【報　告】

洪水波頂の計算に導入すべき二次微分値

——河道の洪水調節計算法（その2）——

藤　芳　義　男*

1. 洪水流の基本方程式の修正

洪水流の基本方程式は最も簡単には

$$U=C\sqrt{HI}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{運動方程式}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial(HU)}{\partial x}=0\ \cdots\cdots\cdots\text{連続方程式}$$

の両式から

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{3}{2}U\frac{\partial H}{\partial x}=0$$

を得，これは伝播速度

$$\omega=\frac{3}{2}U$$

の波動とした。

著者は実際河川の数値計算上二つの修正を希望する。

その第一は連続方程式の第1項すなわち貯溜項の川幅はあくまで水面幅 B を用いるべく，第2項の運動項の川幅には低水路の水理に換算した川幅 b を用いることである。なぜなら，貯溜項の $\partial H/\partial t$ と運動項の $\partial H/\partial x$ とが相対的になるには，運動項の川幅を水面幅にすると $\partial R/\partial x$ を用いるべきで，径深と水深はいちじるしく異なるので，$\partial R \fallingdotseq \partial H$ となる。いま全流量を低水路の水理量で表わすと実は低水路換算川幅 b が登場し，こうしてこそ $R=H$, $\partial R=\partial H$ となるので，連続方程式は成立するわけである**。

こうして連立方程式は

$$B\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{3}{2}bU\frac{\partial H}{\partial x}=0$$

または $\quad\dfrac{\partial H}{\partial t}+\dfrac{b}{B}\dfrac{3}{2}U\dfrac{\partial H}{\partial x}=0$

となり，伝播速度は

$$\omega=\frac{b}{B}\frac{3}{2}U$$

となる。さらに運動方程式として一般に承認されているように

$$U=\frac{1}{n}H^{2/3}I^{1/2}$$

を用いるならば，伝播速度は

$$\omega=\frac{b}{B}\frac{5}{3}U$$

となる。

次に以上の式では洪水の波頂では $\partial H=0$ となる。これに対しては従来数学的に

$$\omega=-\frac{\partial H/\partial t}{\partial H/\partial x}=-\frac{0}{b}=-\frac{\partial^2 H/\partial t^2\cdot dt}{\partial^2 H/\partial x^2\cdot dx}=\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 H/\partial t^2}{\partial^2 H/\partial x^2}$$

$$\therefore\quad \omega^2=\frac{\partial^2 H/\partial t^2}{\partial^2 H/\partial x^2}$$

と説明されている。

一般に洪水波頂のように曲率の強いところでは数値計算上は $\partial t=3\,600\ \mathrm{s}$, ∂x もそこに対応して $\partial x=-\omega\,\partial t$ と相当の値をとるので，微分値の省略は許されなくなる。これが筆者の第二の修正点である。

微分値は省略しないと数学書の示すとおりに

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad df=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\frac{h}{2!}f''(x)+\frac{h^2}{3!}f'''(x)+\cdots\cdots\cdots$$

となる。したがつて

$$\frac{\partial H}{\partial t}\ \rightarrow\ \frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}dt$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}\ \rightarrow\ \frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}dx$$

のように2次微分値を無視できない。そこでこの2次微分値まで認めると，基本方程式は

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\omega_1\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}-\omega\omega_1\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)dt$$

$$\omega_1=\frac{b}{B}\frac{5}{3}U\qquad \omega=-\frac{dx}{dt}$$

となる。洪水の波頂では $\partial H=0$ であるから，

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}=\omega\omega_1\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

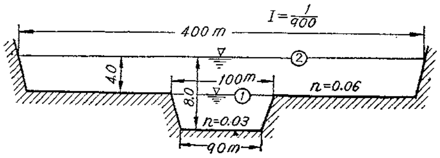
となり，これは

$$\omega^2=\omega\omega_1\ \text{または}\ \omega=\omega_1$$

の伝播速度をもつ波動となる。結局洪水波頂でも伝播速度は同じ式 ω_1 で表わされることを示す。

［例　題］ 次のような河道で計算してみる。ちょうど低水路一杯のときの場合と，さらに高い水位の場合である。

図—1



---

* 正員　工博　熊本大学教授，工学部土木教室

** 低水路換算川幅 b は $b=Q/UH$，（ここで Q は全流量，U は低水路平均流速）で算定される。

$$I=\frac{1}{900} \qquad n_1=0.03\ (\text{低水路})\quad n_2=0.06\ (\text{洪水敷})$$

水　　位	+4.0	+8.0	
水　面　幅　B	100 m	400 m	
低水路平均水深 H	4.0	8.0	
〃　　流速 U	2.80	4.44	$U=\frac{1}{2}nH^{2/3}I^{1/2}$
全　流　量　Q	—	5 640 m³/s	
低水路換算川幅 b	95	159	$b=Q/UH$
$\omega_1=\frac{b}{B}\frac{5}{3}U$	4.44 m/s	2.95 m/s	

2. 洪水流の基本方程式の修正（その 2）

前節の計算では一応水面勾配 I は一定としたのであるが，水深の大きい洪水，特に緩流河川の洪水では I は少なくとも

$$I=i_0-\frac{\partial H}{\partial x}$$

としなければならない。この場合は

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{5U}{3H}\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{U}{2I}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

となるので，基本方程式は

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\omega_1\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{b}{B}\frac{HU}{2I}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

となる*。

これに従つて曲率の強い場合の数値計算上の式を作ると，

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\omega_1\frac{\partial H}{\partial x}=$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}-\omega\omega_1\left(1+\frac{3H}{5\,\omega\,Idt}\right)\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right\}dt$$

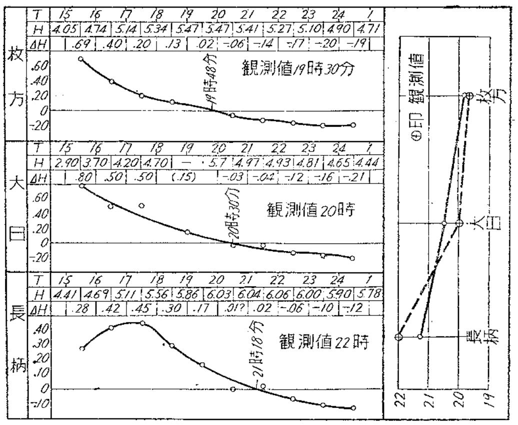
となるから，洪水波頂の伝播速度 ω は

$$\omega^2=\omega\omega_1\left(1+\frac{3H}{5\,\omega\,Idt}\right)$$

または　　$$\omega=\omega_1\left(1+\frac{3H}{5\,\omega\,Idt}\right)$$

をうる。補正値に ω を含むのでこれを解けば，

図—2



ここで $B=b$ としたのが林，速水博士らの導かれた式である。

$$\omega=\omega_1\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3H}{5I\omega_1^2 dt}}\right)$$

をうる。この数式中の dt は1時間計算の場合は 3 600 s である。

［例　題］ 前節の標準断面で計算してみる。

最も明らかなことは ω_1 が平均流速より小さいほど，ω は平均流速に近づくことである。また ω_1 が平均流速より大きいときは逆に ω は ω_1 より大きくなるが，その量は前者の場合よりはるかに小さい。

水　　位	+4.0	+8.0
H	4.0	8.0
I	1/900	1/900
ω_1	4.44	2.95
$3H/5I\omega_1^2 dt$	0.0305	0.1375
ω	4.57	3.31
U	2.80	4.44

［実　例］ 淀川，枚方・長柄間（昭.31.9.27 台風 15 号）

Q	H	I	n	U	$\left[\frac{1}{B}\right]_m$	$b=\frac{Q}{HU}$	ω_1	ω
5 110	5.98	$\frac{1}{3\,000}$	0.0283	2.08	$\frac{1}{705}$	+10	2.00	3.00

$$\left(\frac{3H}{5I\omega_1^2 dt}=\frac{3\times5.98}{5\times\frac{1}{3\,000}\times2.0^2\times3\,600}=0.750\right)$$

$$T=\frac{L}{\omega}=\frac{16\,330\ \text{m}}{300\ \text{m/s}}=5.450\ \text{s}=1\ \text{時間}\ 31\ \text{分}$$

これに対して建設省の観測値は両地点の最高水位の時刻から2時間半となつているが，図—2 のように $\partial H/\partial t=0$ の点を図解で調べてみると枚方 19 時 48 分，長柄 21 時 18 分となり，伝播時間は1時間 30 分となる。

［実例　2］ 白川中流部　（鳥子川 37.0 km — 竜田口 18.4 km 間）（昭.28.6.26 洪水）

Q	H	I	n	U	$\left[\frac{1}{B}\right]_m$	$b=\frac{Q}{HU}$	ω_1	ω
2 780	7.55	$\frac{1}{357}$	0.042	4.85	$\frac{1}{257}$	76.0	2.39	2.56

$$\frac{3H}{5I\omega_1^2 dt}=\frac{3\times7.55}{5\times\frac{1}{357}\times2.39^2\times3\,600}=0.0785$$

$$Q=\frac{1}{2}(2\,980+2\,570)=2\,780\ \text{m}^3/\text{s}$$

$H,\ I,\ n,\ U$ はいずれも低水路全区間の平均値

$1/B_m$ は $[1/B]_m$ と異なり $1/B_m=1/335$

これに対し立野・鳥子川間の急流部では，

Q	H	I	n	U	$\left[\frac{1}{B}\right]_m$	$b=\frac{Q}{HU}$	ω_1	ω
2 470	6.50	$\frac{1}{76}$	0.060	6.65	$\frac{1}{88}$	57.1	7.15	7.15

$$\left(\frac{3H}{5I\omega_1^2 dt}=0.000\,19\right)$$

立野で 20 時の波頂は龍田口に

$$20\ \text{時}+\frac{7\,400\ \text{m}}{7.15\ \text{m/s}}+\frac{18\,600\ \text{m}}{2.56\ \text{m/s}}$$
$$=20\ \text{時}+17\ \text{分}+2\ \text{時間}1\ \text{分}=22\ \text{時}18\ \text{分}$$

に到達することになる。これに対して記録は多少の不明はあるが，すぐ下流の小磧橋で 21 時 30 分，一夜塘で 22 時 30 分，子飼橋 22 時となつている。

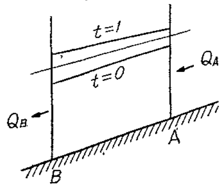
3. 洪水調節量の略算法

河川の AB 2点間の洪水調節量 $\varDelta Q$ は一般に，

$$\varDelta Q=F\frac{\partial H}{\partial t}$$

で計算される。しかし，これだけでは，曲率の強いところ，とくは洪水波頂ではほとんど計算不能になる。

図—3



	A 点	B 点	中 央 点 (平 均)
0 時	H	$H+\frac{\partial H}{\partial x}dx$	$H+\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x}dx$
dt 時夜	$H+\frac{\partial H}{\partial t}dt$	$H+\frac{\partial H}{\partial t}dt+\frac{\partial}{\partial x}\left(H+\frac{\partial H}{\partial t}dt\right)dx$	$H+\frac{\partial H}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x}dx+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial t}dt\cdot dx$

これも原式誘導の過程で微分値に省略があるからである。

したがつて，中央点の水位差は

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial t}dx\right)dt$$

となるから，原式は

$$\varDelta Q=Q_A-Q_B=F\left(\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial t}dx\right)$$

となる。また定流時に $\partial H/\partial x=0$ の区間では

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial t}=\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\frac{dt}{dx}=-\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\frac{1}{\omega}$$

が成立するから，

$$\varDelta Q=F\left(\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{dx}{2\omega}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right)$$

$$=F\left(\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}dt\right)$$

をうる。この計算式によると洪水の波頂でも調節量を計算できるとともに，曲率の強い他の点でも補正される。すなわち，水位上昇が急増するところでは，調節量は $\partial H/\partial t$ のみの場合より減じ，水位上昇が少なくなるところでは調節量は増加することを示す。

洪水波頂の洪水調節量は

$$\varDelta Q=-\frac{F}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}dt$$

で計算できるが，F は AB 2点間の水面積，$\partial^2 H/\partial t^2$ は AB 2点の平均値，dt は 3 600 s をとるべきである。数地点の水位資料があるなら，

$$\varDelta Q=-\frac{F_1}{2}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}dt\right]_1-\frac{F_2}{2}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}dt\right]_2-\cdots\cdots$$

として計算すればよい。

また追跡計算のとき流量曲線があつたら洪水波頂では

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}=\frac{3H}{5Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}$$

となるから，

$$\varDelta Q=-\frac{3HF}{10Q}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}dt$$

で計算すればよい。

以上の計算はきわめて理論的であるが，水位資料なり流量資料なりから，波頂では観測が高い精度がないかぎり，やはりかなりの誤差はまぬかれない。この節の題に略算法としたのはそのためである。

［例　題］ 木津川（昭. 31. 9. 27 台風 15 号）

加茂，泉橋，田辺，川口，八幡の水位曲線から計算してみる。

距　離	30.7		25.0		11.0		3.0		1.0
地　点	加　茂		泉　橋		田　辺		川　口		八　幡
$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}dt^2$	−0.36		−0.27		−0.24		−0.20		−0.18
同上平均値		−0.315		−0.255		−0.22		−0.19	
B 平均水面幅		300		575		400		350	
F 水面積		1 710 000		8 050 000		3 200 000		700 000	
$\varDelta Q$ 調節量		75		285		98		19	

（例 $[\varDelta Q]_1=\frac{-F_1}{2}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}dt\right]_1=\frac{1\,710\,000}{2}\times\frac{0.315}{3\,600^2}\times 3\,600=75$）

$$\Sigma\varDelta Q=75+285+98+19=477\ \mathrm{m^3/s}$$

これに対して建設省の流量観測では

	加茂	泉橋	八幡
最大流量	4 320	4 670	3 820
調節量		←850→	
	←500→		

となつている。

4. μ の値

河道の洪水調節の計算は AB 2点間で，

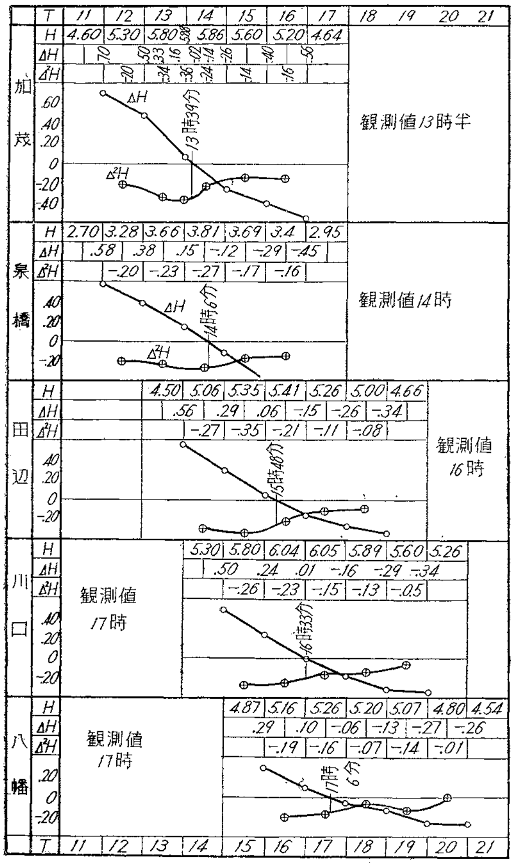
$$Q_{B1}-Q_{B0}=\varDelta Q_B=\mu(Q_{A1}-Q_{B0})$$

$$\mu=1\Big/\left(1+\frac{F}{\varDelta T}\cdot\frac{\varDelta H_{AB}}{\varDelta H_B}\Big/\frac{\partial Q_B}{\partial H_B}\right)$$

で逐次計算することができる*。

* 藤芳義男：河道の洪水調節計算法，土木学会誌第 42 巻第 2 号

図—4　木津川洪水調節計算表



この μ の値はさらに略算することができる。一般に

$$Q=\frac{1}{n}bH^{5/3}I^{1/2}$$ に従うものとすれば

$$\frac{\partial Q}{\partial H}=\frac{5Q}{3H}$$

であるから，μ の値は

$$\mu=1\Big/\left(1+\frac{F}{\varDelta T}\cdot\frac{3H}{5Q}\cdot\frac{\varDelta H_{AB}}{\varDelta H_B}\right)$$

で計算できるわけである。いま水面積 F の代りにはんらん水面幅 B および AB 2点間の距離 L を用い，

$$F=B\cdot L,\qquad Q=bHU$$

とすれば，

$$\mu=1\Big/\left(1+\frac{B3}{b5U}\cdot\frac{L}{\varDelta T}\cdot\frac{\varDelta H_{AB}}{\varDelta H_B}\right)\quad\text{または}$$

$$\mu=1\Big/\left(1+\frac{L}{\omega_1\varDelta T}\frac{\varDelta H_{AB}}{\varDelta H_B}\right)$$

となる。ここで $\omega\varDelta T$ は1時間における到達距離であるから，$\dfrac{L}{\omega\varDelta T}=T$

T は到達時間を表わす。そこで T を用いれば，

$$\mu=1\Big/\left(1+T\cdot\frac{\omega}{\omega_1}\cdot\frac{\varDelta H_{AB}}{\varDelta H_B}\right)$$

と非常に簡単になる。ここで一般には $\varDelta H_{AB}=\varDelta H_B$ であり，$\dfrac{\omega}{\omega_1}=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3H}{5I\omega_1{}^2dt}}$

で表わされるように1より若干大きい数値である。したがつて概算上はカッコ内の ω_1 は ω と仮定しすも大差ない。

［例　題］　白川中流部，鳥子川・竜田口間

$$\frac{\omega}{\omega_1}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+0.0785}=1.071$$

$$\frac{\varDelta H_{AB}}{\varDelta H_B}=1\qquad T=2.0\ 時間$$

$$\therefore\quad \mu=1/(1+2.0\times1.071)=0.319$$

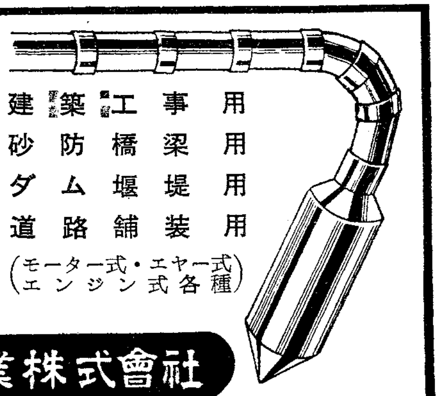
精密に計算した値は $\mu=0.375$ であつた。

門司観光ロープウエイ竣功

3月9日開通した関門国道海底トンネル門司側古城山の入口右側の観光ビル屋上から瀬戸内海国立公園和布刈公園山頂の間に九州では最初の自動循環式旅客索道が3月1日開業した。本索道は延長 625 m，高低差 92 m で瀬戸内海や早鞆の瀬戸の急潮を眼下におさめる位置に設けられている。6人乗りの搬器 24 台を有し，搬器は1分間隔ごとに自動的に曳索をつかみ，連続して運転されるもので運転速度は 1.5 m/sec である。

三笠 コンクリート バイブレーター

建築工事用
砂防橋梁用
ダム堰堤用
道路舗装用
（モーター式・エヤー式
エンジン式各種）



本社　東京都中央区八重洲4の5
営業所　TEL　(28)　8673～4・9978
工場　群馬県館林市成島 2042　電話 館林 221

三笠産業株式會社