【解　　説】

逐次近似法による平方根，立方根計算の精度について

谷　本　勉　之　助*

与えられた数 N の平方根を計算器で求めるには

$$N=x(x+2\varepsilon)\cdots\cdots(1)$$

なる近似式によつて，試し掛け法を使うのが最も能率のよいことをすすめているが[1]，この際に逐次近似の精度が問題になるので，調べた結果を記そう。

通常はごく粗略に扱われていて，出発の近似値 x が n 桁正しいとき，補正値の ε も n 桁正しいとせられている。これには例外があつて，ε が $n+1$ まで正しい場合もあれば，逆に $n-1$ 桁までしか正しくない場合もありうる。このようなときの判定を簡単に行うことのできる規準が一般に使用せられていないようであるので，これを以下に記す。

例えば $\sqrt{1.55}=1.2$ までをえて，これを (1) によつて補正すると

$$\sqrt{1.55}=1.2458=1.246\cdots\cdots(2)$$

となるが，これの正しい値は 1.245,0 であつて，(2) の補正値 46 は正しくない。

逆に例えば $\sqrt{94.4}=9.7$ を (1) によつて補正すると

$$\sqrt{94.4}=9.715979=9.716,0\cdots\cdots(3)$$

となり，このときの補正値 160 は3桁まで正しい。このように一般に定性的には，出発値 x の首位数が 1～2 などの小さな数で，かつ補正値 ε の首位数が 8～9 などの大きな数のときが不都合な場合であり，逆に x の首位数が大きくて，ε の首位数が小さいときが好都合の場合であることはよく知られている。

さて $\sqrt{N}=x+\varepsilon$ とおいて，両辺を平方し変形すれば

$$\varepsilon=\frac{N-x^2}{2x}-\frac{\varepsilon^2}{2x}\cdots\cdots(4)$$

通常の Newton 近似は，$\varepsilon^2/2x$ の項を省いて，$\varepsilon=(N-x^2)/2x$ としているのである。この式と (1) とは数学的には同じものであるが，計算器の操作の上からは全く別ものになり，能率も (1) による方がすぐれている。そして (4) からわかるように，Newton 近似は $-\varepsilon^2/2x$ なる負の量を捨てているから，ε は常に真の値よりも過大な値を与えることがわかる。この注意は平方根の実算には大切なことであつて，(1) によつて求めた ε の最後の位の数字は，常に小さ目にとらなければならないのである。すなわち切り上げ丸めを行つてはならないのである。すなわち切り上げ丸めを行つてはならないということである。もつともこの注意を知つていて，わざと切り上げ丸めを行うのが，かえつてよいという特殊な場合もまれには起る。

さて一般的な判定の規準を導くためにつぎの仮定をしよう。出発値 x は2桁の1位の数で，ε はそれに続く2桁の数とする。ε は従つて小数2位と3位とを占める。(1) によつて補正した ε が小数3位に利かないためには，(4) における $\varepsilon^2/2x$ の値が小数4位において5単位以下であればよい。すなわち

$$\left|-\frac{\varepsilon^2}{2x}\right|<5\times10^{-4},\quad \text{または}\quad x\times10^{-3}>\varepsilon^2\cdots\cdots(5)$$

一般には，x が幾桁の幾位の数であつても，これを1位の数とみなしたものを X であらわし，同じように ε を1位の数とみなしたものを E であらわすと，上の (5) の規準は

$$10X>E^2\cdots\cdots(6)$$

となることがわかる。例えば (2) のときには明らかに

$$1.2\times10<(4.6)^2$$

がわかり，(6) とは大小関係が逆になるから，補正値 46 は正しくなかつたのである。逆に (3) では明らかに

$$9.7\times10>(1.60)^2$$

であるから，(3) の補正値 160 は少なくとも2桁までは正しかつたのである。

x の桁数よりも ε の桁数がもう1桁多く期待できるような好都合の場合に対する規準は，(5) から (6) をえたのと同様にして

$$X>E^2\cdots\cdots(7)$$

となることがわかるであろう。例えば (3) においては

$$9.7>(1.60)^2$$

の成り立つことが一目でわかる。(7) によつて (3) の補正値 160 は全部正しい。事実 (3) のくわしい値は，9.715,96… である。

(6),(7) の規準を推し進めれば，出発値 x の桁数よりも，2桁多く ε の桁数が正しくえられることはありえないことがわかる。なぜならばこのときの規準は $0.1X>E^2$ でなければならないが，X はせいぜい9ではじまる数であり，E は1ではじまる数でなければならないから，この不等式は成り立ちえないのである。もつとも E が0ではじまる数のときは上の不等式が成り立ちうるが，このときは，X が実はもう1桁多かつたのであるから，問題は (6) または (7) に帰することになる。

立方根を求めるのも同様に

$$N=x^2(x+3\varepsilon)\cdots\cdots(8)$$

* 正員　工博　信州大学教授，工学部土木工学科

1) 著者：計算器の能率的な使い方，土木学会誌（昭 32.8）等

に従う試し掛けを行つて，補正値εを求めるのであるが[2)]，このときには$\sqrt[3]{N}=x+\varepsilon$とおき，両辺を立方して変形すれば

$$\varepsilon=\frac{N-x^3}{3x^2}-\frac{\varepsilon^2}{x}-\frac{\varepsilon^3}{3x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

となる。右辺の第3項 $-\varepsilon^3/3x^2$ はきわめてまれにしか利かないから省くこととすれば，誤差の規準を与えるのは $-\varepsilon^2/x$ の項である。前と同様にxを1位の数とみなしたものをXであらわし，εを1位の数とみなしたものをEで書けば，εがxと同じ桁だけ期待できるときの規準は，平方根のときの(6)の代りに，

$$5X>E^2\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

となる。この不等式の成り立ちうる場合は，平方根の(6)よりも明らかによほど少ない。事実，数多くの立方根計算に従事してみると体験せられるとおり，補正値εの最後の位の数字が不確かなため，不要の混乱を生じやすいものである。

(10)の規準によつて判定する例として$\sqrt[3]{67}=4.0$を(8)によつて補正して，$\sqrt[3]{67}=4.0625$をうるが，$X=4.0$，$E=6.25$であるから，$5\times4.0<(6.25)^2$。これは(10)の規準とは大小が逆であるから，上の補正は2桁目も正しくない。事実正しい値は$\sqrt[3]{67}=4.061,5\cdots$である。

逆に好都合の場合として，$\sqrt[3]{60}=3.9$を(8)によつて補正すると$\sqrt[3]{60}=3.914,9=3.915$をうるが，明らかに$5\times3.9>(1.5)^2$であるから，2桁の補正値15は正しい。事実正しい値は$\sqrt[3]{60}=3.914,8\cdots$である。

しかしきわめて特殊な境い目の場合には，(9)の右辺第3項を省いたため，(10)の規準が正しくないことが起りうる。例えば$\sqrt[3]{61}=3.9$を(8)によつて補正すると，$3.936,8\fallingdotseq3.937$をうる。このとき$3.9\times5>(3.7)^2$であるにもかかわらず，正しい値は$\sqrt[3]{61}=3.936,497\cdots=3.936$である。

なお立方根を求める実算の際には，きわめて好都合な場合のほかは，通例出発値xの桁数よりも補正値εの桁数を1桁控える方が不要の混乱と間違いとを避けられるようである。以上の調べはタイガー計算器KKから質問があつたのに端を発していることを付記する。

2) 前掲 1)

お願い

従来，会員の方で，住所，勤務先などを異動された場合，支部に通知して，本部にお知らせにならない方がおられますが，支部からまた本部へいちいち連絡するのは大変な手数ですから，必ず本部に直接御通知下さい。