a_2} = 0, \dots \dots \dots \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0$$

なる n コの条件より a_1, a_2, \dots, a_n を決定すれば (32) 式は近似解として定まる。これは有名な W. Ritz 氏の方法である。また同じく (33) 式の極小条件による B.G. Galerkin 氏の方法、最小自乗法の意味で基本微分方程式 (13) の自乗誤差の極小条件、すなわち

$$\int [D \Delta \Delta w - q] dx dy = \min.$$

ならしめる方法、また周辺条件を特定の数点でのみみたとすことで満足する選点法と呼ばれる方法等、種々の近似法がある。H. Marcus 氏は (13) 式が

$$\Delta M = -q, \quad \Delta w = -\frac{M}{D}$$

のごとく書けることを用い、各式を二次元の差分方程式の形に書直し二系の多元連立方程式とし、順次解いて近似解を求め、これを弾性網理論と称した¹⁷⁾。また L. Collatz 氏は (13) 式を直接差分方程式に書き直した。水野および吉村氏はこの方法で三辺固定一辺自由な板の解を、コンクリートのポアソン比: $\nu = 1/6$ の場合に対し求めた。また坂、横田氏等は $\nu = 0$ の場合を解いた¹⁸⁾。

また D.L. Holl 氏は片持板 (Cantilever plate) の近似解を求めた¹⁹⁾。

6. 種々の平板問題

前節においては代表的な場合として単一板それも主として矩形板の解法について略述したが、実際にはきわめて多くの境界値問題がある。以下おもな問題を列挙し関連した研究を二、三あげて参考としよう。

(1) 特殊な周辺条件の板

弾性バリ支持、弾性固定等の問題は E. Weber, E. Müller, 坪井、藤井氏等によつて研究された²⁰⁾。また筆者等は矩形板の一辺の途中で支持条件の急変する場合を研究した²¹⁾。また周辺が数カ所の点で支持されるような場合は A. Nadai 氏が詳細な研究を与えている²²⁾。

(2) 連続板, 無バリ板

連続板は隣接板との連続の方法により, さまざまの形式がありうる。筆者は任意数の等スパン一方向連続板の安定問題, 振動問題を数種の連続条件について解を与えた²³⁾。連続辺が可撓性のハリで支持された場合は補強材をつけた平板構造等でしばしば見られるものであつて, N. M. Newmark, H. Bleich, 東, 岡本氏等の解がある²⁴⁾。無バリ板は床構造としてコンクリート建築で用いられることが多い。矩形柱頭の場合に対しては V. Lewe, W. Müller 氏等, 円形柱頭では S.W. Krieger 氏の研究がある²⁵⁾。

(3) 異方性板

鉄筋コンクリート板等は直交配筋量の相異なる直交異方性板とみなし得て M.T. Huber, H. Marcus, 井口氏等の研究がある²⁶⁾。また成岡, 米沢氏等は桁橋構造を一種の直交異方性板とみなして研究した²⁷⁾。変厚板も曲げ剛度が一定でないところから一種の異方性を呈するが変厚の円板, 矩形板については O. Pichler, R. Gran Olsson 氏等の研究がある²⁸⁾。

(4) 特殊な形状の板

A. Nadai 氏は Streifen に適当な対称点荷重列を仮想すると, 撓曲面の変形が周期的に分布し, その一つの節線でかこまれた領域が三角形となることにより単純支持三角形板の解を与えた²⁹⁾。平行四辺形板については J. Krettner 氏が斜交座標を用い, また小松氏は等角写像の方法により解を与えた。また W. Fuchssteiner 氏も同じ板ならびに台形板の解を与えた³⁰⁾。なお正六角形板に対する岩藤, 山本氏等の解がある³¹⁾。S.W. Krieger 氏は双極座標を用いて周辺固定の半円, 欠円, 三日月形二つの偏心円の間に固定された板等の解を与えた³²⁾。

E. Wiedemann 氏は差分方程式による近似解法により中央に正方形の開口部をもつた正方形板を解いた³³⁾。

(5) 特殊な外力を受ける板

舗装板はタワミに比例した地盤反力を受ける弾性基礎上の板として論ぜられ H.M. Westergaard, H. Happel, V. Lewe, 原口, 喜内氏等が研究した³⁴⁾。また能町氏は四周完全に自由な矩形板の解を integral transformation の方法により求めた³⁵⁾。W. Müller 氏は無バリ板を逆さにしたような基礎板を研究した³⁶⁾。熱応力の問題は山口博士がくわしく研究された³⁷⁾。また中立面内荷重による座屈現象の問題については『弾性安定要覧』が最適の参考書である。通常中立面内荷重による面内応力は一様であるか, あるいは簡単な直線分布をなす場合が取り扱われるが, 周辺荷重が集中荷重か部分的分布荷重なるときは, 中立面内応力はもはや一様分布ではなく平面問題として応力分布を求めなくてはならない。K. Girkmann L. Zetlin 氏等はかかる考慮をなした安定問題の一例を解いた³⁸⁾。振動の問題も安定問題と類似の問題であつて

例えば井口博士の詳細な研究がある³⁹⁾。

(6) 平板構造物

平板の結合より成る構造物の研究としては坪井氏が隣接壁との連続の条件を用いて箱形構造物の解を求めた。また四野宮氏は差分式により壁体ラーメンの数値解を与えた⁴⁰⁾。板を折り曲げて造つたとき構造は Faltwerk と呼ばれ, 種々の断面形部材または屋根形として研究されている。

(7) 非線形理論

Large deflection の板は基本式 (28.1), (28.2) を数値的に解くことによつて研究された。S. Levy, S. Way 氏等が矩形板を, S. Timoshenko, K. Federhoffer, H. Hencky, S. Way 氏等が円板の場合を論じた⁴¹⁾。

(8) 最近の問題

平板理論の実用化上の支障の一つは解析の面倒さに加えて荷重の多様性, ことに動荷重の取り扱いであろう。この点に関しハリの場合の影響線に相当する影響面の研究が E. Bittner, A. Pucher 氏等によつて行われた⁴²⁾。また一般構造物の極限設計法の研究も平板設計に波及した。これについては W.H. Pell, W. Prager, 坂, 田中氏等の研究がある⁴³⁾。実験的研究については紙数の都合で割愛する。最後にわが国各学会機関誌に従来掲載された平板関係の論文数の大略を示すと次のごとくである。

学会名	土木	建築	機械	船舶	航空	応力
論文総数	32	22	123	25	13	10

参 考 文 献

書籍

- (1) A.E.H. Love: "A Treatise of the Mathematical Theory of Elasticity", 1926.
- (2) S. Timoshenko: "Plates and Shells", 1940; (3) K. Girkmann, "Flächentragwerke", 1954; (4) A. Nadai: "Elastische Platten", 1925.

文献

- 1) S. Timoshenko: 60th Anniversary Vol. 1938.
- 2) M.T. Huber: Der Bauing. 1923, Heft 12; H. Marcus, "Die Theorie elastische Gewebe," 1932.
- 3) 書籍 (2) p.194.
- 4) W. Flügge: "Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten," 1928.
- 5), 6) 書籍 (2) p.298, p.327.
- 7) 坪井善勝: "平面構造論" p.217
- 8) 書籍 (2) p.342.
- 9) 書籍 (1) pp.492~495.
- 10) M.K. Huang and H.D. Conway: Jour. Appl. Mech., Paper No.52-APM-14
- 11) 山田和英: 機械学会誌 57 卷論文集 99 号; K. Goriupp: Ing. Arch., Bd. 16, Heft 2, 1947, Bd. 16, 1948.
- 12) S. Iguchi: "Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten", Berlin, 1933.
- 13) H.J. Fletcher and C.J. Thorne: Proc. 2nd U.S. National cong. Appl. Mech., pp. 389~406, 1954.
- 14) A. Nadai: 書籍 (4) s.190; W. Flügge, 前出 4); J.H. Michell, 書籍 (1) p.490.
- 15) N.I. Muskhelishvili: "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", 1953, p.319, p.368.
- 16) 成岡昌夫: 土木学会論文集 35 卷 6 号; 横田道夫: 建築学会論文

集 30 号 p.135.

- 17) H. Marcus: "Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten," Berlin, 1932.
- 18) 水野高明・吉村芳男: 土木学会誌 36 卷 4 号; 坂 静雄: 建築学会論文集 1 号; 横田道夫: 建築学会研究報告 18 号
- 19) D.L. Holl: Jour. Appl. Mech., Vol.4, p.8, 1937.
- 20) E. Weber: Ing. Arch., Bd.8, s.311, 1937; E. Müller: Z.A.M.M., Bd. 6, Heft 5, s. 355, 1926; 坪井善勝: 建築学会論文集 13 号, p.58, 17 号, p.266; 藤井忠二: 矩形平板と梁, 昭. 19.
- 21) M. Kurata and S. Hatano: Proc. 6th Jap. N.C. Appl. Mech., p.57. 1956.
- 22) A. Nadai: Z.A.M.M., Bd.2, Heft 1, ss.1~26, 1922.
- 23) M. Kurata: Mem. Eng. Hokkaido Univ. Vol.8, No.3; Proc. 1st J.N.C. Appl. Mech., p.561, 1951.
- 24) N.M. Newmark: Bull. Univ. Ill., 84, 1938; H. Bleich: Beton und Eisen 36, s.312, 328; 東 洋一: 建築研究報告 22 号 28 号; 岡本北海: 土木学会論文集 19 号, p.23.
- 25) V. Lewe: "Pflzdecken u. andere trägerlose Eisenbetonplatten", Berlin, 1926; W. Müller: Ing. Arch., Bd.20, 1952, Bd.21, 1952; S.W. Krieger: Ing. Arch., Bd.3, s. 236, 1932.
- 26) M.T. Huber, 前出 2); H. Marcus, 前出 28); 井口, 前出 12).
- 27) 成岡昌夫・米沢 博: 土木学会誌 40 卷 5 号, 2 号.
- 28) O. Pichler: "Die Biegung Kreissymmetrischer Platten von veränderliche Dicke", Berlin, 1928; R. Gran Olsson: Ing. Arch., Vol.5, s.363, 1934, Vol.8, s.81, 1937.
- 29) 前出 22)
- 30) J. Krettner: Ing. Arch, Bd.22, 1954; 小松定夫: 土木学会論文集 33 号; W. Fuchssteiner, Der Bauing. Vol.38, Heft 1, 1953.
- 31) 岩藤重正: 機械学会誌 37 卷 207 号; 山本正之: 機械学会誌 46 卷 314 号.
- 32) S.W. Krieger: Ing. Arch., Bd.24, 1956.
- 33) E. Wiedemann: Ing. Arch., Bd.7, 1936.
- 34) H.M. Westergaad: Public Road, Vol.7, p.25, 1926; H. Happel, Math. Z., Vol.6, p.203, 1920; V. Lewe, Bauing., Vol.3, p.453, 1923; 原口忠次郎: 土木学会誌 29 卷 11 号 12 号; 喜内 敏: 土木学会論文集 13 号.
- 35) 能町純雄: 土木学会論文集 32 号.
- 36) W. Müller: Ing. Arch, Bd.20, ss. 278~290, 1952.
- 37) N. Yamaguchi: Jour. Eng. Tokyo Univ. Vol.3, 17, No.1.
- 38) K. Girkmann: Inter. Assoc. Bridge and Structural Eng., Final Report, 1936; L. Zetlin: Proc. A.S.C.E., Vol.81, Paper No.795, 1955.
- 39) S. Iguchi: Ing. Arch., Bd.8, Heft 1, 1937; Bd.11, Heft 1, 1940; Bd.21, Heft 5 6, 1952.
- 40) 坪井善勝: 建築学会論文集 25 号; 西野官哲郎: 第 12 回土木学会年次講演会講演概要 p.9
- 41) S. Levy: Proc. of Symposia of Appl. Mech., Vol.1; S. Way, S. Timoshenko: 60th Ann. Vol., 1938; S. Timoshenko: Mem. Inst. of Way of Communication, Vol.89 1915; K. Federhoffer: Eisenbau, Vol.9, p.152, 1918.
- 42) H. Hencky: Z. Math. Phys., Vol.63, p.311, 1915; S. Way: Trans. A.S.M.E., Vol.56, p.627, 1934; E. Bitter: Momententafeln und Einflussflächen fur Kreuzweise bewehrte Eisenbeton-Platten, Wien, 1938.
- 43) A. Pucher: Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten, Ing. Arch., Bd.14, s.246, 1943; W.H. Pell, W. Prager: Proc. 1st U.S. Natvo. cong. Appl. Mech., 1951; 坂 静雄: 建築雑誌, 昭. 27. 11; 田中 尚: 建築学会論文集, 第 47 号, 昭. 28. 9.

東北大学教授 工学博士 河上房義著

〔最新刊 発売中〕

土質工学計算法

A5判 232頁 上製
定価 350円 円 50円

—— 土質及び基礎の工学的計算法 ——

特色
☆☆☆

1. 基礎的重要事項を各章の始めにまとめ、理解を容易にした。
2. 現場で直面する実際の数字をあげて計算した。
3. JIS の試験や力学的試験のデータを処理し、設計などに用いる過程を多数の例題によって詳述している。
4. 実用に供しうる計算図表を多数挿入し、土質試験方法を巻末に収めた。

【内 容】

土の間ゲキ、含水量、比重および密度・土の粒度及びアッターベルク限界・土の分類・土のせん断抵抗・斜面の安定・土圧・基礎の支持力・基礎の圧密沈下・クイ基礎・土中の透水と排水・路床及び路盤、以上の諸計算、練習問題、JIS (土質試験法その他)

〔好評発売中〕 工博 春日屋 伸昌著

〔近刊 5月中旬〕 工博 春日屋 伸昌著

測量野帳

集成測量表

—— 解説及び記載例つき ——

〔B6判 704頁 特上製 価1000円 円 60円〕

トラバース編 A6 160頁 定価100円 円 32円
 スタジア・水準編 A6 160頁 定価100円 円 32円

~~~~~ 目 録 ~~~~~  
 東京・神田・小川町3の10  
 振替口座東京 34757 森北出版